Автоматика и телемеханика, № 3, 2019

Линейные системы

© 2019 г. **Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com)**
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

О ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ, ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ[1]

Рассматривается решение задачи быстродействия для класса линейных дискретных систем с бесконечномерным вектором состояния и вырожденным оператором. Сформулированы и доказаны утверждения о свойствах выпуклых множеств. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи быстродействия для случая, когда нуль принадлежит границе множества достижимости. Условия оптимальности записаны как дискретный принцип максимума. Для внутренней точки доказан вырожденный характер принципа максимума. Разработан алгоритм решения задачи быстродействия для внутренней точки путем сведения ее к разрешенному случаю граничной точки. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейные бесконечномерные дискретные системы, задача быстродействия, выпуклые множества, дискретный принцип максимума, вырожденный оператор.

DOI: 10.1134/S0005231019030012

1. Введение

Исторически развитие теории оптимального управления начиналось с исследования систем с непрерывным временем. Среди основных подходов к решению можно выделить принцип максимума Понтрягина [1–3] и метод динамического программирования Беллмана [4]. Также существует подход, основанный на использовании множеств достижимости и управляемости [5–7]. На основе этих методов построено решение задачи быстродействия [1, 2, 8], которая в случае непрерывного времени не обладает специфическими особенностями, отличающими ее от прочих задач.

Основным препятствием при использовании аналогичных методов для систем с дискретным временем является их существенное отличие от непрерывных систем. Тогда как задача оптимального управления для непрерывного времени представляет собой задачу вариационного исчисления, в дискретном случае она является задачей нелинейного программирования большой размерности, что определяет принципиально другой набор средств ее решения, необходимых и достаточных условий оптимальности. В частности, известен

[1] Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки № 2.2461.2017/4.6.

основанный на методе множителей Лагранжа дискретный принцип максимума, который освящен в ряде публикаций [6, 9–12]. Тем не менее его применение для решения задачи быстродействия оказывается затруднительным: в методе множителей Лагранжа на оптимальном решении все множители могут одновременно обращаться в нуль, что приводит к нерегулярности экстремума. С другой стороны, дискретный характер критерия качества управления — минимального числа шагов, необходимого для достижения начала координат — приводит к отсутствию непрерывности функции Лагранжа. По этим причинам оказывается актуальным поиск альтернативных подходов к решению поставленной задачи.

На данный момент известно сравнительно небольшое количество публикаций, посвященных разработке методов решения и качественным исследованиям задачи быстродействия в дискретном времени [13–15]. Основным недостатком данных публикаций является узкий круг исследованных задач: рассматриваются системы размерности не больше трех, управление предполагается скалярным или принадлежащим некоторому многограннику.

Основная цель данной статьи — развитие и обобщение результатов [16]. Принципиальным ограничением методов, разработанных в [16], является невозможность их применения для систем с произвольным линейным и ограниченным оператором. Данный факт связан с тем, что полученное решение базируется на использовании класса множеств управляемости, конструктивное описание которых удается построить только в случае обратимого оператора системы. В данной статье предложен метод, позволяющий расширить класс рассматриваемых систем за счет использования в качестве аппарата решения поставленной задачи множества достижимости, которые представляют собой ограниченные множества для произвольного линейного и ограниченного оператора системы. Кроме того, класс множеств, из которых на каждом шаге выбирается управление, удается расширить до класса строго выпуклых ограниченных множеств, в то время как в [16] рассматривались исключительно строго выпуклые ограниченные множества, в каждой граничной точке которых нормальный конус представляет собой одномерное множество.

В результате по аналогии с [16] на основе методов выпуклого анализа [17, 18], связанных с линейными преобразованиями и сложением множеств по Минковскому, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности управления в случае, когда нуль является граничной точкой по отношению к множеству достижимости. Данный критерий удается представить в виде дискретного принципа максимума. Напротив, для внутренней точки продемонстрирован вырожденный характер принципа максимума, согласно которому в этом случае оказывается невозможно вычислить оптимальное управление. Тем не менее удается и для случая внутренней точки сформулировать достаточные условия оптимальности.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приведены постановка задачи и описание семейства множеств достижимости, сформулирован подход к решению задачи быстродействия. В разделе 3 рассмотрены свойства классов выпуклых множеств $\mathbb{U}_2$ и $\mathbb{U}_3$, на основе которых конструируются множества достижимости, и выполнены некоторые вспомогательные построения. В разделе 4 сформулирован и доказан критерий оптимальности в задаче быстродействия для произвольного начального состояния, разработан конструктивный метод построения оптимального управления, представленный в виде дискретного принципа максимума. Для случая внутренней точки продемонстрирован вырожденный характер принципа максимума, а также разработан альтернативный подход к построению оптимального по быстродействию управления. В разделе 5 опробована эффективность полученных результатов на примере различных систем управления.

2. Постановка задачи

Рассматривается бесконечномерная линейная система с дискретным временем и ограниченным множеством допустимых значений управления $(A, \mathcal{U})$:

$$
\begin{gathered}
x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\
x(0) = x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $x(k) \in \mathbb{L}$ — вектор состояния системы, $u(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{L}$ — управление, $\mathbb{L}$ — нормированное пространство, $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ — линейный ограниченный оператор. Предполагается, что множество допустимых значений управления $\mathcal{U}$ является выпуклым и слабо компактным, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$.

Для системы $(A, \mathcal{U})$ решается задача быстродействия, т.е. требуется вычислить минимальное число шагов $N_{\min}$, за которое возможно перевести систему из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{L}$ в начало координат и построить допустимый процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$. Такой процесс будем называть оптимальным.

Определим семейство множеств достижимости $\{\mathcal{Y}(x_0, N)\}_{N=0}^{\infty}$, где каждое $\mathcal{Y}(x_0, N)$ представляет собой множество состояний, в которые можно перевести систему $(A, \mathcal{U})$ за N шагов из начального состояния x_0 посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$
\mathcal{Y}(x_0, N) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{L}\colon \exists u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U}\colon x(N) = x\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{x_0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{2}
$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$
0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(x_0, N),
$$

т.е. задача быстродействия разрешима для заданного начального состояния.

С помощью класса множеств достижимости возможно вычислить оптимальное значение критерия задачи управления:

$$
N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon 0 \in \mathcal{Y}(x_0, N)\}. \tag{3}
$$

Обозначив для любых $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{L}$ через $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ сумму множеств по Минковскому, сформулируем в виде леммы 1 аналитическое представление множества достижимости за N шагов.

Лемма 1. Пусть система множеств $\{\mathcal{Y}(x_0, N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2). Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\mathcal{Y}(x_0, N) = \sum_{k=0}^{N-1} A^k \mathcal{U} + A^N x_0.$$

Доказательства леммы 1 и всех последующих утверждений приведены в Приложении.

Также класс множеств достижимости можно описать рекуррентными соотношениями.

Следствие 1. Пусть система множеств $\{\mathcal{Y}(x_0, N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2). Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\mathcal{Y}(x_0, N) = A\mathcal{Y}(x_0, N-1) + \mathcal{U}.$$

Лемма 2. Пусть система множеств $\{\mathcal{Y}(x_0, N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2) и для некоторого $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено включение

$$0 \in \mathcal{Y}(x_0, \tilde{N}).$$

Тогда для всех $N \geqslant \tilde{N}$ верно

$$0 \in \mathcal{Y}(x_0, N).$$

Замечание 1. Выбор в качестве аппарата решения рассматриваемой задачи быстродействия именно множеств достижимости вместо множеств 0-управляемости, которые использовались в [16, 19, 20], обусловлен сложностью построения множеств 0-управляемости в случае вырожденности оператора системы. Множества 0-управляемости, как показано в [5], представляют собой неограниченные цилиндры, аналитическое описание которых в общем случае оказывается затруднительным. При этом представление, аналогичное лемме 1, для таких множеств существует только в случае, когда оператор A обратим.

3. Дополнительные построения

Для решения задачи быстродействия наложим ограничения на класс множеств допустимых значений управления $\mathcal{U}$ и рассмотрим некоторые его свойства. Определим классы множеств $\mathbb{U}_2$ и $\mathbb{U}_3$ следующим образом:

$$\mathbb{U}_2 = \{\mathcal{U} \subset \mathbb{L} \colon \mathcal{U} \text{ — слабо компактное и строго выпуклое}, \quad 0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}\},$$
$$\mathbb{U}_3 = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{L} \colon \mathcal{X} \text{ — слабо компактное и выпуклое}, \quad 0 \in \mathcal{X}\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что множество допустимых значений управления $\mathcal{U}$ системы (1) является элементом класса $\mathbb{U}_2$:

$$\mathcal{U} \in \mathbb{U}_2.$$

Обозначим через $\mathbb{L}^*$ пространство, сопряженное к $\mathbb{L}$. Результат действия линейного и ограниченного функционала $p \in \mathbb{L}^*$ на вектор x обозначим через (p, x). Функционал $p \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$ называется опорным к множеству $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_3$ в точке $x \in \partial\mathcal{X}$, если

$$\mathcal{X} \subset \{\tilde{x} \in \mathbb{L} \colon (p, \tilde{x}) \leqslant (p, x)\}$$

или

$$(p, x) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, \tilde{x}).$$

Нормальным конусом $\mathcal{N}(x, \mathcal{X})$ множества $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_3$ в точке $x \in \partial\mathcal{X}$ называется множество всех функционалов, опорных к $\mathcal{X}$ в x:

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \left\{ p \in \mathbb{L} \setminus \{0\} \colon \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, \tilde{x}) = (p, x) \right\}.$$

Будем также полагать, что для произвольной внутренней точки $x \in \operatorname{int} \mathcal{X}$ нормальный конус представляет собой пустое множество:

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \emptyset.$$

З а м е ч а н и е 2. Согласно определению нормального конуса справедлив критерий принадлежности некоторой точки $x \in \mathcal{X}$ внутренности множества $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_3$: включение $x \in \operatorname{int} \mathcal{X}$ верно тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \emptyset$.

З а м е ч а н и е 3. Класс множеств $\mathbb{U}_2$ является расширением класса $\mathbb{U}_1$, из которого в [16] выбиралось множество $\mathcal{U}$, где

$$\mathbb{U}_1 = \Big\{ \mathcal{U} \subset \mathbb{L} \colon \mathcal{U} \text{ — слабо компактное и строго выпуклое}, \quad 0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}, \\ \forall u \in \partial\mathcal{U} \quad \dim \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = 1 \Big\}.$$

Также справедливы включения

$$\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_3.$$

Сформулируем основные свойства классов $\mathbb{U}_2$ и $\mathbb{U}_3$ в виде следующих лемм.

Л е м м а 3. Пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_2$. Тогда для любых различных $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ верно

$$\mathcal{N}(u^1, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(u^2, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Лемма 3 гарантирует для любого $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_2$ существование отображения $\rho_{\mathcal{U}} \colon \mathbb{L} \setminus \{0\} \to \partial\mathcal{U}$, определяемого соотношением

$$\rho_{\mathcal{U}}(p) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u).$$

Таким образом, произвольная граничная точка $u \in \partial\mathcal{U}$ может быть однозначно определена посредством элемента своего нормального конуса $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_3$, $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ — линейный и ограниченный оператор. Тогда для каждого $x \in \mathcal{X}$ верно включение

$$(\operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\}) \subset \mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}).$$

Лемма 5. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_3$, $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ — линейный и ограниченный оператор, $x \in \mathcal{X}$. Тогда

$$\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = (A^*)^{-1}(\mathcal{N}(x, \mathcal{X})) \cup (\operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\}).$$

Замечание 4. Поскольку в общем случае линейный и ограниченный оператор A не является биективным, то нельзя говорить о существовании обратного к нему оператора A^{-1}. Здесь и далее для произвольного $\mathcal{X} \subset \mathbb{L}$ с помощью $A^{-1}(\mathcal{X})$ будем обозначать полный прообраз множества $\mathcal{X}$:

$$A^{-1}(\mathcal{X}) = \{x \in \mathbb{L}\colon Ax \in \mathcal{X}\}.$$

Лемма 6. Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{U}_3$, $x^1 \in \mathcal{X}_1$, $x^2 \in \mathcal{X}_2$.

Тогда

$$\mathcal{N}\left(x^1 + x^2, \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2\right) = \mathcal{N}\left(x^1, \mathcal{X}_1\right) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}_2).$$

Следствие 2. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_3$, $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_2$.

Тогда для каждого $y \in \partial(\mathcal{X} + \mathcal{U})$ существует единственное разложение вида $y = x + u$, где $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$.

Леммы 4, 5, 6 и следствие 2 определяют вид нормальных конусов суммы двух множеств из класса $\mathbb{U}_3$, а также линейного преобразования элемента $\mathbb{U}_3$. Структура нормального конуса в результате линейного преобразования во многом определяется линейным и ограниченным оператором A, в частности его ядром и образом. Данный факт продемонстрируем на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим нормированное пространство $\mathbb{L} = l_r$, $r \in (1, +\infty)$ [21]. Согласно теореме Рисса каждый функционал $\tilde{p} \in l_r^*$ однозначно определяется вектором $p \in l_q$, где $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, в соответствии с соотношением:

$$(\tilde{p}, x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

В дальнейшем будем отождествлять функционал $\tilde{p} \in l_r^*$ и вектор $p \in l_q$, его порождающий. Также будем полагать, что оператор, сопряженный к линейному и ограниченному оператору $A\colon l_r \to l_r$, действует на пространстве l_q:

$$A^*\colon l_q \to l_q.$$

Рассмотрим два оператора

$$A_1\colon l_r \to l_r, \quad A_2\colon l_r \to l_r,$$
$$A_1 x = (0, x_1, x_2, \ldots),$$
$$A_2 x = (x_2, x_3, \ldots).$$

Тогда $A_1^* = \tilde{A}_2$, $A_2^* = \tilde{A}_1$, где операторы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ действуют в пространстве l_q аналогично A_1 и A_2 соответственно. Также верны равенства

$$\operatorname{Ker} A_1 = \{0\}, \quad \operatorname{Ker} A_2 = \operatorname{Lin}\{(1,0,0,\dots)\}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_R(x) \subset l_r$ шар радиуса $R > 0$ с центром в точке $x \in l_r$:

$$\mathcal{B}_R(x) = \{y \in l_r \colon \|y - x\| \leqslant R\}.$$

Верно включение $\mathcal{B}_R(x) \in \mathbb{U}_2$.

Построим в произвольной точке $x^0 \in \partial\mathcal{B}_R(0)$ нормальный конус $\mathcal{N}(x^0, \mathcal{B}_R(0))$. Рассмотрим отображение $\pi \colon l_r \to l_q$, действующее по правилу:

$$\pi(x) = \left(\operatorname{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \operatorname{sign}(x_2)|x_2|^{r-1}, \dots\right).$$

Тогда с учетом неравенства Гельдера справедливы соотношения

$$\max_{x \in \mathcal{B}_R(0)} \left(\pi(x^0), x\right) \leqslant \max_{x \in \mathcal{B}_R(0)} \left(\|\pi(x^0)\|_{l_q} \cdot \|x\|_{l_r}\right) = R\|\pi(x^0)\|_{l_q} =$$

$$= R\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^0|^{(r-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = R\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^0|^{r}\right)^{\frac{1}{q}} = R\|x^0\|_{l_r}^{\frac{r}{q}} = R\|x^0\|_{l_r}^{r-1} = \|x^0\|_{l_r}^{r},$$

$$\left(\pi(x^0), x^0\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 \cdot \operatorname{sign}(x_i^0)|x_i^0|^{r-1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^0|^{r} = \|x^0\|_{l_r}^{r},$$

откуда по определению нормального конуса

$$\pi(x^0) \in \mathcal{N}(x^0, \mathcal{B}_R(0)).$$

Так как любой $p \notin \operatorname{cone}\{\pi(x^0)\}$ является элементом нормального конуса в точке $\tilde{x} \neq x^0$, где

$$\tilde{x} = \frac{R}{\|p\|_{l_q}^{q-1}} \left(\operatorname{sign}(p_1)|p_1|^{q-1}, \operatorname{sign}(p_2)|p_2|^{q-1}, \dots\right) \in \partial\mathcal{B}_R(0),$$

то в силу леммы 3 $p \notin \mathcal{N}(x^0, \mathcal{B}_R(0))$. Тогда

$$\mathcal{N}\left(x^0, \mathcal{B}_R(0)\right) = \operatorname{cone}\left\{\pi(x^0)\right\} \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Построим нормальный конус к $A_1\mathcal{B}_R(0)$ в A_1x^0. Поскольку $\operatorname{Ker} A_1^* \neq \{0\}$, то согласно лемме 4 для всех $y \in A_1\mathcal{B}_R(0)$

$$(\operatorname{Ker} A_1^* \setminus \{0\}) \subset \mathcal{N}(y, A_1\mathcal{B}_R(0)),$$
$$\partial A_1\mathcal{B}_R(0) = A_1\mathcal{B}_R(0).$$

С другой стороны,

$$(A_1^*)^{-1}\left(\mathcal{N}(x^0, \mathcal{B}_R(0))\right) = (A_1^*)^{-1}\left(\operatorname{cone}\{\pi(x^0)\} \setminus \{0\}\right) =$$
$$= \left(\operatorname{cone}\{A_2^*\pi(x^0)\} + \operatorname{Lin}\{(1,0,0,\dots)\}\right) \setminus \{0\},$$

т.е. нормальный конус в любом $y \in A_1\mathcal{B}_R(0)$ не пуст, даже если его прообраз являлся внутренней точкой по отношению к $\mathcal{B}_R(0)$.

Теперь построим $\mathcal{N}(A_2x^0, A_2\mathcal{B}_R(0))$. Справедливо равенство $A_2\mathcal{B}_R(0) = \mathcal{B}_R(0)$, откуда $A_2x^0 \in \partial A_2\mathcal{B}_R(0)$ тогда и только тогда, когда $x_1^0 = 0$, т.е.

$$(A_2^*)^{-1}\left(\mathcal{N}(x^0, \mathcal{B}_R(0))\right) = (A_2^*)^{-1}\left(\operatorname{cone}\{\pi(x^0)\} \setminus \{0\}\right) =$$
$$= \begin{cases} \emptyset, & x_1^0 \neq 0, \\ \operatorname{cone}\{A_1^*\pi(x^0)\} \setminus \{0\}, & x_1^0 = 0. \end{cases}$$

С учетом леммы 5

$$\mathcal{N}(A_2x^0, A_2\mathcal{B}_R(0)) = \begin{cases} \emptyset, & x_1^0 \neq 0, \\ \operatorname{cone}\{A_1^*\pi(x^0)\} \setminus \{0\}, & x_1^0 = 0, \end{cases}$$

т.е. нормальный конус к $A_2\mathcal{B}_R(0)$ в $y \in A_2\mathcal{B}_R(0)$ может оказаться пустым даже в том случае, когда единственный прообраз y являлся граничной точкой по отношению к $\mathcal{B}_R(0)$.

4. Критерий оптимальности в задаче быстродействия

Рассмотрим критерий оптимальности траектории и управления в задаче быстродействия для различных случаев. На основе сформулированных теорем разработаем метод построения оптимального управления в задаче быстродействия.

Принципиальные отличия имеют два возможных варианта включения $0 \in \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})$:

$$0 \in \partial\mathcal{Y}(x_0, N_{\min}), \tag{5}$$
$$0 \in \operatorname{int} \mathcal{Y}(x_0, N_{\min}). \tag{6}$$

Специфика случая (5) обусловлена следствием 1 и леммами 3 и 6. В силу леммы 3 оптимальное управление, лежащее на границе множества $\mathcal{U}$, на каждом шаге может быть однозначно определено посредством элементов нормального конуса — функционалов сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$:

$$\begin{gathered} \psi(k) = A^*\psi(k+1), \quad k = \overline{0, N_{\min}-1}, \\ \psi(N_{\min}) = \psi_{N_{\min}}. \end{gathered} \tag{7}$$

Тем не менее рекуррентные соотношения (7) в случае вырожденного оператора A в силу леммы 5 могут привести к ситуации, когда для некоторого $k_0 = \overline{1, N_{\min}}$ оказывается выполнено включение $\psi(k_0) \in \operatorname{Ker} A^*$. В результате для всех $k < k_0$ оказывается справедливым равенство $\psi(k) = 0$, что делает невозможным определить оптимальное управление посредством сопряженной системы (7) и отображения $\rho_{\mathcal{U}}$.

В виде следующей леммы 7 сформулируем достаточные условия, гарантирующие невырожденный вид сопряженной системы в случае включения (5).

Лемма 7. Пусть семейство множеств $\{\mathcal{Y}(x_0,N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2) *и справедливо включение* $0\in\partial\mathcal{Y}(x_0,N_{\min})$.

Тогда для каждого $p\in\mathcal{N}(0,\mathcal{Y}(x_0,N_{\min}))$ *верно, что*

$$p\notin \operatorname{Ker}(A^*)^{N_{\min}}.$$

Случай (6) обладает рядом принципиальных отличий от (5). Вообще говоря, для (6) принцип максимума как критерий оптимальности процесса управления приобретает вырожденный характер, т.е. не удается построить оптимальную траекторию и управление согласно соотношениям:

$$\begin{gathered}
x^*(k+1)=Ax^*(k)+u^*(k),\\
\psi(k)=A^*\psi(k+1),\\
x^*(0)=x_0,\\
\psi(N_{\min})=\psi_{N_{\min}},\\
u^*(k)=\arg\max_{u\in\mathcal{U}}(\psi(k+1),u).
\end{gathered}\tag{8}$$

Теорема 1. Пусть выполнено включение (6) *и процесс управления* $\{x'(k),u'(k-1),x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ *определяется соотношениями* (8).

Тогда для любого $\psi_{N_{\min}}\notin\operatorname{Ker}(A^*)^{N_{\min}-1}$ *справедливо* $x'(N_{\min})\neq 0$.

Как следует из теоремы 1, в случае (6) оптимальный процесс системы (1) удовлетворяет соотношениям принципа максимума (8) только тогда, когда существует $k_0\in\overline{1,N_{\min}}$ такой, что для всех $k=\overline{0,k_0}$

$$\psi(k)=0.$$

Данный факт делает невозможным определить оптимальное управление из условия

$$u^*(k)=\arg\max_{u\in\mathcal{U}}(\psi(k+1),u),\quad k=\overline{0,k_0-1}.$$

Рассмотрим способ, позволяющий свести случай (6) к случаю (5) и сформулировать критерий оптимальности процесса для произвольного начального состояния. Обозначим:

$$\alpha=\mu\left(-A^{N_{\min}}x_0,\mathcal{Y}(x_0,N_{\min})-A^{N_{\min}}x_0\right),\tag{9}$$

где $\mu(x,\mathcal{X})$ — функционал Минковского [21]. Для вспомогательной системы $(A,\alpha\mathcal{U})$ определим семейство множеств достижимости $\{\mathcal{Y}_\alpha(x_0,N)\}_{N=0}^{\infty}$.

Лемма 8. Пусть выполнено включение (6).

Тогда для системы $(A,\alpha\mathcal{U})$ *верны соотношения:*

i. $\mathcal{Y}_\alpha(x_0,N)\subset\mathcal{Y}(x_0,N)$, $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

ii. $0\in\partial\mathcal{Y}_\alpha(x_0,N)$.

Лемма 8 позволяет в вопросах построения критерия оптимальности фактически ограничиться рассмотрением случая (5), перейдя от исходной системы $(A,\mathcal{U})$ к системе $(A,\alpha\mathcal{U})$.

Теорема 2 (принцип максимума). *Пусть наборы векторов* $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1} \subset \mathbb{L}$ *и функционалов* $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}} \subset \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$ *для каждого* $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ *определяются соотношениями:*

$$
\begin{gathered}
x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k), \\
\psi(k) = A^*\psi(k+1), \\
x^*(0) = x_0, \\
\psi(N_{\min}) \in \mathcal{N}(0, \mathcal{Y}_\alpha(x_0, N_{\min})), \\
u^*(k) = \arg \max_{u \in \alpha\mathcal{U}} (\psi(k+1), u).
\end{gathered}
$$

Тогда

i. $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ — *оптимальный процесс системы* $(A, \mathcal{U})$ *в задаче быстродействия, причем если* $\alpha = 1$, *то данный процесс единственный;*

ii. $x^*(k) \in \partial\mathcal{Y}_\alpha(x_0, k)$, $k = \overline{0, N_{\min}}$;

iii. $\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \mathcal{Y}_\alpha(x_0, k))$, $k = \overline{0, N_{\min}}$.

Для случая (5) теорема 2 является необходимым и достаточным условием оптимальности процесса управления. При этом рекуррентные соотношения теоремы 2 полностью совпадают с соотношениями принципа максимума (8), где сопряженная система определяется согласно условию $\psi_{N_{\min}} \in \mathcal{N}(0, \mathcal{Y}(x_0, N_{\min}))$.

5. Примеры

Продемонстрируем эффективность разработанных методов решения задачи быстродействия на следующих примерах.

Пример 2. Рассмотрим систему управления $(A_1, \mathcal{U})$ с вектором состояния из пространства $\mathbb{L} = l_r$, $r \in (1; +\infty)$, где оператор $A_1 \colon l_r \to l_r$ из примера 1, $\mathcal{U} = \mathcal{B}_1(0)$. Построим оптимальное управление для точки $x^0 \in l_r$ такой, что $\|x^0\| \in \mathbb{N}$.

Поскольку для любого $x \in l_r$

$$\|A_1 x\| = \|x\|,$$

то для всех $N \in \mathbb{N}$ справедливы включения

$$A_1^N \mathcal{B}_1(0) \subset A_1^{N-1} \mathcal{B}_1(0),$$

$$N \cdot A_1^N \mathcal{B}_1(0) \subset \sum_{k=0}^{N-1} A_1^k \mathcal{B}_1(0) \subset N \cdot \mathcal{B}_1(0) = \mathcal{B}_N(0). \tag{10}$$

Поскольку $\| - A_1^{\|x^0\|} x^0\| = \|x^0\|$, то $-A_1^{\|x^0\|} x^0 \in \partial\mathcal{B}_{\|x^0\|}(0)$. Но в силу (10)

$$-A_1^{\|x^0\|} x^0 \in \|x^0\| \cdot A_1^{\|x^0\|} \mathcal{B}_1(0) \subset \sum_{k=0}^{\|x^0\|-1} A_1^k \mathcal{B}_1(0) \subset \mathcal{B}_{\|x^0\|}(0),$$

откуда получаем, что

$$-A_1^{\|x^0\|}x^0 \in \partial \sum_{k=0}^{\|x^0\|-1} A_1^k \mathcal{B}_1(0),$$

а это выражение с учетом леммы 1 эквивалентно условию

$$0 \in \partial \mathcal{Y}(x^0, \|x^0\|).$$

С другой стороны,

$$-A_1^{\|x^0\|-1}x^0 \notin \begin{cases} \mathcal{B}_{\|x^0\|-1}(0), & \|x^0\| \geqslant 2, \\ \{0\}, & \|x^0\| = 1, \end{cases}$$

откуда согласно (10)

$$-A_1^{\|x^0\|-1}x^0 \notin \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\|x^0\|-2} A_1^k \mathcal{B}_1(0), & \|x^0\| \geqslant 2, \\ \{0\}, & \|x^0\| = 1, \end{cases}$$

что эквивалентно условию

$$0 \notin \mathcal{Y}(x^0, \|x^0\| - 1).$$

Тогда в соответствии с (3)

$$N_{\min} = \|x^0\|.$$

Поскольку рассматриваемый случай удовлетворяет условиям теоремы 2 при $\alpha = 1$, то $\psi(N_{\min})$ вычислим из условия

$$\psi(N_{\min}) \in \mathcal{N}\left(0, \mathcal{Y}(x^0, N_{\min})\right) = \mathcal{N}\left(-A_1^{N_{\min}}x^0, \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A_1^k \mathcal{B}_1(0)\right).$$

В силу (10) для любого $p \in l_q \setminus \{0\}$

$$\max_{x \in \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A_1^k \mathcal{B}_1(0)} (p, x) \leqslant \max_{x \in \mathcal{B}_{N_{\min}}(0)} (p, x).$$

Тогда с учетом (4)

$$\left(\operatorname{cone}\left\{\pi\left(-A_1^{N_{\min}}x^0\right)\right\} \setminus \{0\}\right) \subset \mathcal{N}\left(-A_1^{N_{\min}}x^0, \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A_1^k \mathcal{B}_1(0)\right),$$

$$\psi(N_{\min}) = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{N_{\min}}, -\operatorname{sign}(x_1^0)|x_1^0|^{r-1}, -\operatorname{sign}(x_2^0)|x_2^0|^{r-1}, \ldots\right).$$

Согласно теореме 2 оптимальный процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ системы $(A_1, \mathcal{U})$ и траектория сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ имеют вид:

$$\psi(k+1) = \pi(-A_1^{k+1}x^0) = \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{k+1}, -\mathrm{sign}(x_1^0)|x_1^0|^{r-1}, -\mathrm{sign}(x_2^0)|x_2^0|^{r-1},\ldots\right),$$

$$u^*(k) = \arg\max_{u\in\mathcal{B}_1(0)}(\psi(k+1), u) = -\frac{1}{N_{\min}}A_1^{k+1}x^0,$$

$$x^*(k) = \frac{N_{\min}-k}{N_{\min}}A_1^k x^0, \quad k=\overline{0, N_{\min}-1},$$

$$x^*(N_{\min}) = 0.$$

Задача быстродействия решена.

Пример 3. В рамках примера 2 рассмотрим случай $\|x^0\| > 0$. Обозначим через $f\colon l_r \to \mathbb{N}$ отображение

$$f(x) = \min\{n\in\mathbb{N}\colon \|x\| \leqslant n\}.$$

Тогда аналогично примеру 2 из (10) следует, что

$$-A_1^{f(x^0)-1}x^0 \notin \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{f(x^0)-2} A_1^k\mathcal{B}_1(0), & \|x^0\| > 1,\\ \{0\}, & \|x^0\| \leqslant 1,\end{cases}$$

$$-A_1^{f(x^0)}x^0 = -f(x^0)\cdot\left(A_1^{f(x^0)}\frac{x^0}{f(x^0)}\right) \in f(x^0)\cdot A^{f(x^0)}\mathcal{B}_1(0) \subset \sum_{k=0}^{f(x^0)-1} A_1^k\mathcal{B}_1(0),$$

откуда

$$0 \in \mathcal{Y}\left(x^0, f(x^0)\right) \setminus \mathcal{Y}\left(x^0, f(x^0)-1\right),$$

что в силу (3) эквивалентно выражению

$$N_{\min} = f(x^0),$$

причем если $\|x^0\| \notin \mathbb{N}$, то

$$0 \in \mathrm{int}\,\mathcal{Y}\left(x^0, f(x^0)\right).$$

Вычислим согласно (9) величину α. Из (10) следует, что включение

$$-A_1^{N_{\min}}x^0 \in \partial\sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A_1^k\mathcal{B}_\alpha(0) \subset \mathcal{B}_{N_{\min}\cdot\alpha}(0)$$

будет выполнено только в том случае, когда

$$N_{\min} \cdot \alpha = \left\| -A_1^{N_{\min}} x^0 \right\| = \|x^0\|,$$

$$\alpha = \frac{\|x^0\|}{N_{\min}} = \frac{\|x^0\|}{f(x^0)}.$$

Тогда для построения оптимального процесса системы $(A_1, \mathfrak{U})$ можно воспользоваться теоремой 2.

Пример 4. В рамках предположений примера 2 рассмотрим систему управления $(A_2, \mathfrak{U})$, где оператор $A_2 \colon l_r \to l_r$ взят из примера 1. Поскольку справедливо равенство

$$A_2 \mathfrak{U} = \mathfrak{U},$$

то в силу леммы 1 для каждого $N \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Y}(x^0, N) = \mathcal{B}_N(A^N x^0).$$

Рассмотрим случай, когда $0 \in \partial \mathcal{B}_{N_{\min}}(A_2^{N_{\min}} x^0)$, что эквивалентно условию

$$\left\| A_2^{N_{\min}} x^0 \right\|_{l_2} = N_{\min}.$$

Тогда согласно (4)

$$\mathcal{N}\left(0, \mathcal{Y}\left(x^0, N_{\min}\right)\right) = \mathrm{cone}\left\{\pi\left(-A^{N_{\min}} x^0\right)\right\} \setminus \{0\},$$

откуда в соответствии с теоремой 2

$$\psi(N_{\min}) = \pi\left(-A^{N_{\min}} x^0\right) =$$
$$= \left(-\mathrm{sign}\left(x^0_{N_{\min}+1}\right)\left|x^0_{N_{\min}+1}\right|^{r-1}, -\mathrm{sign}\left(x^0_{N_{\min}+2}\right)\left|x^0_{N_{\min}+2}\right|^{r-1}, \ldots\right).$$

Согласно теореме 2 оптимальный процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ системы $(A_2, \mathfrak{U})$ и траектория сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ имеют вид:

$$\psi(k+1) = (A_2^*)^{N_{\min}-k-1} \psi(N_{\min}) =$$
$$= \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{N_{\min}-k-1}, -\mathrm{sign}\left(x^0_{N_{\min}+1}\right)\left|x^0_{N_{\min}+1}\right|^{r-1}, -\mathrm{sign}\left(x^0_{N_{\min}+2}\right)\left|x^0_{N_{\min}+2}\right|^{r-1}, \ldots\right),$$

$$u^*(k) = \arg \max_{u \in \mathcal{B}_1(0)} (\psi(k+1), u) = \frac{1}{N_{\min}} \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{N_{\min}-k-1}, -x^0_{N_{\min}+1}, -x^0_{N_{\min}+2}, \ldots\right),$$

$$x^*(k) = \left(x^0_{k+1}, \ldots, x^0_{N_{\min}}, \frac{N_{\min}-k}{N_{\min}} \cdot x^0_{N_{\min}+1}, \frac{N_{\min}-k}{N_{\min}} \cdot x^0_{N_{\min}+2}, \ldots\right),$$
$$k = \overline{0, N_{\min}-1},$$

$$x^*(N_{\min}) = 0.$$

Задача быстродействия решена.

З а м е ч а н и е 5. Оптимальное управление на k-м шаге в примере 4 не оказывает влияния на первые $N_{\min} - k - 1$ координат вектора состояния, что обусловлено свойствами оператора A_2. Более того, оптимальное управление для двух начальных состояний $x^{01}, x^{02} \in l_r$, отличающихся только первыми $N_{\min}$ координатами, будет одинаково. Данный факт следует из того, что для всех $N \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\mathcal{Y}(x^1, N) = \mathcal{Y}(x^2, N),$$

где $x^1, x^2 \in l_r$ такие, что $x_i^1 = x_i^2$ для всех натуральных $i > N$.

П р и м е р 5. Рассмотрим процедуру построения $\psi(N_{\min})$ в случае, когда множество $\mathcal{U}$ не является шаром. В рамках данного примера предположим, что пространство $\mathbb{L}$ — гильбертово. Согласно теореме Рисса каждый функционал $\tilde{p} \in \mathbb{L}^*$ однозначно определяется вектором $p \in \mathbb{L}$ посредством скалярного произведения:

$$(\tilde{p}, x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

В дальнейшем будем отождествлять функционал $\tilde{p} \in \mathbb{L}^*$ и вектор $p \in \mathbb{L}$, его порождающий. Также будем полагать, что оператор, сопряженный к линейному и ограниченному оператору $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, действует на пространстве $\mathbb{L}$:

$$A^*\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}.$$

Пусть $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{L}\colon (x, Hx) \leqslant 1\}$, где $H\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ — положительно определенный самосопряженный линейный и ограниченный оператор.

Как продемонстрировано в [16], справедливо включение $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2$, т.е. для построения нормального конуса $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ в некоторой $u \in \partial\mathcal{U}$ достаточно найти единственный элемент $p \in \mathcal{N}(u, \mathcal{U})$:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \operatorname{cone}\{p\} \setminus \{0\}.$$

Поскольку (x, Hy) является скалярным произведением относительно $x, y \in \mathbb{L}$ [22], то в силу неравенства Коши—Буняковского для любого $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ верно неравенство

$$\begin{gathered}(\tilde{u}, Hu) \leqslant \sqrt{(\tilde{u}, H\tilde{u})(u, Hu)} \leqslant 1,\\ (u, Hu) = 1.\end{gathered}$$

Тогда

$$u = \arg\max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (Hu, \tilde{u}),$$

$$\begin{cases} Hu \in \mathcal{N}(u, \mathcal{U}), \\ \rho_{\mathcal{U}}(p) = \arg\max\limits_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{u}) = \dfrac{H^{-1}p}{\sqrt{p, H^{-1}p}}\,. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть для $x_0 \in \mathbb{L}$ и системы $(A, \mathcal{U})$ выполнено включение

$$0 \in \partial\mathcal{Y}(x_0, N_{\min}), \quad N_{\min} \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\psi(N_{\min})$ в силу теоремы 2 можно определить из условия

$$\psi(N_{\min}) \in \mathcal{N}(0, \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})) = \mathcal{N}\left(-A^{N_{\min}}x_0, \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k\mathcal{U}\right),$$

$$-A^{N_{\min}}x_0 = \arg \max_{x \in \sum\limits_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k\mathcal{U}} (\psi(N_{\min}), x) = \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \arg \max_{x\in\mathcal{U}}(\psi(N_{\min}), A^k x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \arg \max_{x\in\mathcal{U}}((A^*)^k\psi(N_{\min}), x).$$

Учитывая (11), получим условие

$$-A^{N_{\min}}x_0 = \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \frac{H^{-1}(A^*)^k\psi(N_{\min})}{\sqrt{((A^*)^k\psi(N_{\min}), H^{-1}(A^*)^k\psi(N_{\min}))}},$$

из которого можно определить $\psi(N_{\min})$.

6. Заключение

В статье рассмотрен подход к решению задачи быстродействия для линейных дискретных систем с бесконечномерным вектором состояния на основе множеств достижимости.

Доказательство теоремы 2 во многом базируется на леммах 5 и 6, определяющих структуру нормального конуса при линейных преобразованиях и сложении множеств по Минковскому. С помощью леммы 3 в случае граничной точки удается обосновать единственность оптимального управления, определяемого посредством элемента нормального конуса, а лемма 7 гарантирует невырожденность траектории сопряженной системы, что позволяет обобщить дискретный принцип максимума на случай необратимого оператора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. По определению множества достижимости условие $y \in \mathcal{Y}(x_0, N)$ эквивалентно существованию $u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U}$ таких, что

$$y = x(N) = Ax(N-1) + u(N-1) = \ldots$$
$$\ldots = A^N x_0 + A^{N-1}u(0) + \ldots + Au(N-2) + u(N-1),$$

откуда согласно определению алгебраической суммы множеств следует утверждение леммы 1.

Доказательство леммы 2. Если $N = \tilde{N}$, то утверждение леммы 2 тривиально. Пусть $N > \tilde{N}$. В силу леммы 1 и включения $0 \in \mathcal{U}$ справедливы соотношения

$$0 = 0 + A0 + \ldots A^{N-\tilde{N}-1}0 \in \sum_{k=0}^{N-\tilde{N}-1} A^k \mathcal{U}.$$

Тогда

$$0 = A^{N-\tilde{N}}0 + 0 \in A^{N-\tilde{N}}\mathcal{Y}(x_0, \tilde{N}) + \sum_{k=0}^{N-\tilde{N}-1} A^k \mathcal{U} =$$

$$= A^{\tilde{N}+N-\tilde{N}}x_0 + \sum_{k=N-\tilde{N}}^{\tilde{N}-1+N-\tilde{N}} A^k \mathcal{U} + \sum_{k=0}^{N-\tilde{N}-1} A^k \mathcal{U} = \mathcal{Y}(x_0, N).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Если хотя бы одна из точек u^1, u^2 является внутренней по отношению к $\mathcal{U}$, то утверждение леммы 3 следует непосредственно из определения нормального конуса.

Рассмотрим случай $u^1, u^2 \in \partial\mathcal{U}$. Предположим, что существует

$$p \in \mathcal{N}(u^1, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(u^2, \mathcal{U}).$$

Тогда

$$\left(p,\, \frac{1}{2}u^1 + \frac{1}{2}u^2\right) = \frac{1}{2}\left(p,\, u^1\right) + \frac{1}{2}\left(p,\, u^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\max_{u \in \mathcal{U}}\left(p,\, u\right) + \frac{1}{2}\max_{u \in \mathcal{U}}\left(p,\, u\right) = \max_{u \in \mathcal{U}}\left(p,\, u\right).$$

По определению нормального конуса $p \in \mathcal{N}(\frac{1}{2}u^1 + \frac{1}{2}u^2, \mathcal{U})$. Но в силу строгой выпуклости $\mathcal{U}$

$$\frac{1}{2}u^1 + \frac{1}{2}u^2 \in \operatorname{int} \mathcal{U},$$

$$\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}u^1 + \frac{1}{2}u^2, \mathcal{U}\right) = \emptyset.$$

Получаем противоречие. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Если $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$, то утверждение леммы 4 выполнено автоматически. Рассмотрим случай, когда существует $p \in (\operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\})$. Тогда для произвольной $x \in \mathcal{X}$ справедливы соотношения

$$\max_{y \in A\mathcal{X}}(p, y) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}}(p, A\tilde{x}) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}}(A^*p, \tilde{x}) = 0 = (A^*p, x) = (p, Ax),$$

откуда согласно определению нормального конуса $p \in \mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X})$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. В случае $\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = \emptyset$ утверждение леммы 5 очевидно.

Рассмотрим случай, когда существует $p \in \mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X})$. Тогда справедлива цепочка равенств

$$(\text{П.1}) \qquad (A^*p, x) = (p, Ax) = \max_{y \in A\mathcal{X}} (p, y) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, A\tilde{x}) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (A^*p, \tilde{x}).$$

В случае когда $x \in \operatorname{int} \mathcal{X}$, $\mathcal{N}(x, \mathcal{X}) = \emptyset$, соотношения (П.1) возможны тогда и только тогда, когда $A^*p = 0$. Отсюда

$$p \in \operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\},$$
$$\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) \subset \operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\}.$$

С учетом леммы 4

$$\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = \operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\}.$$

Если $x \in \partial\mathcal{X}$, то соотношения (П.1) возможны тогда и только тогда, когда $A^*p = 0$ или $A^*p \in \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$. Отсюда

$$p \in (A^*)^{-1}(\mathcal{N}(x, \mathcal{X})) \cup (\operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\}),$$
$$\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) \subset (A^*)^{-1}(\mathcal{N}(x, \mathcal{X})) \cup (\operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\}).$$

Если $(A^*)^{-1}(\mathcal{N}(x, \mathcal{X})) = \emptyset$, то в силу леммы 4 утверждение леммы 5 доказано.

Рассмотрим случай, когда существует $p \in (A^*)^{-1}(\mathcal{N}(x, \mathcal{X}))$. Тогда $A^*p \in$ $\in \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$,

$$(p, Ax) = (A^*p, x) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (A^*p, \tilde{x}) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, A\tilde{x}) = \max_{y \in A\mathcal{X}} (p, y),$$
$$p \in \mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}),$$
$$(A^*)^{-1}(\mathcal{N}(x, \mathcal{X})) \subset \mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}).$$

С учетом леммы 4 утверждение леммы 5 полностью доказано.

Доказательство леммы 6. Предположим, что существует $p \in$ $\in \mathcal{N}(x^1 + x^2, \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2)$. Тогда

$$(p, x^1) + (p, x^2) = (p, x^1 + x^2) =$$
$$= \max_{y \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2} (p, y) = \max_{\substack{\tilde{x}^1 \in \mathcal{X}_1 \\ \tilde{x}^2 \in \mathcal{X}_2}} (p, \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2) = \max_{\tilde{x}^1 \in \mathcal{X}_1} (p, \tilde{x}^1) + \max_{\tilde{x}^2 \in \mathcal{X}_2} (p, \tilde{x}^2),$$

откуда следует, что

$$(p, x^1) = \max_{\tilde{x}^1 \in \mathcal{X}_1} (p, \tilde{x}^1),$$
$$(p, x^2) = \max_{\tilde{x}^2 \in \mathcal{X}_2} (p, \tilde{x}^2),$$
$$p \in \mathcal{N}(x^1, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}_2),$$

$$(\text{П.2}) \qquad \mathcal{N}(x^1 + x^2, \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2) \subset \mathcal{N}(x^1, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}_2).$$

В случае если $\mathcal{N}(x^1 + x^2, \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2) = \emptyset$, то включение (П.2) выполнено тривиальным образом.

Предположим теперь, что существует $p \in \mathcal{N}(x^1, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}_2)$. Тогда

$$(p, x^1 + x^2) = (p, x^1) + (p, x^2) =$$
$$= \max_{\tilde{x}^1 \in \mathcal{X}_1} (p, \tilde{x}^1) + \max_{\tilde{x}^2 \in \mathcal{X}_2} (p, \tilde{x}^2) = \max_{\substack{\tilde{x}^1 \in \mathcal{X}_1 \\ \tilde{x}^2 \in \mathcal{X}_2}} (p, \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2) = \max_{y \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2} (p, y),$$

откуда следует, что

$$p \in \mathcal{N}(x^1 + x^2, \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2),$$
$$\mathcal{N}(x^1, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}_2) \subset \mathcal{N}(x^1 + x^2, \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2). \tag{П.3}$$

В случае если $\mathcal{N}(x^1, \mathcal{X}_1) \cap \mathcal{N}(x^2, \mathcal{X}_2) = \emptyset$, то включение (П.3) выполнено тривиальным образом.

Из (П.2) и (П.3) следует утверждение леммы 6.

Доказательство следствия 2. Следствие вытекает из лемм 6 и 3.

Лемма П.1. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{U}_3$, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}$, $x \in \partial \mathcal{X}$.

Тогда для любого $p \in \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$ верно неравенство

$$(p, x) > 0.$$

Доказательство леммы П.1. Поскольку $p \in \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$, то $p \neq 0$. Тогда существует $y \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ такой, что $(p, y) \neq 0$.

Так как $0 \in \operatorname{int} \mathcal{X}$, то существует $\varepsilon > 0$, удовлетворяющий условию $B_\varepsilon(0) \subset \subset \mathcal{X}$. Тогда

$$y \cdot \frac{\varepsilon \cdot \operatorname{sign}\,((p, y))}{\|y\|} \in \mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset \mathcal{X},$$
$$(p, x) = \max_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} (p, \tilde{x}) \geqslant \left(p, y \cdot \frac{\varepsilon \cdot \operatorname{sign}\,((p, y))}{\|y\|}\right) = \frac{\varepsilon}{\|y\|} |(p, y)| > 0.$$

Лемма П.1 доказана.

Доказательство леммы 7. В случае $N_{\min} = 0$ утверждение леммы 7 тривиально. Рассмотрим случай $N_{\min} \in \mathbb{N}$.

В силу леммы 1 верно равенство

$$\mathcal{N}(0, \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})) = \mathcal{N}\left(-A^{N_{\min}} x_0, \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k \mathcal{U}\right).$$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k \mathcal{U} \in \mathbb{U}_3$, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U} \subset \sum\limits_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k \mathcal{U}$, то в силу леммы П.1 для каждого $p \in \mathcal{N}(0, \mathcal{Y}(x_0, N_{\min}))$ справедливы соотношения

$$\left((A^*)^{N_{\min}} p, -x_0\right) = \left(p, -A^{N_{\min}} x_0\right) > 0.$$

Тогда по определению
$$p \notin \operatorname{Ker}(A^*)^{N_{\min}}.$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим обратное: процесс управления $\{x'(k), u'(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ оптимален в задаче быстродействия для системы (1), но при этом $\psi_{N_{\min}} \notin \operatorname{Ker}(A^*)^{N_{\min}-1}$. Тогда для всех $k = \overline{0, N_{\min}-1}$
$$A^k \psi_{N_{\min}} \neq 0,$$
$$(A^*)^k \psi_{N_{\min}} \in \mathcal{N}(u'(N_{\min}-k-1), \mathcal{U}),$$
$$\psi_{N_{\min}} \in \left((A^*)^k\right)^{-1} \left(\mathcal{N}(u'(N_{\min}-k-1), \mathcal{U})\right).$$
В силу леммы 5
$$\psi_{N_{\min}} \in \mathcal{N}\left(A^k u'(N_{\min}-k-1), A^k \mathcal{U}\right).$$
Тогда согласно лемме 6
$$\psi_{N_{\min}} \in \mathcal{N}\left(\sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k u'(N_{\min}-k-1), \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k \mathcal{U}\right),$$
откуда в соответствии с леммой 1
$$\psi_{N_{\min}} \in \mathcal{N}\left(A^{N_{\min}} x_0 + \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k u'(N_{\min}-k-1), \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})\right).$$
Поскольку $0 \in \operatorname{int} \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})$, то
$$\mathcal{N}(0, \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})) = \emptyset,$$
$$0 \neq A^{N_{\min}} x_0 + \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k u'(N_{\min}-k-1) = x'(N_{\min}).$$
Тогда по определению процесс $\{x'(k), u'(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ не является оптимальным в задаче быстродействия. Получаем противоречие. Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 8. В силу (6) и определения функционала Минковского верно, что $\alpha < 1$. Так как $0 \in A^k \mathcal{U}$, $k = \overline{0, N_{\min}-1}$, то
$$\sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \alpha A^k \mathcal{U} \subset \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k \mathcal{U}.$$

i. Тогда согласно лемме 1
$$\mathcal{Y}_\alpha(x_0, N) \subset \mathcal{Y}(x_0, N), \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

ii. По определению функционала Минковского

$$-A^{N_{\min}}x_0 \in \partial\left(\alpha(\mathcal{Y}(x_0, N_{\min}) - A^{N_{\min}}x_0)\right) = \partial\left(\sum_{k=0}^{N_{\min}-1}\alpha A^k\mathcal{U}\right),$$

$$0 \in \partial\left(\sum_{k=0}^{N_{\min}-1}\alpha A^k\mathcal{U} + A^{N_{\min}}x_0\right) = \partial\mathcal{Y}_\alpha(x_0, N_{\min}).$$

Лемма 8 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку согласно включению $\alpha\mathcal{U} \subset \subset \mathcal{U}$ управление, допустимое для системы $(A, \alpha\mathcal{U})$, является также допустимым и для $(A, \mathcal{U})$, то с учетом леммы 8 достаточно доказать утверждения i–iii теоремы 2 только для случая (5).

Построим набор векторов $\{y^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$ согласно рекуррентным соотношениям:

$$y^*(N_{\min}) = 0,$$

$$\begin{cases} y^*(k) \in \mathcal{Y}(x_0, k), \\ Ay^*(k) = y^*(k+1) - u^*(k), \quad k = \overline{0, N_{\min}-1}. \end{cases}$$

Тогда в соответствии с предположениями:

$$y^*(N_{\min}) \in \partial\mathcal{Y}(x_0, N_{\min}),$$
$$\psi(N_{\min}) \in \mathcal{N}(y^*(N_{\min}), \mathcal{Y}(x_0, N_{\min})).$$

Предположим, что для некоторого $k = \overline{0, N_{\min}-1}$ выполнены условия:

$$y^*(k+1) \in \partial\mathcal{Y}(x_0, k+1),$$
$$\psi(k+1) \in \mathcal{N}(y^*(k+1), \mathcal{Y}(x_0, k+1)).$$

В силу следствия 1 справедливо представление

$$\mathcal{Y}(x_0, k+1) = A\mathcal{Y}(x_0, k) + \mathcal{U}.$$

Как продемонстрировано в [17], класс $\mathbb{U}_3$ замкнут относительно сложения по Минковскому и линейных преобразований, откуда $A\mathcal{Y}(x_0, k) \in \mathbb{U}_3$, $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_2$, и согласно следствию 2 существует единственное разложение вида

$$y^*(k+1) = z(k) + u^*, \tag{П.4}$$

где $z(k) \in \partial A\mathcal{Y}(x_0, k)$, $u^* \in \partial\mathcal{U}$. В соответствии с леммой 6

$$\mathcal{N}(y^*(k+1), \mathcal{Y}(x_0, k+1)) = \mathcal{N}(z(k), A\mathcal{Y}(x_0, k)) \cap \mathcal{N}(u^*, \mathcal{U}).$$

Тогда в силу леммы 3 вектор u^* однозначно опреляется соотношением

$$u^* = \arg\max_{u\in\mathcal{U}}(\psi(k+1), u) = u^*(k).$$

Поскольку $z(k) \in \partial A\mathcal{Y}(x_0,k)$, то существует $y^*(k) \in \mathcal{Y}(x_0,k)$ такой, что

$$z(k) = Ay^*(k).$$

Согласно лемме 5

$$\psi(k+1) \in (A^*)^{-1}(\mathcal{N}(y^*(k),\mathcal{Y}(x_0,k))) \cup (\operatorname{Ker} A^* \setminus \{0\}),$$

но поскольку в силу леммы 7

$$\psi(k+1) = (A^*)^{N_{\min}-k-1}\psi(N_{\min}) \notin \operatorname{Ker} A^*,$$

то

$$\psi(k+1) \in (A^*)^{-1}(\mathcal{N}(y^*(k),\mathcal{Y}(x_0,k))).$$

Тогда

$$\psi(k) = A^*\psi(k+1) \neq 0,$$

$$\psi(k) \in \mathcal{N}(y^*(k),\mathcal{Y}(x_0,k)). \tag{П.5}$$

Поскольку $\mathcal{N}(y^*(k),\mathcal{Y}(x_0,k)) \neq \emptyset$, то

$$y^*(k) \in \partial\mathcal{Y}(x_0,k). \tag{П.6}$$

Согласно методу математической индукции для всех $k=\overline{0,N_{\min}}$ верно (П.5) и (П.6), причем в случае $k=0$

$$y^*(0) \in \mathcal{Y}(x_0,0) = \{x_0\}.$$

Также по построению верно равенство

$$y^*(k+1) = Ay^*(k) + u^*(k), \quad k=\overline{0,N_{\min}-1}.$$

Тогда для всех $k=\overline{0,N_{\min}}$

$$x^*(k) = y^*(k).$$

i. Поскольку $x^*(N_{\min}) = y^*(N_{\min}) = 0$, то $\{x^*(k),u^*(k-1),x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ — оптимальный процесс системы (1) в задаче быстродействия. Единственность следует из разложения (П.4) и следствия 2.

ii. В силу (П.6) верно включение

$$x^*(k) \in \partial\mathcal{Y}(x_0,k), \quad k=\overline{0,N_{\min}}.$$

iii. Согласно (П.5) справедливо

$$\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k),\mathcal{Y}(x_0,k)), \quad k=\overline{0,N_{\min}}.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
4. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
5. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // АиТ. 2003. № 12. С. 17–32.

   Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.
6. *Fisher M.E., Gayek J.E.* Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optim. Theory Appl. 1988. V. 56. No. 1. P. 67–88.
7. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислит. технологии. 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.
8. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Наука, 2005.
9. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
10. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
11. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
12. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // J. SIAM Control. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
13. *Desoer C.A., Wing J.* The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // J. Franklin Inst. 1961. V. 272. No. 3. P. 208–228.
14. *Lin W.-S.* Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 5. P. 1343–1351.
15. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // АиТ. 1965. № 2. С. 193–207.

    Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order // Autom. Remote Control. 1965. V. 25. No. 9. P. 193–206.
16. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.

    Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
17. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
18. *Берже М.* Геометрия. Т. 2. М.: Мир, 1984.
19. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // АиТ. 2015. № 9. С. 3–30.

Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.

20. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2015. № 83. Доступ в журн. http://trudymai.ru/published.php
21. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
22. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 14.05.2018

После доработки 16.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018