Автоматика и телемеханика, № 3, 2019

© 2019 г. В.М. ХАМЕТОВ, д-р физ.-мат. наук (khametovvm@mail.ru)
(Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики", Москва;
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)),
Е.А. ШЕЛЕМЕХ (letis@mail.ru)
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва)

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ГРАНИЦЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (КОНЕЧНЫЙ ГОРИЗОНТ)

Устанавливаются верхняя и нижняя границы цены задачи об оптимальной остановке согласованной случайной последовательности для случая конечного горизонта. Показано, что нахождение этих границ сводится к решению максимаксной и максиминной задач об оптимальной остановке. Для этих задач получены условия, при выполнении которых: 1) верхняя (нижняя) урезанная последовательность цен оптимальной остановки удовлетворяет рекуррентному соотношению; 2) построен критерий оптимальности моментов остановки в указанных задачах; 3) установлены структура и свойство инвариантности оптимальных моментов остановки. Приведены примеры явного решения экстремальных задач об оптимальной остановке.

Ключевые слова: максимаксная (максиминная) задача об оптимальной остановке, верхняя (нижняя) граница цены остановки, оптимальный момент остановки.

DOI: 10.1134/S0005231019030103

1. Введение

Задача об оптимальной остановке случайной последовательности является одним из важнейших разделов теории оптимального стохастического управления [1–4]. Решение такой задачи основано на применении стохастического варианта метода динамического программирования [1–7], с помощью которого устанавливаются условия оптимальности момента остановки. Эта теория имеет различные применения: 1) в статистике — последовательное различение простых гипотез; 2) обнаружение разладки производственного процесса; 3) в стохастической финансовой математике — расчет американского опциона. Здесь следует отметить, что при построении решений указанных задач предполагалось, что наблюдателю известно распределение вероятностей останавливаемой последовательности. Как правило, такой информацией наблюдатель не располагает. Поэтому возникает потребность в рассмотрении задачи об оптимальной остановке в максимаксной (максиминной) постановке (подробности приведены в разделах 2 и 3), т.е. когда от ожидаемого значения выигрыша (функции полезности) сначала берется верхняя (нижняя) грань по некоторому множеству вероятностных мер, а затем — верхняя грань по конечному множеству моментов остановки. Это приводит к необходимости вычисления верхнего (нижнего) значения цены оптимальной остановки [4, 6], т.е. спрэда. Этой проблеме посвящена данная статья.

Приведем краткий обзор результатов по теме статьи. В [1, 5–8] подробно изложена история развития оптимальных правил остановки. Здесь следует выделить публикации [8, 9]. Так, в [8] в предположениях, что наблюдается последовательность ограниченных функций выигрыша (полезности), определенных на $\mathbb{R}^1$, а область остановки отделена от области продолжения наблюдений одной точкой, методом Винера–Хопфа найдено приближенное значение цены оптимальной остановки. В [9] содержится семнадцать точно решаемых примеров задач об оптимальной остановке. В работах [10–12] получены условия существования единственной точки, отделяющей область остановки от области продолжения наблюдений. В [6, 13] рассматривалась задача об оптимальной остановке согласованной случайной последовательности. В [6] для урезанной последовательности цен (огибающей Снелла), удовлетворяющей рекуррентному соотношению беллмановского типа, установлены условия оптимальности момента остановки. В [13] выведено рекуррентное соотношение, которое описывает эволюцию урезанной последовательности цен оптимальной остановки, и установлены условия оптимальности момента остановки.

В [14, 15] решалась задача, близкая к рассматриваемой в данной статье, а именно задача расчета американского опциона на неполном рынке. В [14, 15] установлены условия, при выполнении которых проблема расчета американского опциона на неполном рынке сводится к решению задачи об оптимальной остановке.

В [16] для наблюдаемой согласованной последовательности сформулированы условия, при выполнении которых эволюция нижней урезанной цены оптимальной остановки удовлетворяет рекуррентному соотношению беллмановского типа, приведены условия оптимальности момента остановки и даны примеры расчета опционов.

В [17, 18] также рассматриваются задачи, близкие к проблемам данной статьи: для наблюдаемых согласованных процессов, почти наверное (п.н.) непрерывных справа и имеющих конечный предел слева, сформулированы задачи о построении верхней и нижней границ оптимальной остановки, названные авторами нижней и верхней огибающими Снелла соответственно, исследованы их свойства и установлены условия: 1) применимости принципа Беллмана; 2) существования оптимальной остановки.

Перейдем к краткому изложению содержания статьи. Постановка рассматриваемых задач приведена в разделе 2. В разделе 3 в предположениях, что: 1) наблюдается согласованная случайная последовательность; 2) эволюция значений выигрыша, зависящего от значений наблюдаемой последовательности, описывается согласованной последовательностью ограниченных случайных величин — выведены рекуррентные соотношения беллмановского типа (в обратном времени) для верхних и нижних урезанных цен в задачах с конечным горизонтом (теорема 2). На этом основании в разделе 4 построены критерии оптимальности моментов остановки (теорема 3) и установлены структура оптимальных моментов (теорема 5) и их инвариантность относительно любой меры из класса эквивалентных вероятностных мер (теорема 6). Примеры явного решения экстремальных задач об оптимальной остановке содержатся в разделе 5.

2. Обозначения, определения и постановка задачи

Будем использовать следующие обозначения:

1) $N_0 \triangleq \{0, \dots, N\}$, где N – натуральное число (горизонт);

2) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – стохастический базис, вероятностную меру P назовем базовой;

3) $\{S_n\}_{n \in N_0}$ – d–мерные наблюдаемые случайные величины;

4) $\mathcal{F}_n \triangleq \sigma\{S_0, \dots, S_n\}$ – σ–алгебры, порожденные случайными величинами $\{S_n\}_{n \in N_0}$, $n \in N_0$;

5) $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ – набор $\mathcal{F}_n$–измеримых случайных величин f_n, имеющих смысл значений выигрыша наблюдателя в момент времени n, $n \in N_0$;

6) $M(\Omega)$ – множество вероятностных мер, заданных на фильтрованом измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{n \in N_0})$;

7) $\mathfrak{R}_N \subset M(\Omega)$ – множество вероятностных мер Q, эквивалентных базовой мере P [19]. Без ограничения общности можно считать, что $\mathsf{P} \in \mathfrak{R}_N$;

8) $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \xi$ – математическое ожидание $\mathcal{F}_N$-измеримой случайной величины ξ относительно меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$, а $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\xi|\mathcal{F}_n]$ – условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно меры Q и σ–алгебры $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_N$;

9) τ – момент остановки с значениями в N_0, $\mathcal{T}_0^N$ – множество таких моментов остановки, а $\mathcal{T}_n^N$ – подмножество $\mathcal{T}_0^N$ моментов остановки с значениями в $\{n, \dots, N\}$. Очевидно, что определена случайная величина $f_\tau \triangleq \triangleq \sum_{i=0}^N f_i 1_{\{\tau = i\}}$, где $1_{\{\tau=i\}}$ – индикатор события $\{\tau = i\}$ [19].

Далее в статье потребуется определение понятия "существенная верхняя (нижняя) грань". Известно [6], что для любого множества случайных величин Φ, заданных на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, справедливы утверждения: 1) существует случайная величина φ^* такая, что для всех $\varphi \in \Phi$ справедливо неравенство $\varphi^* \geqslant \varphi$ P–п.н., причем φ^* единственна P–п.н. в том смысле, что любая другая случайная величина ψ, удовлетворяющая этому неравенству, удовлетворяет P–п.н. условию $\psi \geqslant \varphi^*$; 2) если множество Φ таково, что для φ и $\tilde{\varphi} \in \Phi$ существует $\psi \in \Phi$ такое, что $\psi \geqslant \max\{\varphi, \tilde{\varphi}\}$, то существует неубывающая последовательность из Φ, предел которой P–п.н. равен φ^*. Случайную величину φ^*, удовлетворяющую приведенным условиям, называют существенной верхней гранью множества Φ относительно вероятностной меры P и обозначают через $\operatorname*{ess\,sup}_{\varphi \in \Phi} \varphi$. Соответственно существенная нижняя грань множества Φ относительно вероятностной меры P определяется равенством $\operatorname*{ess\,inf}_{\varphi \in \Phi} \varphi \triangleq -\operatorname*{ess\,sup}_{\varphi \in \Phi}(-\varphi)$.

В статье рассматриваются три задачи. Первая задача:

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f_\tau|\mathcal{F}_0] \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N}. \tag{1}$$

Задача (1) – это известная задача об оптимальном выборе момента остановки [1, 2, 5, 6], где случайные величины $\{f_n\}_{n \in N_0}$ – значения выигрыша наблюдателя, зависящие от наблюдаемых случайных величин $\{S_n\}_{n\in N_0}$. Предполагается, что наблюдателю известно распределение вероятностей Q случайных величин $\{S_n\}_{n\in N_0}$, а его задачей является выбор такого момента, в который ожидаемое значение его выигрыша максимально.

Вторая задача:

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_0\right] \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}. \tag{2}$$

В задаче (2) наблюдателю известно лишь, что $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$. В этих условиях он выбирает такие $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$ и $\tau\in\mathcal{T}_0^N$, которые максимизируют значение его ожидаемого выигрыша.

Третья задача:

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_0\right] \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}. \tag{3}$$

Задачу (3) интерпретируют следующим образом. Наблюдателю известно, что $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$. Он выбирает момент остановки $\tau\in\mathcal{T}_0^N$ так, чтобы гарантировать максимальное ожидаемое значение своего выигрыша в наихудшей для себя ситуации, т.е. когда действующая вероятностная мера $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$ минимизирует это значение.

Пусть

$v_n^{\mathsf{Q}} \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_n\right]$ — урезанная цена в момент времени $n\in N_0$ относительно меры $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$,

$\overline{v}_n \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_n\right]$ $\left(\underline{v}_n \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_n\right]\right)$ — верхняя (нижняя) урезанная цена в момент времени $n\in N_0$.

Замечание 1.

1. Величины $\left\{v_n^{\mathsf{Q}}\right\}_{n\in N_0}$ называют также огибающими Снелла [6].

2. Из приведенных определений очевидна справедливость неравенств $\underline{v}_n \leqslant v_n^{\mathsf{Q}} \leqslant \overline{v}_n$ Q–п.н. для любого $n\in N_0$. Отсюда следует, что случайная величина $\overline{v}_0$ $(\underline{v}_0)$ определяет верхнюю (нижнюю) границу цены оптимальной остановки.

3. Очевидно, что если $\mathfrak{R}_N=\{\mathsf{P}\}$, то для любого $n\in N_0$: $\underline{v}_n=v_n^{\mathsf{P}}=\overline{v}_n$ P–п.н.

Определение 1. Момент остановки $\overline{\tau}$ $(\underline{\tau})$ назовем оптимальным в задаче (2) *(в задаче* (3)*), если* $\overline{v}_0=\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_0]$ $\left(\underline{v}_0=\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f_{\underline{\tau}}|\mathcal{F}_0]\right)$ Q*–п.н.*

Цель настоящей статьи — 1) описание эволюции верхних и нижних урезанных цен; 2) исследование структуры и свойств, включая свойство инвариантности, оптимальных моментов остановки задач (1), (2) и (3) и достижимости верхней и нижней границ остановки.

3. Рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию верхних и нижних урезанных цен

Выведем рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию урезанных цен $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ и $\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}$. Приведем достаточные условия ограниченности этих случайных величин.

Теорема 1. Пусть существует число $c>0$ *такое, что* $\max\limits_{n\in N_0}|f_n|\leqslant c$ Q*–п.н. Тогда для любых* $n\in N_0$ *и* $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$ *верно, что* $|\overline{v}_n|\leqslant c$ $(|\underline{v}_n|\leqslant c)$ Q*–п.н.*

Доказательства теоремы 1 и последующих утверждений приведены в Приложении.

Теорема 2 устанавливает условия, при выполнении которых $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ $\big(\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}\big)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению беллмановского типа.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда случайные величины $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ $\big(\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}\big)$ *удовлетворяют рекуррентному соотношению* Q*–п.н.:*

$$\overline{v}_n=\max\left\{f_n,\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\},\quad \overline{v}_N=f_N,\tag{4}$$

$$\left(\underline{v}_n=\max\left\{f_n,\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\},\quad \underline{v}_N=f_N\right).\tag{5}$$

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2 (см. Приложение) также следует, что относительно любой меры $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$ случайные величины $\left\{v_n^{\mathsf{Q}}\right\}_{n\in N_0}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению Q–п.н.

$$v_n^{\mathsf{Q}}=\max\left\{f_n,\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[v_{n+1}^{\mathsf{Q}}|\mathcal{F}_n\right]\right\},\quad v_N^{\mathsf{Q}}=f_N,\tag{6}$$

которое для различных частных случаев установлено ранее в [1, 2, 5, 6] и ряде других публикаций. Строго обоснованный вывод можно найти в [13].

Из доказательства теоремы 2 вытекают два важных утверждения.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых $n\in N_0$ *и* $\tau\in\mathcal{T}_0^N$ *справедливы неравенства* Q*–п.н.:*

$$\overline{v}_n\geqslant 1_{\{\tau=n\}}f_n+1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right],\quad \overline{v}_N=f_N,\tag{7}$$

$$\left(\underline{v}_n\geqslant 1_{\{\tau=n\}}f_n+1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right],\quad \underline{v}_N=f_N\right),\tag{8}$$

причем

$$\overline{v}_n\geqslant\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\sum_{i=n}^{N}1_{\{\tau=i\}}f_i|\mathcal{F}_n\right]\quad\left(\underline{v}_n\geqslant\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\sum_{i=n}^{N}1_{\{\tau=i\}}f_i|\mathcal{F}_n\right]\right).\tag{9}$$

Замечание 3. Из доказательства утверждения следствия 1 (см. Приложение) также вытекает, что для любых $n \in N_0$, $\tau \in \mathcal{T}_n^N$ и $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ случайные величины $\{v_n^{\mathsf{Q}}\}_{n \in N_0}$ удовлетворяют неравенству

$$v_n^{\mathsf{Q}} \geqslant 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[v_{n+1}^{\mathsf{Q}} | \mathcal{F}_n \right], \quad v_N^{\mathsf{Q}} = f_N \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого $n \in N_0$ справедливы соотношения Q–п.н.:

1) $\overline{v}_n \geqslant f_n$ $(\underline{v}_n \geqslant f_n)$;

2) $\overline{v}_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n]$, $\overline{v}_N = f_N$ $\left(\underline{v}_n \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\underline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right], \, \underline{v}_N = f_N \right)$;

3) *на множестве* $\overline{B} \triangleq \left\{ (n, \omega) \in N_0 \times \Omega : f_n < \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \right\}$ $\left(\underline{B} \triangleq \left\{ (n, \omega) \in N_0 \times \Omega : f_n < \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\underline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right] \right\} \right)$ *имеет место равенство*

$$\overline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \qquad \left(\underline{v}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\underline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right] \right). \tag{10}$$

Замечание 4.

1. Из первого утверждения следствия 2 вытекает, что случайные величины $\{v_n^{\mathsf{Q}}\}_{n \in N_0}$, $\{\overline{v}_n\}_{n \in N_0}$, $\{\underline{v}_n\}_{n \in N_0}$ мажорируют $\{f_n\}_{n \in N_0}$.

2. Второе утверждение следствия 2 и определение существенной верхней грани дают неравенства Q–п.н.:

$$\overline{v}_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n], \tag{11}$$

где $\overline{v}_N = f_N$ и $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ — любая. Таким образом, в условиях теоремы 1 $(\overline{v}_n, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ — супермартингал относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$.

Определение 2. Последовательность $(\eta_n, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ назовем $\mathfrak{R}_N$-супермартингалом ($\mathfrak{R}_N$-субмартингалом, $\mathfrak{R}_N$-мартингалом), если для любого $n \in N_0$ относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ выполнены условия Q–п.н.:

1) $\sup_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} |\eta_n| < \infty$;

2) $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\eta_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leqslant \eta_{n-1}$ $\left(\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\eta_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geqslant \eta_{n-1}, \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} [\eta_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \eta_{n-1} \right)$.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливы следующие утверждения: 1) $(\overline{v}_n, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ *— это $\mathfrak{R}_N$-супермартингал*; 2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует мера $\mathsf{Q}^{\varepsilon} \in \mathfrak{R}_N$, относительно которой $(\underline{v}_n - n\varepsilon, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ — $\mathfrak{R}_N$-супермартингал.*

4. Оптимальная остановка и ее границы

Исследуем структуру, свойства и соотношения для оптимальных моментов остановки задач (1), (2) и (3).

Для теоремы 3 предположим, что случайные величины $\{f_n\}_{n \in N_0}$ обладают свойствами функции полезности [6]. Утверждение теоремы 3 – критерий оптимальности моментов остановки для задач (2) и (3).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и случайные величины $\{f_n\}_{n\in N_0}$ — значения полезности для наблюдателя. Момент остановки $\overline{\tau}$ ($\underline{\tau}$) является оптимальным для задачи (2) (*для задачи* (3)) *тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\overline{\tau} = \min\{n \in N_0 : \overline{v}_n = f_n\} \qquad (\underline{\tau} = \min\{n \in N_0 : \underline{v}_n = f_n\}), \tag{12}$$

где случайные величины $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ $\left(\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}\right)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (4) (*соотношению* (5)).

Замечание 5.

1. Из [4–7, 13] известно, что момент остановки $\tau^{\mathsf{Q}} \in \mathcal{T}_0^N$, определенный равенством

$$\tau^{\mathsf{Q}} = \min\left\{n \in N_0 : v_n^{\mathsf{Q}} = f_n\right\}, \tag{13}$$

является оптимальным для задачи (1) (в (13) случайные величины $\left\{v_n^{\mathsf{Q}}\right\}_{n\in N_0}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (6)).

2. Утверждение теоремы 3 отличается от известных утверждений подобного сорта тем, что в нем устанавливается также необходимость выполнения равенств (12) и (13) для оптимальных моментов остановки в задачах (1), (3) и (2).

Теорема 4. Если $n \in N_0$ таков, что $\overline{\tau} \geqslant n$ ($\underline{\tau} \geqslant n$) Q–п.н., а $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ $\left(\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}\right)$ удовлетворяет (4), *то $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ $\left(\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}\right)$ удовлетворяет также и рекуррентному соотношению Q–п.н.*

$$\overline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right],\ \overline{v}_{\overline{\tau}} = f_{\overline{\tau}} \quad \left(\underline{v}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right],\ \underline{v}_{\underline{\tau}} = f_{\underline{\tau}}\right),$$

решение которого для любого $n \in [0, \overline{\tau}]$ ($n \in [0, \underline{\tau}]$) допускает представление $\overline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_n\right]$ $\left(\underline{v}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\underline{\tau}}|\mathcal{F}_n\right]\right)$ Q–п.н. и является $\mathfrak{R}_N$-супермартингалом ($\mathfrak{R}_N$-субмартингалом).

Замечание 6. Утверждение теоремы 4 устанавливает условия достижимости верхней и нижней границ урезанной цены в задаче об оптимальной остановке.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $\overline{\tau} \leqslant \tau^{\mathsf{Q}} \leqslant \underline{\tau}$ Q–п.н.

Замечание 7. Неравенство из теоремы 5 устанавливает верхнюю и нижнюю границы урезанной цены остановки для задачи (1).

Обозначим:

$$\overline{\theta}_n \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \left(\underline{\theta}_n \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right], \theta_n^{\mathsf{Q}} \triangleq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[v_{n+1}^{\mathsf{Q}}|\mathcal{F}_n\right]\right), n \in N_0.$$

Определение 3. Оптимальный момент остановки $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ $\left(\underline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N\right)$ назовем $\mathfrak{R}_N$-инвариантным, если относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ для любого $n \leqslant \overline{\tau}$ $(n \leqslant \underline{\tau})$ выполняется неравенство $\overline{\theta}_n \geqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{\theta}_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_n\right]$ $\left(\underline{\theta}_n \leqslant \leqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{\theta}_{\underline{\tau}}|\mathcal{F}_n\right]\right)$ Q–п.н.

Замечание 8. Как следует из утверждений теорем 3 и 4, выполнение неравенств из определения $\mathfrak{R}_N$-инвариантного момента остановки относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ означает, что этот момент остановки $\overline{\tau}$ $(\underline{\tau})$ является оптимальным в задаче (2) (в задаче (3)) для любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$. Таким образом, $\mathfrak{R}_N$-инвариантный момент остановки остается оптимальным при любом выборе вероятностной меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$.

Теорема 6. Моменты остановки $\overline{\tau}$ и $\underline{\tau}$ являются $\mathfrak{R}_N$-инвариантными.

5. Примеры

5.1. Пример 1

Пусть: 1) одномерные случайные величины $\{S_n\}_{n\in N_0}$: $S_{n+1} = S_n + \rho_{n+1}$, где $\{\rho_n\}_{n\in N_0}$ – дискретные случайные величины, принимающие значения $-\infty < a_1 < 0 < a_2 < a_3 < \infty$ с вероятностями $q_i = \mathsf{Q}(\rho_n = a_i) > 0$, $i \in \{1,2,3\}$, $n \in N_0$, соответственно; 2) для любого $n \in N_0$ выигрыш $f_n \triangleq f(x)\Big|_{x=S_n}$, где $f(x)$ – строго возрастающая борелевская функция, определенная на $\mathbb{R}$.

Из утверждения теоремы 2 следует, что величины $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (4). Покажем, что в условиях примера для любого $n \in N_0$ верхняя урезанная цена $\overline{v}_n = f\left(S_n + a_3(N-n)\right)$. Будем доказывать методом индукции “назад”. Для шага N справедливость утверждения очевидна. Пусть для некоторого $n+1 \in N_0$ верно, что $\overline{v}_{n+1} = = f(S_{n+1} + a_3(N-n-1))$. Обозначим $R \triangleq \{\vec{q} = (q_1,q_2,q_3) : q_1+q_2+q_3 = 1,$ $q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 > 0t\}$. В соответствии с (4) и с учетом предположений 1–2 и индукции имеем $\overline{v}_n = \max\left\{f(S_n); \sup\limits_{\vec{q}\in R} \sum_{i=1}^3 q_i f\left(S_n + a_i + a_3(N-n-1)\right)\right\} = = \max\{f(S_n); f\left(S_n + a_3 + a_3(N-n-1)\right)\} = f\left(S_n + a_3(N-n)\right)$. Основной шаг индукции пройден. Отсюда, в силу строгого возрастания функции $f(x)$ немедленно следует, что $\overline{\tau} = N$.

Рассуждая аналогично, легко показать, что для любого $n \in N_0$ нижняя урезанная цена $\underline{v}_n = f\left(S_n\right)$, а $\underline{\tau} = 0$.

5.2. Пример 2

Пусть: 1) одномерные случайные величины $\{S_n\}_{n\in N_0}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $S_{n+1} = S_n(1+\rho_{n+1})$, где $\{\rho_n\}_{n\in N_0}$ – дискретные случайные величины, принимающие значения $-1 < a_1 < a_2 = 0 < a_3 < \infty$ с вероятностями $q_i = \mathsf{Q}(\rho_n = a_i) > 0$, $i \in \{1,2,3\}$, $n \in N_0$, соответственно; 2) $\mathfrak{M}_N \subseteq \mathfrak{R}_N$ – множество вероятностных мер таких, что для любого $n \in N_0$ математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\rho_n = 0$; 3) для любого $n \in N_0$ выигрыш $f_n \triangleq f(x)\big|_{x=S_n}$, где $f(x)$ – строго выпуклая борелевская функция, определенная на $\mathbb{R}^+$.

Задачи типа (1)–(3), в которых вместо множества эквивалентных вероятностных мер $\mathfrak{R}_N$ используется множество $\mathfrak{M}_N$, имеют широкое применение в финансовой математике [4, 6]. Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 2, можно показать, что в этом случае верхние границы остановки также удовлетворяют уравнению беллмановского типа, аналогичному (4).

Покажем, что для любого $n \in N_0$ верхняя граница остановки

$$\overline{v}_n\left(S_n\right) = \sum_{i=0}^{N-n} f\left(S_n(1+a_1)^i(1+a_3)^{N-n-i}\right)\left(p_1^*\right)^i\left(1-p_1^*\right)^{N-n-i},$$

где $p_1^* \triangleq a_3/(|a_1|+a_3)$. Будем доказывать методом индукции “назад”. Для шага N справедливость утверждения очевидна. Пусть для некоторого $n+1 \in N_0$ утверждение индукции верно. Это означает также, что $\overline{v}_{n+1}$ – выпуклая по S_{n+1} функция. Обозначим $M \triangleq \{\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) : a_1q_1 + a_3q_3 = 0, q_1+q_2+q_3 = 1, q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 > 0\}$. Легко показать, что $M = \{\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) : q_1 = p_1^*(1-q_2), q_3 = (1-p_1^*)(1-q_2), q_2 \in (0,1)\}$. С учетом сделанных предположений и замечаний имеем

$$\overline{v}_n = \max\left[f(S_n);\ \sup_{\vec{q}\in M}\sum_{i=1}^{3} q_i\overline{v}_{n+1}\left(S_n(1+a_i)\right)\right] =$$

$$= \max\left[f(S_n);\ \sup_{q_2\in(0,1)}\left[p_1^*(1-q_2)\overline{v}_{n+1}\left(S_n(1+a_1)\right) + q_2\overline{v}_{n+1}\left(S_n\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1-p_1^*)(1-q_2)\overline{v}_{n+1}\left(S_n(1+a_3)\right)\right]\right] =$$

$$= \max\left[f(S_n); \max\left[\overline{v}_{n+1}(S_n); p_1^*\overline{v}_{n+1}(S_n(1+a_1)) + (1-p_1^*)\overline{v}_{n+1}(S_n(1+a_3))\right]\right] =$$

$$= \max\left[f(S_n); p_1^*\overline{v}_{n+1}\left(S_n(1+a_1)\right) + (1-p_1^*)\overline{v}_{n+1}\left(S_n(1+a_3)\right)\right] =$$

$$= \max\left[f(S_n);\ \sum_{i=0}^{N-n} f\left(S_n(1+a_1)^i(1+a_3)^{N-n-i}\right)\left(p_1^*\right)^i\left(1-p_1^*\right)^{N-n-i}\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-n} f\left(S_n(1+a_1)^i(1+a_3)^{N-n-i}\right)\left(p_1^*\right)^i\left(1-p_1^*\right)^{N-n-i}.$$

Последнее равенство следует из строгой выпуклости $f(x)$. Утверждение индукции доказано. Отсюда $\overline{\tau} = N$.

Замечание 9. Если в примере 2 функция $f(x)$ нестрого выпукла (имеет линейные участки), то для некоторых значений $n \in N_0$ множество

$$D_n \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = \sum_{i=0}^{N-n} f\left(x(1+a_1)^i(1+a_3)^{N-n-i}\right)\left(p_1^*\right)^i\left(1-p_1^*\right)^{N-n-i}\right\} \neq \varnothing.$$

Из теоремы 3 следует, что в этом случае $\overline{\tau} = \min\{n \in N_0 : S_n \in D_n\}$. Множества $\{D_n\}_{n\in N_0}$ называют множествами остановки, а дополнительные к ним — множествами продолжения наблюдения [7]. Например, если $f(x) = (x - K)^+$, где K – заданная константа (соответствует функции выигрыша в задаче расчета американского опциона колл [4]), то в ситуации примера 2 для любого $n \in N_0$ множество остановки имеет вид

$$D_n = \big(0, K/(1 + a_3)^{N-n}\big] \cup \big[K/(1 + a_1)^{N-n}, \infty\big).$$

5.3. Пример 3

Пусть выполнены условия и предположения примера 2 с тем лишь исключением, что $-1 < a_1 < 0 < a_2 < a_3 < \infty$. Проводя выкладки, аналогичные тем, что были сделаны для примера 2, легко установить, что для любого $n \in N_0$ нижняя урезанная цена $\underline{v}_n\,(S_n) = \max\big\{f\,(S_n)\,,\ \min_{i\in\{1,2,3\}} f\,(S_n(1 + a_i))\big\}$, $\underline{v}_N = f_N$. Заметим, что $0 < 1 + a_1 < 1 < 1 + a_2 < 1 + a_3$, т.е. преобразование $x \to x(1 + a_i)$, $i \in \{2, 3\}$, является преобразованием масштаба. Поэтому в силу условий имеем неравенство $f\,(S_n(1 + a_1)) < f(S_n) < f\,(S_n(1 + a_2)) <$ $< f(S_n(1 + a_3))$. Следовательно, $\underline{v}_n(S_n) = \max\{f(S_n), f(S_n(1 + a_1))\} = f(S_n)$. Поэтому для любого $n \in N_0$ имеем $\underline{v}_n\,(S_n) = f\,(S_n)$, а $\underline{\tau} = 0$.

6. Заключение

В статье решена проблема нахождения границ урезанной цены в задаче об оптимальной остановке. Получены следующие важные результаты, справедливые почти всюду относительно любой эквивалентной вероятностной меры:

а) для верхней (нижней) границы урезанной цены остановки:

1) рекуррентное соотношение беллмановского типа в обратном времени;

2) некоторые важные неравенства;

б) для оптимальных моментов остановки:

1) критерии оптимальности;

2) соотношения для оптимальных моментов остановки стандартной и экстремальных задач об оптимальной остановке;

3) свойство инвариантности.

Приведено несколько примеров явного решения задач об оптимальной остановке.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из определения величины $\overline{v}_n$ $(\underline{v}_n)$ следует неравенство

$$|\overline{v}_n| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[|f_\tau|\,|\mathcal{F}_n\right] \quad \left(|\underline{v}_n| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[|f_\tau|\,|\mathcal{F}_n\right]\right) \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Одновременно для любого $\tau \in \mathcal{T}_0^N$ верно, что $|f_\tau| = \sum_{i=n}^N |f_i| 1_{\{\tau=i\}} \leqslant c$ Q–п.н. В совокупности эти неравенства дают утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 опирается на вспомогательное утверждение леммы П.1.

Лемма П.1. Пусть Θ_N – любая $\mathcal{F}_N$-измеримая ограниченная случайная величина и число $s \geqslant 0$ такое, что $n+s \in N_0$. Тогда имеет место равенство Q–п.н.

$$\text{(П.1)}\qquad \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right]$$

$$\text{(П.2)}\qquad \left(\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right]\right).$$

Замечание П.1. Утверждение леммы П.1 для случая, когда существенная верхняя (нижняя) грань берется по множеству эквивалентных мартингальных мер, было установлено в ряде публикаций, например, в [6].

Доказательство леммы П.1. Сначала докажем неравенство Q–п.н.

$$\text{(П.3)}\qquad \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right].$$

Из телескопического свойства условного математического ожидания [19] следует, что для любой вероятностной меры $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$ имеет место равенство $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right]$. Отсюда и из определения существенной верхней грани следует, что для любой меры $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$ справедливо неравенство Q–п.н.

$$\text{(П.4)}\qquad \begin{aligned} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] &\leqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right] \leqslant \\ &\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right]. \end{aligned}$$

Правая часть (П.4) не зависит от $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$, поэтому из (П.4) следует (П.3).

Установим теперь неравенство Q–п.н.

$$\text{(П.5)}\qquad \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right].$$

Для этого необходимо ввести ряд новых объектов. Пусть $\mathsf{Q}, \mathsf{P}\in\mathfrak{R}_N$. Обозначим производные Родона–Никодима [4]: $z_N \triangleq \frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}$, $z_n \triangleq \frac{d\mathsf{Q}_n}{d\mathsf{P}_n}$, где $\mathsf{Q}_n = \mathsf{Q}|_{\mathcal{F}_n}$, $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}|_{\mathcal{F}_n}$. Положим $z_0 = 1$. Поскольку меры Q и P эквивалентны, то для любого $n \in N_0$ верно, что $z_n > 0$ $\mathsf{Q}\,(\mathsf{P})$–п.н. Обозначим через Z_n^N множество положительных мартингалов $\{\bar{z}_k^n\}_{n\leqslant k\leqslant N}$, т.е. $0 < \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\bar{z}_{k+1}^n|\mathcal{F}_k\right] = \bar{z}_k^n$ P–п.н. таких, что $\bar{z}_0^n = \bar{z}_1^n = \ldots = \bar{z}_n^n = 1$. Очевидно, что для любого $n \in N_0$:

1) $Z_n^N \subset Z_{n-1}^N$;

2) $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\Theta_N \bar{z}_n^N|\mathcal{F}_n\right]$ P–п.н.

В силу свойств существенной верхней грани, теоремы Гирсанова и того факта, что $Z_{n+s}^N \subset Z_n^N$, имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] = \operatorname*{ess\,sup}_{z_n^N\in Z_n^N} \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[z_n^N\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{z_n^N\in Z_n^N} \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[z_n^{n+s}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left(z_{n+s}^N\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right] \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{z_{n+s}^N\in Z_{n+s}^N} \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[z_n^{n+s}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left(z_{n+s}^N\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right] \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Отсюда в силу свойств существенной верхней грани получаем, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\Theta_N|\mathcal{F}_n\right] \geqslant \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[z_n^{n+s}\operatorname*{ess\,sup}_{z_{n+s}^N\in Z_{n+s}^N} \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left(z_{n+s}^N\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right] =$$

$$= \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[z_n^{n+s}\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right] =$$

$$= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\Theta_N|\mathcal{F}_{n+s}\right)|\mathcal{F}_n\right] \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Учитывая, что левая часть последнего неравенства не зависит от $\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N$, получаем (П.5).

Неравенства (П.3) и (П.5) в совокупности дают (П.1). Аналогично устанавливается неравенство (П.2). Лемма П.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

1. Вывод рекуррентного соотношения (4). Сначала заметим, что из определений величин $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ и f_τ и в силу телескопического свойства условного математического ожидания и леммы П.1 для любого $n\in N_0$ имеем равенства Q–п.н.

$$\overline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N,\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_n\right] =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N,\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \left\{f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\sum_{i=n+1}^N f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_n\right]\right\} = \tag{П.6}$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \left\{f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\sum_{i=n+1}^N f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_n\right]\right\}.$$

Теперь установим, что для любого $n\in N_0$ справедливы неравенства Q–п.н.

$$\overline{v}_n \geqslant \max\left\{f_n, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\}. \tag{П.7}$$

Из включения $\mathcal{T}_n^N \supseteq \mathcal{T}_{n+1}^N$ и равенства (П.6) получаем неравенство

$$\overline{v}_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N} \Bigg\{ f_n 1_{\{\tau=n\}} + $$
$$+ 1_{\{\tau>n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left(\sum_{i=n+1}^N f_i 1_{\{\tau=i\}} | \mathcal{F}_{n+1} \right) | \mathcal{F}_n \right] \Bigg\} \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Согласно лемме П.1, учитывая свойства существенной верхней грани, последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\overline{v}_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N} \left\{ f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left(\sum_{i=n+1}^N f_i 1_{\{\tau=i\}} | \mathcal{F}_{n+1} \right) | \mathcal{F}_n \right] \right\} =$$
$$= f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N, \mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left(\sum_{i=n+1}^N f_i 1_{\{\tau=i\}} | \mathcal{F}_{n+1} \right) | \mathcal{F}_n \right] =$$
$$= f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right] \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Левая часть последнего неравенства не зависит ни от $\tau \in \mathcal{T}_n^N$, ни от $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$, поэтому из него очевидным образом следует (П.7).

Установим теперь, что для любого $n \in N_0$ справедливы неравенства Q–п.н.

$$\overline{v}_n \leqslant \max \left\{ f_n, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right] \right\}. \tag{П.8}$$

Из определения существенной верхней грани очевидным образом следуют соотношения

$$\overline{v}_n \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \left\{ f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left(f_\tau | \mathcal{F}_{n+1} \right) | \mathcal{F}_n \right] \right\} =$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \left\{ f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right] \right\} \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Отсюда вытекает (П.8).

Согласно определению верхней урезанной цены $\overline{v}_N = f_N$ Q–п.н. Это и неравенства (П.7), (П.8) дают (4).

2. Вывод формулы (5). Аналогично (П.6) можно получить равенство Q–п.н.

$$\underline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \left\{ f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\sum_{i=n+1}^N f_i 1_{\{\tau=i\}} | \mathcal{F}_n \right] \right\}. \tag{П.9}$$

Установим, что для любого $n \in N_0$ имеет место неравенство Q–п.н.

$$\text{(П.10)} \qquad \underline{v}_n \geqslant \max\left\{ f_n, \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\}.$$

Согласно определению существенной нижней грани для любых $n \in N_0$ и $\varepsilon > 0$ существует вероятностная мера $\mathsf{Q}^\varepsilon \in \mathfrak{R}_N$ такая, что Q–п.н.

$$\text{(П.11)} \qquad \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_n\right] \geqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_n\right] - \varepsilon.$$

Равенство (П.9) с учетом (П.11), телескопического свойства условного математического ожидания и свойств существенной верхней грани примет вид

$$\underline{v}_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N}\left\{ f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_n\right] - \varepsilon\right\} \geqslant$$

$$\geqslant f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left(\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right] - \varepsilon \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Усилим его Q–п.н.

$$\underline{v}_n \geqslant f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right] - \varepsilon =$$

$$\text{(П.12)} \qquad = f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] - \varepsilon.$$

Число $\varepsilon > 0$ – любое, поэтому

$$\underline{v}_n \geqslant f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Левая часть этого неравенства не зависит от τ. Отсюда вытекает (П.10).

Докажем теперь неравенство Q–п.н.

$$\text{(П.13)} \qquad \underline{v}_n \leqslant \max\left\{ f_n, \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\}.$$

Из равенства (П.9) в силу телескопического свойства условного математического ожидания, леммы П.1 и свойств существенной верхней грани имеем неравенство

$$\underline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N}\left\{f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_n\right]\right\} =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N}\left\{f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N}\left\{f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}|\mathcal{F}_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right]\right\} =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N}\left\{f_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\} =$$

$$= \max\left\{f_n, \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\} \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Таким образом, неравенство (П.13) установлено.

Очевидно, что $\underline{v}_N = f_N$ Q–п.н. и из (П.10) и (П.13) имеем (5). Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Неравенства (7) и (8) следуют из доказательства теоремы 2, а неравенства (9) устанавливаются методом индукции назад с учетом свойств существенной верхней грани. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2.

1. Формулу (4) перепишем в виде Q–п.н.

$$\begin{aligned}\overline{v}_n = {} & f_n 1_{\left\{f_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right\}} + \\ & + \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] 1_{\left\{f_n < \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right\}}.\end{aligned} \tag{П.14}$$

Поскольку на множестве $\overline{C} \triangleq \left\{\omega\in\Omega : f_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right\}$ имеем $f_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]$, то из (П.14) следуют соотношения

$$\overline{v}_n \geqslant f_n 1_{\left\{f_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right\}} + f_n 1_{\left\{f_n < \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right\}} = f_n \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Установили, что $\overline{v}_n \geqslant f_n$ Q–п.н.

2. Аналогично устанавливаются неравенство $\underline{v}_n \geqslant f_n$ Q–п.н. и п. 2 следствия 2.

3. Из неравенств п. 1 следствия 2 и равенства (П.14) получаем неравенство

$$\overline{v}_n \leqslant \overline{v}_n 1_{\left\{f_n \geqslant \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right\}} + \\ + \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] 1_{\left\{f_n < \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right\}} \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.},$$

которое можно переписать в виде

$$0 \leqslant \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] - \overline{v}_n\right) 1_{\left\{f_n < \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right\}} \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Отсюда немедленно следует неравенство (10) для случайных величин $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$. Аналогично устанавливается (10) для $\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}$. Утверждение следствия 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Из теоремы 1 следует ограниченность математического ожидания случайных величин $\{|\overline{v}_n|\}_{n\in N_0}$ и $\{|\underline{v}_n - n\varepsilon|\}_{n\in N_0}$. Поэтому из неравенства (11) следует, что $(\overline{v}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ является $\mathfrak{R}_N$-супермартингалом. Если в (П.12) в качестве произвольной константы взять $n\varepsilon > 0$, то очевидно, что $(\underline{v}_n - n\varepsilon, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ – $\mathfrak{R}_N$-супермартингал. Утверждение следствия 3 доказано.

Доказательство теоремы 3 опирается на вспомогательное утверждение леммы П.2 – критерий оптимальности моментов остановки задач (2) и (3).

Лемма П.2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Момент остановки $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ $\left(\underline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N\right)$ *оптимален в задаче* (2) (*в задаче* (3)) *тогда и только тогда, когда справедливо одно из утверждений:*

1) *для любого* $\tau \in \mathcal{T}_0^N$ *справедливо неравенство* Q*–п.н.*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_0\right] \leqslant \\ \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_0\right] \left(\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_0\right] \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\underline{\tau}}|\mathcal{F}_0\right]\right); \tag{П.15}$$

2) *величины* $\{\overline{v}_n\}_{n\in N_0}$ $(\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0})$ *удовлетворяют равенствам* Q*–п.н.*

$$\overline{v}_n = f_n 1_{\{\overline{\tau}=n\}} + 1_{\{\overline{\tau}>n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right], \quad \overline{v}_N = f_N \tag{П.16}$$

$$\left(\underline{v}_n = f_n 1_{\{\underline{\tau}=n\}} + 1_{\{\underline{\tau}>n\}} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right], \quad \underline{v}_N = f_N\right), \tag{П.17}$$

решение которых является $\mathfrak{R}_N$*-супермартингалом* ($\mathfrak{R}_N$*-субмартингалом*) *и допускает представление* Q*–п.н.*

$$\overline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\overline{\tau}\wedge N}|\mathcal{F}_n\right] \qquad \left(\underline{v}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\underline{\tau}\wedge N}|\mathcal{F}_n\right]\right). \tag{П.18}$$

Доказательство леммы П.2.

1. Установим справедливость первого утверждения леммы П.2.

а. Необходимость. Пусть момент остановки $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ оптимален в задаче (2). Тогда из определения оптимального момента остановки имеем

$$\overline{v}_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[f_\tau | \mathcal{F}_0 \right] = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[f_{\overline{\tau}} | \mathcal{F}_0 \right] \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Отсюда и из определения существенной верхней грани следует неравенство (П.15).

б. Достаточность. Пусть справедливы неравенства (П.15). Установим, что момент остановки $\overline{\tau}$ является оптимальным. Из определения случайной величины $\overline{v}_0$ следуют соотношения

$$\overline{v}_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[f_{\overline{\tau}} | \mathcal{F}_0 \right] \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[f_\tau | \mathcal{F}_0 \right] = \overline{v}_0 \quad \mathsf{Q}\text{–п.н.}$$

Следовательно, момент остановки $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ оптимален в задаче (2).

2. Доказательство справедливости второго утверждения леммы П.2.

а. Необходимость. Пусть $n \in N_0$ и $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_n^N$ – оптимальный момент остановки. Тогда из определения $\overline{v}_n$, свойств $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_n^N$ и существенной верхней грани имеем равенства Q–п.н.

$$\begin{aligned} \overline{v}_n &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\sum_{i=n}^{N} f_i 1_{\{\overline{\tau}=i\}} | \mathcal{F}_n \right] = \\ &= f_n 1_{\{\overline{\tau}=n\}} + 1_{\{\overline{\tau}>n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\overline{\tau}=i\}} | \mathcal{F}_n \right]. \end{aligned} \tag{П.19}$$

Заметим также, что в силу леммы П.1 и условий леммы П.2 имеем Q–п.н.

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\overline{\tau}=i\}} | \mathcal{F}_n \right] = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\overline{\tau}=i\}} | \mathcal{F}_{n+1} \right] | \mathcal{F}_n \right] = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\sum_{i=n+1}^{N} f_i 1_{\{\overline{\tau}=i\}} | \mathcal{F}_{n+1} \right] | \mathcal{F}_n \right] = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \left[\overline{v}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right]. \end{aligned} \tag{П.20}$$

Соотношения (П.19)–(П.20) дают равенства (П.16).

б. Достаточность. Проведя в (П.20) выкладки в обратном порядке, получим (П.16), (П.18).

Из соотношений (П.18) и определения существенной верхней грани следует, что $(\overline{v}_n, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ является $\mathfrak{R}_N$-супермартингалом. Аналогично доказываются утверждения леммы П.2 для момента остановки $\underline{\tau}$. Лемма П.2 доказана.

Замечание П.2.

1. Аналогично тому как это сделано в доказательстве леммы П.2, легко установить, что в задаче (1) момент остановки $\tau^{\mathsf{Q}} \in \mathcal{T}_0^N$ оптимален тогда и только тогда, когда для любого $\tau \in \mathcal{T}_0^N$ справедливо неравенство $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_\tau|\mathcal{F}_0\right] \leqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\tau^{\mathsf{Q}}}|\mathcal{F}_0\right]$ Q–п.н.

2. Пусть $\tau^{\mathsf{Q}} \in \mathcal{T}_0^N$ – оптимальный момент остановки в задаче (1), а $\left\{v_n^{\mathsf{Q}}\right\}_{n\in N_0}$ – урезанные цены в этой задаче. Тогда аналогично доказательству леммы П.2 легко установить, что $\left\{v_n^{\mathsf{Q}}\right\}_{n\in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $v_n^{\mathsf{Q}} = f_n 1_{\{\tau^{\mathsf{Q}}=n\}} + 1_{\{\tau^{\mathsf{Q}}>n\}}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[v_{n+1}^{\mathsf{Q}}|\mathcal{F}_n\right]$, $v_N^{\mathsf{Q}} = f_N$ Q–п.н.

Доказательство теоремы 3.

1. Необходимость. Пусть момент остановки $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ оптимален в задаче (2). Докажем (12). Заметим, что в этом случае $\overline{v}_{\overline{\tau}} = f_{\overline{\tau}}$ Q–п.н. Действительно, умножим правую и левую части (П.16) на индикатор $1_{\{\overline{\tau}=i\}}$, а затем просуммируем по $i \in N_0$. Имеем $\sum\limits_{i=0}^{N}\left(\overline{v}_i - f_i\right)1_{\{\overline{\tau}=i\}} = \overline{v}_{\overline{\tau}} - f_{\overline{\tau}} = 0$ Q–п.н. Аналогично из п. 1 следствия 2 вытекает, что для любого $n \in N_0$ справедливо $\overline{v}_n - f_n \geqslant 0$ Q–п.н. и, следовательно, $\overline{v}_\tau \geqslant f_\tau$ Q–п.н. Отсюда и из определения существенной нижней грани следует $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{\tau\in\mathcal{T}_0^N}\sum\limits_{i=0}^{N}\left(\overline{v}_i - f_i\right)1_{\{\tau=i\}} = 0$ Q–п.н. С учетом того, что для любых $\tau \in \mathcal{T}_0^N$ и $n \in N_0$: $1_{\{\tau=i\}} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=0}^{N}1_{\{\tau=i\}} = 1$ Q–п.н., из последнего равенства следует существование $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ такого, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N}\sum_{i=0}^{N}\left(\overline{v}_i - f_i\right)1_{\{\tau=i\}} = \sum_{i=0}^{N}\left(\overline{v}_i - f_i\right)1_{\{\overline{\tau}=i\}} = \overline{v}_{\overline{\tau}} - f_{\overline{\tau}} = 0.$$

В силу последнего равенства с учетом дискретности случайной величины $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ и свойств функций полезности $\{f_n\}_{n\in N_0}$ (см., например, [6]) имеем представление (12). Аналогично доказывается (12) для $\underline{\tau}$ в задаче (3).

2. Достаточность.

а. Пусть момент остановки $\tau^* \in \mathcal{T}_0^N$ допускает представление (12). Покажем, что τ^* – оптимальный в задаче (2). В силу п. 1 леммы П.2. достаточно показать, что относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ для любого $\tau \in \mathcal{T}_0^N$, $\tau \geqslant \tau^*$ Q–п.н., справедливо неравенство (П.15). Из утверждения следствия 3 вытекает, что $\left(\overline{v}_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\in N_0}$ — $\mathfrak{R}_N$-супермартингал, поэтому допускает опциональное разложение (см. [6, 14]): $\overline{v}_\tau = \overline{v}_0 + \overline{M}_\tau - \overline{A}_\tau$, $\overline{v}_{\tau^*} = \overline{v}_0 + \overline{M}_{\tau^*} - \overline{A}_{\tau^*}$ Q–п.н. Отсюда $\overline{v}_\tau = \overline{v}_{\tau^*} + \overline{M}_\tau - \overline{M}_{\tau^*} - \left(\overline{A}_\tau - \overline{A}_{\tau^*}\right)$ Q–п.н., где $\left(\overline{M}_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\in N_0}$ – мартингал относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$, а $\left(\overline{A}_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\in N_0}$ не убывает. Возьмем условное математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\cdot|\mathcal{F}_0\right]$ от обеих частей последнего равенства. В результате имеем $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_\tau|\mathcal{F}_0\right] \leqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{v}_{\tau^*}|\mathcal{F}_0\right]$ Q–п.н. По условиям $\overline{v}_{\tau^*} = f_{\tau^*}$, а в силу следствия 2 для любого $\tau \in \mathcal{T}_0^N$: $\overline{v}_\tau \geqslant f_\tau$. Отсюда получаем (П.15). Значит, τ^* — оптимальный в задаче (2).

б. Покажем, что момент остановки $\tau_* \in \mathcal{T}_0^N$, допускающий представление (12), является оптимальным в задаче (3). Пусть $\tau \in \mathcal{T}_0^N$ — любой,

$\tau \geqslant \tau_*$ Q–п.н., а $\{\underline{v}_n\}_{n\in N_0}$ удовлетворяет (5). Из п. 2 следствия 3 вытекает, что для любых $n \in N_0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\mathsf{Q}^\varepsilon \in \mathfrak{R}_N$ такая, что $\underline{v}_n - n\varepsilon \geqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\underline{v}_{n+1} - (n+1)\varepsilon|\mathcal{F}_n\right]$ Q^ε–п.н., т.е. $(\underline{v}_n - n\varepsilon, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ – супермартингал относительно $\mathsf{Q}^\varepsilon \in \mathfrak{R}_N$ и, следовательно, допускает опциональное разложение $\underline{v}_n - n\varepsilon = \underline{v}_0 + \underline{M}_n - \underline{A}_n$ Q^ε–п.н., где $(\underline{M}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ — $\mathfrak{R}_N$-мартингал, а $(\underline{A}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ — неубывающая согласованная последовательность, причем $\underline{M}_0 = \underline{A}_0 = 0$ (см. [6, 14]). Поэтому случайные величины $\underline{v}_\tau$ и $\underline{v}_{\tau_*}$ допускают представление $\underline{v}_\tau - \tau\varepsilon = \underline{v}_0 + \underline{M}_\tau - \underline{A}_\tau$, $\underline{v}_{\tau_*} - \tau_*\varepsilon = \underline{v}_0 + \underline{M}_{\tau_*} - \underline{A}_{\tau_*}$ Q^ε–п.н. Рассмотрим разность между двумя последними равенствами и возьмем от левой и правой частей полученного равенства условное математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}[\cdot|\mathcal{F}_{\tau_*}]$. В силу того, что $(\underline{A}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ не убывает, имеем

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\underline{v}_\tau|\mathcal{F}_{\tau_*}\right] = \underline{v}_{\tau_*} + \varepsilon\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\tau - \tau_*|\mathcal{F}_{\tau_*}\right] - \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\underline{A}_\tau - \underline{A}_{\tau_*}|\mathcal{F}_{\tau_*}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \underline{v}_{\tau_*} + \varepsilon\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\tau - \tau_*|\mathcal{F}_{\tau_*}\right] \quad \mathsf{Q}^\varepsilon\text{–п.н.}$$

Из последнего неравенства в силу определения существенной нижней грани, конечности марковских моментов τ и τ_* и произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^\varepsilon}\left[\underline{v}_\tau|\mathcal{F}_{\tau_*}\right] \leqslant \underline{v}_{\tau_*}$ Q^ε–п.н. Отсюда в силу леммы П.1 имеем неравенство $\operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_\tau|\mathcal{F}_0\right] \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\underline{v}_{\tau_*}|\mathcal{F}_0\right]$ Q–п.н. Из (12) следует, что $\underline{v}_{\tau_*} = f_{\tau_*}$ Q–п.н. Одновременно согласно п. 1 следствия 2 имеем $\underline{v}_{\tau_*} \geqslant f_{\tau_*}$ Q–п.н. По совокупности приведенных соотношений и п. 1 леммы П.2 получаем, что τ_* оптимален в задаче (3). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 следует из п. 2 леммы П.2.

Доказательство теоремы 5. Пусть $\overline{\tau}$ и $\tau^{\mathsf{Q}} \in \mathcal{T}_0^N$ – оптимальные моменты остановки для задач (2) и (1) соответственно. Докажем, что $\tau^{\mathsf{Q}} \leqslant \overline{\tau}$ Q–п.н. Из утверждения теоремы 3, леммы П.2 и определения величин $\left\{\overline{\theta}_n\right\}_{n\in N_0}$ $\left(\left\{\theta_n^{\mathsf{Q}}\right\}_{n\in N_0}\right)$ следует, что момент остановки $\overline{\tau}$ $\left(\tau^{\mathsf{Q}}\right)$ является оптимальным в задаче (2) (в задаче (1)) тогда и только тогда, когда одновременно справедливы утверждения Q–п.н.: 1) $\overline{v}_{\overline{\tau}} = f_{\overline{\tau}} \geqslant \overline{\theta}_{\overline{\tau}}$ $\left(v_{\tau^{\mathsf{Q}}} = f_{\tau^{\mathsf{Q}}} \geqslant \theta^{\mathsf{Q}}_{\tau^{\mathsf{Q}}}\right)$; 2) для любого $n \in N_0$: $1_{\{n<\overline{\tau}\}}\overline{v}_n = 1_{\{n<\overline{\tau}\}}\overline{\theta}_n > 1_{\{n<\overline{\tau}\}}f_n$ $\left(1_{\{n<\tau^{\mathsf{Q}}\}}v_n^{\mathsf{Q}} = 1_{\{n<\tau^{\mathsf{Q}}\}}\theta_n^{\mathsf{Q}} > 1_{\{n<\tau^{\mathsf{Q}}\}}f_n\right)$. Кроме того, по определению $\overline{\theta}_n \geqslant \theta_n^{\mathsf{Q}}$ Q–п.н.

Рассмотрим событие $\{\omega \in \Omega : \overline{\tau} = n\}$, $n \in N_0$. Из изложенного следует, что $1_{\{\overline{\tau}=n\}}\overline{v}_n = 1_{\{\overline{\tau}=n\}}f_n \geqslant 1_{\{\overline{\tau}=n\}}\overline{\theta}_n \geqslant 1_{\{\overline{\tau}=n\}}\theta_n^{\mathsf{Q}}$. Следовательно, для любого $\omega \in \{\omega \in \Omega : \overline{\tau} = n\}$ (за исключением, быть может, множества меры нуль) возможны альтернативы: а) $1_{\{n<\overline{\tau}\}}(\omega)v_n^{\mathsf{Q}}(\omega) > 1_{\{n<\overline{\tau}\}}(\omega)f_n(\omega)$ и $\overline{\tau}(\omega) = \tau^{\mathsf{Q}}(\omega)$; б) существует $k < n$ такое, что $v_k^{\mathsf{Q}}(\omega) = f_k(\omega)$ и $\overline{\tau}(\omega) > \tau^{\mathsf{Q}}(\omega)$. Поскольку приведенные рассуждения справедливы для любого $n \in N_0$, доказано, что $\overline{\tau} \geqslant \tau^{\mathsf{Q}}$ Q–п.н. Аналогично устанавливается неравенство $\tau^{\mathsf{Q}} \geqslant \underline{\tau}$ Q–п.н. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Из утверждения леммы П.2 следует, что момент остановки $\overline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N$ $\left(\underline{\tau} \in \mathcal{T}_0^N\right)$ оптимален в задаче (2) (в задаче (3)) тогда и только тогда, когда для любого $n \leqslant \overline{\tau}$ ($n \leqslant \underline{\tau}$) имеет место равенство $\overline{v}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_n\right]$ $\left(\underline{v}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_{\underline{\tau}}|\mathcal{F}_n\right]\right)$. Поэтому из определений $\mathfrak{R}_N$-супермартингала ($\mathfrak{R}_N$-субмартингала) и существенной верхней грани следует, что последовательность $\left(1_{\{n\leqslant\overline{\tau}\}}\overline{\theta}_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\in N_0}$ (последовательность $\left(1_{\{n\leqslant\underline{\tau}\}}\underline{\theta}_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\in N_0}$) является $\mathfrak{R}_N$-супермартингалом ($\mathfrak{R}_N$-субмартингалом). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974.
2. *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. Киев: Наук. думка, 1977.
4. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998.
5. *Роббинс Г., Зигмунд Д., Чао И.* Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977.
6. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МНЦМО, 2008.
7. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
8. *Boyarchenko S.I., Levandorfkii S.Z.* Non-Gaussian Merton-Blach-Sholes Theory. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. V.9. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2002.
9. *Ferguson T.S.* Optimal Stopping and Applications. Unpublished manusctipt. 2000. (https://www.math.ucla.edu/∼tom/Stopping/Contents.html)
10. *Jönsson H., Kukush A.G., Silvestrov D.S.* Threshold Structure of Optimal Stopping Strategies for American Type Option. I // Theor. Probab. Math. Stat. Amer. Math. Society. 2005. V. 71. P. 93–103.
11. *Jönsson H., Kukush A.G., Silvestrov D.S.* Threshold Structure of Optimal Stopping Strategies for American Type Option. II // Theor. Probab. Math. Stat. Amer. Math. Society. 2006. V. 72. P. 47–58.
12. *Kukush A.G., Silvestrov D.S.* Optimal Pricing of American Type Options with Discrete Time // Theory Stochastic Processes. 2004. V. 10 (26). No. 1–2. P. 72–96.
13. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А., Ясонов Е.В.* Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом // Управление большими системами. 2014. Вып. 52. С. 6–22.
14. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // АиТ. 2015. № 9. С. 125–149.

    Khametov V.M., Shelemekh E.A. Superhedging of American Options on an Incomplete Market With Discrete Time and Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1616–1634.
15. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Экстремальные меры и хеджирование американских опционов // АиТ. 2016. № 6. С. 121–144.

    Khametov V.M., Shelemekh E.A. Extremal Measures and Hedging in American Options // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 1041–1059.

16. *Riedel F.* Optimal Stopping with Multiply Priors // Econometrica. 2009. V. 77. No. 3. P. 857–908.
17. *Bayraktar E., Yao S.* Optimal Stopping for Non-linear Expectations. Part I // Stoch. Proc. Appl. 2011. V. 121. No. 2. P. 185–211.
18. *Bayraktar E., Yao S.* Optimal Stopping for Non-linear Expectations. Part II // Stoch. Proc. Appl. 2011. V. 121. No. 2. P. 212–264.
19. *Ширяев А.Н.* Вероятность – 1. М.: МЦНМО, 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 29.06.2018

После доработки 21.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018