© 2019 г. Е.Н. РОЗЕНВАССЕР, д-р техн. наук (fishka33@mail.ru)
(Государственный морской технический университет, Санкт-Петербург),
Б.П. ЛЯМПЕ, д-р инженерии,
В. ДРЕВЕЛОВ, д-р инженерии (wolfgang.drewelow@uni-rostok.de),
Т. ЯЙНШ, д-р инженерии (torsten.jeinsch@uni-rostok.de)
(Университет Росток, ФРГ)

СТАНДАРТИЗИРУЕМОСТЬ И H_2-ОПТИМИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Введено понятие обобщенной стандартной импульсной системы с запаздыванием S_g и рассмотрен класс многомерных импульсных систем, эквивалентных некоторой системе S_g. Такие системы названы стандартизируемыми. Установлены необходимые и достаточные условия стандартизируемости. Приводится решение задачи H_2-оптимизации для системы S_g и стандартизируемых систем, основанное на методе Винера–Хопфа. Установлено, что решение задачи H_2-оптимизации для стандартизируемой системы с многими запаздываниями сводится к решению аналогичной задачи для стандартной системы с одним запаздыванием, что существенно упрощает соответствующие вычисления процедуры и качественный анализ H_2-оптимальной системы.

Ключевые слова: импульсная система, система с запаздыванием, параметрическая передаточная функция, стандартизируемость, H_2-оптимизация.

DOI: 10.1134/S0005231019030024

1. Введение

Учет запаздывания играет важную роль при решении задач анализа и синтеза импульсных (SD) систем [1–3]. В частности, для многочисленных приложений важное значание имеет проблема H_2-оптимизации SD систем при наличии запаздываний в различных частях контура управления.

Решению проблемы H_2-оптимизации систем без запаздывания посвящен ряд исследований [4–12]. Различные подходы к изучению SD систем с запаздыванием, в том числе проблеме H_2-оптимизации, можно найти в [13–20] и в цитированных публикациях.

В качестве альтернативы к перечисленным подходам может рассматриваться частотный метод, основанный на концепции параметрической функции (ППФ) и параметрической передаточной матрицы (ППМ) [21–26]. В [21, 22, 24] показано, что метод ППФ является эффективным средством для анализа и синтеза одномерных импульсных систем с запаздыванием. В [25] дано описание метода ППМ для многомерных систем без запаздывания, а в [26] этот метод распространен на многомерные импульсные системы с запаздыванием. В качестве предмета исследования в [26] рассматривалась система дифференциально-разностных уравнений S_τ, названная стандартной. Ограничительным свойством стандартной системы S_τ является предположение о том, что все компоненты наблюдаемого вектора имеют одинаковые смещения во времени по отношению к вектору состояния непрерывного объекта и вектору управления. Между тем практические исследования показывают, что во многих случаях математическое описание реальных импульсных систем приводит к более общим моделям, в которых компоненты наблюдаемого выхода имеют различные временны́е сдвиги.

В настоящей статье метод ППМ распространяется на модели такого типа. Соответствующая система дифференциально-разностных уравнений названа обобщенной стандартной системой S_g.

Введен в рассмотрение общий класс многомерных SD систем с запаздыванием, которые эквивалентны некоторой системе S_g. Такие системы названы в статье стандартизируемыми. Приведены необходимые и достаточные условия, при которых SD система является стандартизируемой. Помимо сказанного, в статье рассмотрены задачи H_2-оптимизации системы S_g и стандартизируемых систем. При этом доказан важный для приложений факт, что решение задачи H_2-оптимизации системы S_g и произвольной стандартизируемой системы сводится к решению аналогичной задачи для некоторой стандартной системы $\bar{S}_\tau$ с одним запаздыванием, равным запаздыванию управляющего сигнала на входе непрерывного объекта, что может быть выполнено с помощью метода, описанного в [26]. При этом существенно, что на систему S_g и произвольную стандартизируемую систему распространяются все качественные особенности H_2-оптимальной системы S_τ, установленные в [26]. В частности это относится к факту существования у H_2-оптимальной системы множества фиксированных полюсов, которые определяются только структурой непрерывной части S_d системы и полюсами входящих в нее элементов.

2. Обобщенная стандартная модель импульсной системы с множественными запаздываниями

Пусть управляемый непрерывный объект описывается уравнениями состояния:

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + B_1 x(t-\tau_1) + Bu(t-\tau_2), \qquad y(t) = Cv(t), \tag{2.1}$$

где $y(t)$ — вектор управляемого выхода $n \times 1$, $v(t)$ — вектор состояния объекта $\chi \times 1$, $x(t)$ — вектор входа $\ell \times 1$, $u(t)$ — вектор управления $m \times 1$ и A, B, B_1, C — постоянные матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что пара A, B — полностью управляема, а пара A, C — полностью наблюдаема. Кроме того в (2.1) τ_1 и τ_2 — неотрицательные постоянные, характеризующие чистое запаздывание входа и управления.

Предполагается, что объект (2.1) управляется импульсным регулятором (ИР), который функционирует с периодом квантования $T > 0$ и описывается системой уравнений

$$\xi_k = y(kT), \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{2.2}$$

$$\alpha(\zeta)\psi_k = \beta(\zeta)\xi_k, \tag{2.3}$$

$$u(t) = h(t - kT)\psi_k, \quad kT < t < (k+1)T. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.2) — это уравнение аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Соотношение (2.3) — уравнение программы управления. В этом уравнении ψ_k, $k = 0, \pm 1, \ldots,$ — элементы векторной последовательности размера $q \times 1$ и $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ — полиномиальные матрицы размеров $q \times q$ и $q \times n$ соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta) &= \alpha_0 + \alpha_1\zeta + \ldots + \alpha_\rho\zeta^\rho, \\ \beta(\zeta) &= \beta_0 + \beta_1\zeta + \ldots + \beta_\rho\zeta^\rho. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь α_i, β_i — постоянные матрицы размеров $q \times q$ и $q \times n$, а ζ — оператор обратного сдвига [3], действующий по правилу

$$\zeta\psi_k = \psi_{k-1}, \quad \zeta\xi_k = \xi_{k-1}, \tag{2.6}$$

и предполагается, что выполнено условие каузальности

$$\det \alpha_0 \neq 0. \tag{2.7}$$

Далее пару матриц (2.5) будем называть дискретным регулятором.

Помимо сказанного, предполагается, что если $s_1, \ldots, s_\lambda$ — последовательность всех различных собственных чисел матрицы A, то выполнены условия непатологичности периода квантования [3, 9]

$$e^{s_i T} \neq e^{s_k T}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \ldots, \lambda. \tag{2.8}$$

Формула (2.4) — это уравнение преобразователя цифра-аналог (ЦАП). В этом уравнении $h(t)$ — матрица размеров $m \times q$, элементы которой имеют ограниченную вариацию на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

В качестве наблюдаемого выхода изучаемой системы рассматривается вектор $r \times 1$

$$\bar{z}'(t) = \begin{bmatrix} z_1'(t) & \ldots & z_\gamma'(t) \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

где штрих — оператор транспонирования и $z_i(t)$ — парциальные выходы $r_i \times 1$, заданные соотношениями

$$z_i(t) = C_i v(t - \tau_{3i}) + D_i u(t - \tau_2 - \tau_{3i}), \quad i = 1, \ldots, \gamma, \tag{2.10}$$

где C_i, D_i — матрицы размеров $r_i \times \chi$ и $r_i \times m$ и τ_{3i} — постоянные, которые могут принимать значения произвольного знака.

В совокупности соотношения (2.1)–(2.10) определяют систему дифференциально разностных уравнений, которую при выполнении всех приведенных предположений будем называть обобщенной стандартной импульсной системой с множественными запаздываниями. Далее эту систему будем обозначать через S_g. Частный случай системы S_g, соответствующий значению $\gamma = 1$, рассматривался в [26] и назван стандартной системой S_τ.

3. Параметрическая передаточная матрица системы S_g

С помощью преобразований, примененных в [26] применительно к системе S_τ, при входе $x(t)$ и выходе $\bar z(t)$ (2.9) системе S_g можно сопоставить операторные уравнения:

$$\begin{aligned} \bar z(t) &= \bar K_\tau(p)x(t) + \bar L_\tau(p)u(t),\\ y(t) &= M_\tau(p)x(t) + N_\tau(p)u(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

в которых $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования и соответствующие передаточные матрицы $\bar K_\tau(p), \bar L_\tau(p), M_\tau(p), N_\tau(p)$ определяются приведенными далее формулами. Прежде всего имеем:

$$\bar K'_\tau(p) = \left[\ K'_{1\tau}(p) \quad \dots \quad K'_{\gamma\tau}(p)\ \right], \quad \bar L'_\tau(p) = \left[\ L'_{1\tau}(p) \quad \dots \quad L'_{\gamma\tau}(p)\ \right]. \tag{3.2}$$

Здесь $K_{i\tau}(p)$ и $L_{i\tau}(p)$ — матрицы размеров $r_i \times \ell$ и $r_i \times m$, которые определяются формулами

$$K_{i\tau}(p) = K_i(p)e^{-p\tau_{K_i}} \quad \text{и} \quad L_{i\tau}(p) = L_i(p)e^{-p\tau_{L_i}}, \tag{3.3}$$

где $K_i(p)$ и $L_i(p)$ — рациональные матрицы:

$$K_i(p) = C_i(pI_\chi - A)^{-1}B_1, \quad L_i(p) = C_i(pI_\chi - A)^{-1}B + D_i. \tag{3.4}$$

Помимо этого, в (3.1)

$$M_\tau(p) = M(p)e^{-p\tau_M}, \quad N_\tau(p) = N(p)e^{-p\tau_N}, \tag{3.5}$$

где

$$M(p) = C(pI_\chi - A)^{-1}B_1, \quad N(p) = C(pI_\chi - A)^{-1}B. \tag{3.6}$$

Фигурирующие в (3.3) и (3.5) постоянные $\tau_{K_i}, \tau_{L_i}, \tau_M, \tau_N$ определяются формулами:

$$\begin{gathered} \tau_{K_i} = \tau_M + \tau_{3i}, \quad \tau_{L_i} = \tau_N + \tau_{3i},\\ \tau_M = \tau_1, \quad \tau_N = \tau_2. \end{gathered} \tag{3.7}$$

По отношению к каждому из парциальных выходов $z_i(t)$ обобщенная стандартная система S_g представляет собой стандартную систему $S_{\tau i}$.

Как следует из [26], каждой системе $S_{\tau i}$ можно сопоставить параметрическую передаточную матрицу (ППМ) $W_{z_i x}(p,t) = W_{z_i x}(p, t+T)$ размеров $r_i \times \ell$, которая определяется соотношением

$$W_{z_i x}(p,t) = \varphi_{L_{i\tau}\mu}(T,p,t)\tilde R_N(p)M_\tau(p) + K_{i\tau}(p), \quad i = 1, \dots, \gamma. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\varphi_{L_{i\tau}\mu}(T,p,t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}L_{i\tau}(p+kj\omega)\mu(p+kj\omega)e^{kj\omega t},\quad \omega=\frac{2\pi}{T},$$

$$\mu(p)=\int\limits_0^T h(t)e^{-pt}dt,$$

(3.9)
$$\tilde{R}_N(p)=\bar{W}_d(p)\left[I_n-\tilde{D}_{N\mu}(T,p,-\tau_N)\bar{W}_d(p)\right]^{-1},$$

$$\tilde{D}_{N\mu}(T,p,-\tau_N)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}N(p+kj\omega)\mu(p+kj\omega)e^{-(p+kj\omega)\tau_N},$$

$$\bar{W}_d(p)=\left[\alpha^{-1}(\zeta)\beta(\zeta)\right]_{|\zeta=e^{-pt}}=W_d(\zeta)_{|\zeta=e^{-pT}},$$

где $W_d(\zeta)=\alpha^{-1}(\zeta)\beta(\zeta)$ — передаточная матрица дискретного регулятора.

Как показано в [26], ряды, фигурирующие в (3.9), сходятся, и их суммы могут быть записаны в замкнутой форме.

Далее правую часть (3.8) будем называть стандартной формой ППМ $W_{z_ix}(p,t)$.

Из (2.9) следует, что при входе $x(t)$ и выходе $\bar{z}(t)$ соответствующая ППМ $W_{\bar{z}x}(p,t)$ системы S_g имеет вид

(3.10)
$$W_{\bar{z}x}(p,t)=\begin{bmatrix} W_{z_1x(p,t)} \\ \dots \\ W_{z_\gamma x}(p,t)\end{bmatrix},$$

что с учетом (3.8) приводит к формуле

(3.11)
$$W_{\bar{z}z}(p,t)=\varphi_{\bar{L}_\tau\mu}(T,p,t)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p)+\bar{K}_\tau(p).$$

Здесь

(3.12)
$$\varphi_{\bar{L}_\tau\mu}(T,p,t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar{L}_\tau(p+kj\omega)\mu(p+kj\omega)e^{kj\omega t}$$

и $\bar{L}_\tau(p),\bar{K}_\tau(p)$ — матрицы (3.2), а $M_\tau(p)$ и $\tilde{R}_N(p)$ — те же, что в (3.5). Правую часть формулы (3.11) будем называть стандартной формой ППМ для импульсной системы с множественными запаздываниями.

4. Постановка и решение проблемы стандартизируемости

О п р е д е л е н и е 1. *Далее импульсную систему произвольной структуры S^0, состоящую из совокупности линейных стационарных элементов и импульсного регулятора (2.2)–(2.4), имеющую векторный вход $x(t)$ размеров $\ell\times 1$ и векторный выход $\bar{z}(t)$ размеров $r\times 1$, будем называть структурно стандартизируемой, если для нее существует ППМ $W^0_{\bar{z}x}(p,t)$ $r\times\ell$ от* *входа $x(t)$ к выходу $\bar{z}(t)$, которая имеет стандартную форму* (3.11) *с матрицами $\bar{K}_\tau(p)$ и $\bar{L}_\tau(p)$, имеющими вид* (3.2) *и матрицами $M_\tau(p)$ и $N_\tau(p)$ вида* (3.5).

Определение 2. *Структурно стандартизируемую систему S^0 с ППМ $W^0_{\bar{z}x}(p,t)$ будем называть стандартизируемой, если существует обобщенная стандартная система S^0_g, ППМ которой $W_{\bar{z}x}(p,t)$ совпадает с ППМ $W^0_{\bar{z}x}(p,t)$.*

Далее обобщенную стандартную систему S^0_g будем называть порождающей для стандартизируемой системы S^0. При этом системы S^0 и S^0_g считаются эквивалентными. Установление факта стандартизируемости системы S^0 имеет важное практическое значение, так как позволяет перенести на систему S^0 метод H_2-оптимизации, предложенный в [26] для системы S_τ и обобщенный на систему S_g в данной статье. Данный раздел посвящен построению необходимых и достаточных условий стандартизируемости произвольной структурно стандартизируемой системы.

Для произвольной рациональной матрицы $W(p)$ существует единственная полиномиальная матрица $G(p)$, такая, что справедливо представление

$$W(p) = \tilde{C}(pI_\mu - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + G(p), \tag{4.1}$$

где пара $\tilde{A}, \tilde{B}$ — полностью управляема и пара $\tilde{A}, \tilde{C}$ — полностью наблюдаема.

Определение 3. *Фигурирующее в* (4.1) *целое число $\mu \geqslant 1$ будем называть степенью Мак-Миллана матрицы $W(p)$.*

Общие свойства степени Мак-Миллана описаны в [25].

При этом для обозначения степени Мак-Милана будем использовать обозначение $\mathrm{M}\deg$

$$\mu = \mathrm{M}\deg W(p). \tag{4.2}$$

Степень Мак-Миллана полиномиальной матрицы будем полагать равной нулю.

Пусть матрица (4.1) является элементом блочной рациональной матрицы

$$\bar{W}(p) = \begin{bmatrix} W_1(p) & W_2(p) \\ W_3(p) & W(p) \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Определение 4. *Будем говорить, что матрица $W(p)$ доминирует в матрице $\bar{W}(p)$, если выполнено равенство*

$$\mathrm{M}\deg \bar{W}(p) = \mathrm{M}\deg W(p) = \mu. \tag{4.4}$$

Необходимые и достаточные условия стандартизируемости импульсной системы S_g дает теорема 1.

Теорема 1. *Пусть импульсная система S^0 с входом $x(t)$ и выходом $\bar{z}(t)$ является структурно стандартизируемой, т.е. имеет ППМ $W^0_{\bar{z}x}(p,t)$ вида* (3.11) *с некоторыми матрицами $\bar{L}_\tau(p)$ и $\bar{K}_\tau(p)$ вида* (3.2), *матрицами $M_\tau(p)$ и $N_\tau(p)$* (3.5) *и постоянными τ_M, τ_N и τ_{K_i}, τ_{L_i} $i = 1, \ldots, \gamma$.*

Тогда для того чтобы система S^0 была стандартизируемой, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

а) *рациональная матрица* $\bar{K}(p)$,

$$\bar{K}'(p) = \left[\ K_1'(p) \quad \ldots \quad K_\gamma'(p)\ \right], \tag{4.5}$$

а также рациональные матрицы $M(p)$ *и* $N(p)$, *фигурирующие в* (3.5) *— строго правильные;*

б) *матрица* $\bar{L}(p)$,

$$\bar{L}'(p) = \left[\ L_1'(p) \quad \ldots \quad L_\gamma'(p)\ \right], \tag{4.6}$$

— по меньшей мере правильная;

в) *матрица* $N(p)$ *доминирует в матрице*

$$\bar{W}(p) = \begin{bmatrix} \bar{K}(p) & \bar{L}(p) \\ M(p) & N(p) \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

т.е. выполнено равенство

$$\mathrm{M}\deg \bar{W}(p) = \mathrm{M}\deg N(p); \tag{4.8}$$

г) *постоянные* τ_M, τ_N *и* τ_{K_i}, τ_{L_i} *удовлетворяют условиям*

$$\tau_N + \tau_{K_i} = \tau_M + \tau_{L_i}; \tag{4.9}$$

д) *для любой пары не равных полюсов* n_i, n_k *матрицы* $N(p)$ *справедливо соотношение вида* (2.8)

$$e^{n_i T} \neq e^{n_k T}. \tag{4.10}$$

Доказательства теоремы 1 и последующих утверждений приведены в Приложении.

Замечание 1. В дальнейшем изложении стандартизируемую систему S^0 и порождающую систему S_g^0 будем отождествлять, предполагая, что соответствующая система соотношений (2.1)–(2.10) дает одно из возможных математических описаний системы S^0.

5. H_2-оптимизация системы S_g

Пусть замкнутый контур (2.1)–(2.4) асимптотически устойчив и входной сигнал $x(t)$ — центрированный векторный белый шум со спектральной плотностью $R_x(p) = I_\ell$. Тогда, следуя [25], можно показать, что в системе S_g устанавливается периодически нестационарный случайный процесс с дисперсией

$$d_{\bar{z}x}(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \operatorname{tr}\left[W_{\bar{z}x}'(-p,t)W_{\bar{z}x}(p,t)\right] dp = d_{\bar{z}x}(t+T), \tag{5.1}$$

где $W_{\bar{z}x}(p,t)$ — ППМ (3.10), tr — обозначение следа матрицы и штрих — оператор транспонирования. При этом число

$$\bar{d}_{\bar{z}x} = \frac{1}{T}\int_0^T d_{\bar{z}x}(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \operatorname{tr} B(p)dp, \tag{5.2}$$

где

$$B(p) = \frac{1}{T}\int_0^T W'_{\bar{z}x}(-p,t)W_{zx}(p,t)dt, \tag{5.3}$$

определяет среднюю дисперсию установившегося выхода за период квантования, а число

$$||S_g||_2 = \sqrt{\bar{d}_{\bar{z}x}} \tag{5.4}$$

определяет H_2-норму системы S_g.

Используя приведенные сведения, можно сформулировать задачу H_2-оптимизации системы S_g.

Заданы матрицы A, B, B_1, C, матрица $h(t)$, а также матрицы C_i, D_i, $i = 1,\ldots,\gamma$. Кроме того, заданы период квантования T и постоянные τ_1, τ_2 и τ_{3i}, $i = 1,\ldots,\gamma$. Требуется найти передаточную матрицу каузального стабилизирующего дискретного регулятора

$$W_d(\zeta) = \alpha^{-1}(\zeta)\beta(\zeta), \tag{5.5}$$

при котором величина H_2-нормы минимальна.

На основании изложенного задача H_2-оптимизации системы S_g сводится к минимизации функционала

$$||S_g||_2^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \operatorname{tr}\left[\frac{1}{T}\int_0^T W'_{\bar{z}x}(-p,t)W_{\bar{z}x}(p,t)dt\right]dp \tag{5.6}$$

на множестве передаточных матриц $W_d(\zeta)$ каузальных стабилизирующих регуляторов.

Как следует из соотношений, приведенных в разделе 3, ППМ $W_{\bar{z}x}(p,t)$ зависит от всех величин τ_1, τ_2 и τ_{3i}, $i = 1,\ldots,\gamma$. При этом естественным является предположение о том, что правая часть (5.6) зависит от всех перечисленных параметров. Однако детальные вычисления показывают, что величина $||S_g||_2^2$ не зависит от τ_1 и τ_{3i}, $i = 1,\ldots,\gamma$. Этот факт вытекает из формулируемой ниже теоремы 2.

Теорема 2. *Обозначим через $\bar{S}_\tau$ расширенную стандартную систему, уравнения которой получаются из уравнений системы S_g при $\tau_1 = 0$, $\tau_{3i} = 0$,*

$i=1,\ldots,\gamma$. *В этом случае уравнения замкнутого контура имеют вид*

$$(5.7)\qquad \begin{gathered} \frac{dv(t)}{dt}=Av(t)+B_1x(t)+Bu(t-\tau_2),\\ y(t)=Cv(t),\\ \xi_k=y(kT),\quad k=0,\pm1,\ldots,\\ \alpha(\zeta)\psi_k=\beta(\zeta)\xi_k,\\ u(t)=h(t-kT)\psi_k,\quad kT<t<(k+1)T, \end{gathered}$$

а уравнение выхода записывается в форме

$$(5.8)\qquad z(t)=\bar{C}v(t)+\bar{D}u(t-\tau_2),$$

где

$$(5.9)\qquad \bar{C}'=\left[\begin{array}{ccc} C_1' & \ldots & C_\gamma' \end{array}\right],\quad \bar{D}'=\left[\begin{array}{ccc} D_1' & \ldots & D_\gamma' \end{array}\right].$$

При этом имеет место равенство

$$(5.10)\qquad ||S_g||_2^2=||\bar{S}_\tau||_2^2.$$

На основании теоремы 2 можно существенно упростить процедуру H_2-оптимизации системы S_g и свести ее к задаче H_2-оптимизации расширенной системы $\bar{S}_\tau$, что может быть выполнено на основе результатов [26]. Соответствующий результат дает теорема 3.

Теорема 3. H_2-оптимальная передаточная матрица каузального дискретного регулятора

$$(5.11)\qquad W_d^0(\zeta)=\alpha_0^{-1}(\zeta)\beta_0(\zeta),$$

обеспечивающая минимум функционала (5.6) *для системы S_g, совпадает с H_2-оптимальной матрицей $\bar{W}_d^0(\zeta)$, обеспечивающей минимум аналогичного функционала для системы $\bar{S}_\tau$* (5.7), (5.8).

Определение 5. Будем говорить, что две импульсные системы, имеющие входы и выходы одинаковых размеров и импульсный регулятор (2.2)–(2.4), *H_2-эквивалентны, если для них передаточные матрицы H_2-оптимальных регуляторов совпадают.*

Замечание 2. С точки зрения определения 1, теорема 3 констатирует, что обобщенная стандартная система S_g и расширенная стандартная система $\bar{S}_\tau$ H_2-эквивалентны.

Это означает, что для построения оптимальной матрицы (5.11) для системы S_g достаточно решить аналогичную задачу для системы $\bar{S}_\tau$ (5.7), (5.8). Существенно, что при этом на систему S_g переносятся все качественные особенности H_2-оптимальной системы $\bar{S}_\tau$, установленные в [26]. В частности, это относится к факту существования множества фиксированных полюсов у H_2-оптимальной системы. Для рассматриваемой системы $\bar{S}_\tau$ это сводится к следующему [26].

Пусть для матрицы $N(p)$ имеются левое и правое MFD (matrix fraction description, left MFD и right MFD — LMFD и RMFD соответственно) [27, 28]

$$N(p) = a_{\ell N}^{-1}(p) b_{\ell N}(p) = b_{rN}(p) a_{rN}^{-1}(p), \tag{5.12}$$

где

$$\deg\det a_{\ell N}(p) = \deg\det a_{rN}(p) = \varkappa. \tag{5.13}$$

Пусть одновременно имеем

$$\mathrm{M}\deg\, M(p) = \varkappa_M, \quad \mathrm{M}\deg\, \bar{L}(p) = \varkappa_{\bar{L}}. \tag{5.14}$$

Из (3.4) и (3.6) следует, что

$$\varkappa_M \leqslant \varkappa, \quad \varkappa_{\bar{L}} \leqslant \varkappa. \tag{5.15}$$

Из (5.14) следует существование MFD:

$$\begin{gathered} M(p) = a_M^{-1}(p) b_M(p), \quad \deg\det a_M(p) = \varkappa_M, \\ \bar{L}(p) = b_{\bar{L}}(p) a_{\bar{L}}^{-1}(p), \quad \deg\det a_{\bar{L}}(p) = \varkappa_{\bar{L}}. \end{gathered} \tag{5.16}$$

При этом, как показано в [25], справедливы равенства

$$a_{\ell N}(p) = \delta_M(p) a_M(p), \quad a_{rN}(p) = a_{\bar{L}}(p) \delta_{\bar{L}}(p), \tag{5.17}$$

где $\delta_M(p)$ и $\delta_{\bar{L}}(p)$ — квадратные полиномиальные матрицы, причем

$$\deg\det \delta_M(p) = \varkappa - \varkappa_M, \quad \deg\det \delta_{\bar{L}}(p) = \varkappa - \varkappa_{\bar{L}}. \tag{5.18}$$

В случае когда полином

$$\delta(p) = \det \delta_M(p) \det \delta_{\bar{L}}(p) \tag{5.19}$$

не сводится к постоянной, что обычно имеет место в практических задачах, его корни $p_1, \ldots, p_\lambda$ будем называть фиксирующими полюсами. В случае когда

$$\operatorname{Re} p_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, \lambda, \tag{5.20}$$

оптимальная матрица (5.11) может быть построена с помощью метода Винера–Хопфа [26]. При этом при $\operatorname{Re} p_i < 0$ число $\zeta_i = e^{-p_i T}$ является корнем характеристического уравнения замкнутой H_2-оптимальной системы, а при $\operatorname{Re} p_i > 0$ аналогичным свойством обладает число $\zeta_i = e^{p_i T}$. Соответствующие числа ζ_i принято называть фиксированными полюсами H_2-оптимальной системы.

Случай, когда среди чисел p_i имеются числа, лежащие на мнимой оси, является критическим. В этом случае существуют две возможности [29]:

а) H_2-оптимальная система находится на границе области устойчивости;

б) H_2-норма не имеет минимума на множестве каузальных стабилизирующих дискретных регуляторов.

6. H_2-оптимизация стандартизируемых импульсных систем

Как следует из (5.13)–(5.17), ППМ стандартизируемой системы S^0 зависит от $2(\gamma+1)$ параметров τ_M, τ_N и τ_{Li}, τ_{Ki}, $i=1,\ldots,\gamma$. Следующее утверждение устанавливает, что стандартизируемая система S^0 H_2-эквивалентна системе с ППМ, зависящей только от параметра τ_N.

Теорема 4. *Стандартизируемая импульсная система S^0, ППМ которой зависит от $2(\gamma+1)$ параметров, H_2-эквивалентна системе S_1^0, ППМ которой получается из ППМ системы S^0 при выполнении равенств:*

$$\begin{gathered}\tau_M = 0,\\ \tau_{Ki} = 0, \quad i=1,\ldots,\gamma,\\ \tau_{Li} = \tau_N, \quad i=1,\ldots,\gamma.\end{gathered} \tag{6.1}$$

7. Заключение

В статье предложен метод H_2-оптимизации многомерных импульсных систем с несколькими запаздываниями, основанный на переходе к эквивалентной системе с одним запаздыванием. Дано основанное на понятии параметрической передаточной матрицы описание класса импульсных систем, для которых такой переход возможен.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Покажем, что условия теоремы 1 выполняются для системы S_g. Прежде всего из (3.4) и (3.6) вытекает выполнение условий а и б. Покажем далее, что для системы S_g выполнено условие в (равенство (4.8)). Для этого отметим, что справедливы равенства

$$\bar{L}(p) = \begin{bmatrix} C_1(pI_\chi - A)^{-1}B + D_1 \\ \ldots \\ C_\gamma(pI_\chi - A)^{-1}B + D_\gamma \end{bmatrix} = \bar{C}(pI_\chi - A)^{-1}B + \bar{D}, \tag{П.1}$$

где

$$\bar{C}' = \begin{bmatrix} C_1' & \ldots & C_\gamma' \end{bmatrix}, \quad \bar{D}' = \begin{bmatrix} D_1' & \ldots & D_\gamma' \end{bmatrix}. \tag{П.2}$$

Кроме того,

$$\bar{K}(p) = \begin{bmatrix} K_1(p) \\ \ldots \\ K_\gamma(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(pI_\chi - A)^{-1}B_1 \\ \ldots \\ C_\gamma(pI_\chi - A)^{-1}B_1 \end{bmatrix} = \bar{C}(pI_\chi - A)^{-1}B_1. \tag{П.3}$$

С помощью (П.1)–(П.3) и (3.6) из (4.7) находим, что

$$\bar{W}(p) = \begin{bmatrix} \bar{K}(p) & \bar{L}(p) \\ M(p) & N(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ C \end{bmatrix} (pI_\chi - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{D} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{П.4}$$

откуда сразу следует, что

$$\mathrm{M}\deg \bar{W}(p) \leqslant \chi. \tag{П.5}$$

С другой стороны, как показано в [25], из (4.7) следует

$$\mathrm{M}\deg \bar{W}(p) \geqslant \mathrm{M}\deg N(p) = \chi, \tag{П.6}$$

поскольку представление (3.6) матрицы $N(p)$ — минимальное.

Сопоставление неравенств (П.5) и (П.6) показывает, что

$$\mathrm{M}\deg \bar{W}(p) = \mathrm{M}\deg N(p), \tag{П.7}$$

т.е. матрица $N(p)$ доминирует в матрице $\bar{W}(p)$. Таким образом, условие в теоремы 1 выполнено. Выполнение условия г вытекает из равенств (3.7). Кроме того, условие д выполняется по предположению. Этим заканчивается доказательство необходимости.

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть для ППМ системы S^0 выполнены условия а–д. Тогда матрицы $\bar{K}(p), M(p), N(p)$ — строго правильные, а матрица $\bar{L}(p)$ — по меньшей мере правильная. Пусть имеем минимальное представление

$$N(p) = C(pI_\chi - A)^{-1}B. \tag{П.8}$$

Тогда из (4.4) в силу [25] имеем

$$\begin{gathered} \bar{K}(p) = \bar{C}(pI_\chi - A)^{-1}B_1, \quad \bar{L}(p) = \bar{C}(pI_\chi - A)^{-1}B + \bar{D}, \\ M(p) = C(pI_\chi - A)^{-1}B_1, \end{gathered} \tag{П.9}$$

где $B_1, \bar{C}, \bar{D}$ — постоянные матрицы соответствующих размеров. При этом

$$\bar{C}' = \begin{bmatrix} C_1' & \ldots & C_\gamma' \end{bmatrix}, \quad \bar{D}' = \begin{bmatrix} D_1' & \ldots & D_\gamma' \end{bmatrix} \tag{П.10}$$

и C_i, D_i — постоянные матрицы размеров $r_i \times \chi$ и $r_i \times m$ соответственно.

Далее, учитывая (4.9), можно положить:

$$\begin{gathered} \tau_1 = \tau_M, \quad \tau_2 = \tau_N, \\ \tau_{3i} = \tau_{Ki} - \tau_M = \tau_{Li} - \tau_N. \end{gathered} \tag{П.11}$$

При этом непосредственно проверяется, что обобщенная стандартная система S_g, в которой

$$\begin{gathered} \frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + B_1 x(t-\tau_1) + Bu(t-\tau_2), \\ y(t) = Cv(t), \\ z_i(t) = C_i v(t-\tau_{3i}) + D_i u(t-\tau_2-\tau_{3i}), \quad i = 1, \ldots, \gamma, \end{gathered} \tag{П.12}$$

и уравнения импульсного регулятора имеют вид (2.2)–(2.4), имеет ППМ $W_{\bar{z}x(p,t)}$, совпадающую с ППМ $W^0(p,t)$ изучаемой системы. Этим заканчивается доказательство достаточности. Теорема 1 доказана.

Далее доказательства основных утверждений для упрощения выкладок будем рассматривать для случая $\gamma = 2$. Это предположение не нарушает общности, так как соответствующие доказательства очевидным образом распространяются на случай произвольного γ.

Доказательство теоремы 2. При $\gamma = 2$ замкнутый контур системы S_g описывается уравнениями (2.1)–(2.4), а вектор наблюдаемого выхода $\bar{z}(t)$ определяется соотношением

$$\bar{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \tag{П.13}$$

где $z_i(t)$ — векторы $r_i \times 1$, имеющие вид:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= C_1(t-\tau_{31}) + D_1 u(t-\tau_2-\tau_{31}), \\ z_2(t) &= C_2(t-\tau_{32}) + D_2 u(t-\tau_2-\tau_{32}). \end{aligned} \tag{П.14}$$

ППМ системы S_g в данном случае в соответствии с (3.8), (3.10) равна

$$W_{\bar{z}x}(p,t) = \begin{bmatrix} W_{z_1x}(p,t) \\ W_{z_2x}(p,t) \end{bmatrix}, \tag{П.15}$$

где

$$W_{z_ix}(p,t) = \varphi_{L_i\tau\mu}(T,p,t)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p) + K_{i\tau}(p), \quad i = 1,2, \tag{П.16}$$

и все входящие в (П.16) величины определяются в соответствии с (3.9). Используя (3.11), имеем:

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}x}(p,t) &= \varphi_{\bar{L}_\tau\mu}(T,p,t)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p) + \bar{K}_\tau(p), \\ W'_{\bar{z}x}(-p,t) &= M'_\tau(-p)\tilde{R}'_N(-p)\varphi'_{\bar{L}_\tau\mu}(T,-p,t) + \bar{K}'_\tau(-p). \end{aligned} \tag{П.17}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W'_{\bar{z}x}(-p,t)W_{\bar{z}x}(p,t) &= \bar{K}'_\tau(-p)\bar{K}_\tau(p) + \\ &+ M'_\tau(-p)\tilde{R}'_N(-p)\varphi'_{\bar{L}_\tau\mu}(T,-p,t)\varphi_{\bar{L}_\tau\mu}(T,p,t)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p) + \\ &+ M'_\tau(-p)\tilde{R}'_N(-p)\varphi'_{\bar{L}_\tau\mu}(T,-p,t)\bar{K}_\tau(p) + \\ &+ \bar{K}'_\tau(-p)\varphi_{\bar{L}_\tau\mu}(T,p,t)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p). \end{aligned} \tag{П.18}$$

После подстановки этого выражения в (5.3) получается

$$\begin{aligned} B(p) &= M'_\tau(-p)\tilde{R}_N(-p)\tilde{D}_L(p)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p) + \bar{K}'_\tau(-p)\bar{K}_\tau(p) + \\ &+ M'_\tau(-p)\tilde{R}'_N(-p)Q'_{\bar{L}\tau}(-p)\bar{K}_\tau(p) + \bar{K}'_\tau(-p)Q_{\bar{L}\tau}(p)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p), \end{aligned} \tag{П.19}$$

где использованы обозначения:

$$\tilde{D}_{\bar{L}}(p) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi'_{\bar{L}_\tau\mu}(T,-p,t)\varphi_{L_\tau\mu}(t,p,t)dt,$$

$$Q_{\bar{L}_\tau}(p) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi_{\bar{L}_\tau\mu}(T,p,t)dt, \tag{П.20}$$

$$Q'_{\bar{L}_\tau}(-p) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi'_{\bar{L}_\tau\mu}(T,-p,t)dt$$

и

$$\varphi_{\bar{L}_\tau\mu}(T,p,t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar{L}_\tau(p+kj\omega)\mu(p+kj\omega)e^{kj\omega t},$$

$$\varphi'_{\bar{L}_\tau\mu}(T,-p,t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu'(-p+kj\omega)\bar{L}'_\tau(-p+kj\omega)e^{kj\omega t}. \tag{П.21}$$

Подставляя (П.21) в первую формулу (П.20), после почленного интегрирования получим

$$\tilde{D}_{\bar{L}}(p) = \frac{1}{T}\tilde{D}_{\underline{\mu'}\underline{\bar{L}'_\tau}\bar{L}_\tau\mu}(T,p,0), \tag{П.22}$$

где

$$\tilde{D}_{\underline{\mu'}\underline{\bar{L}'_\tau}\bar{L}_\tau\mu}(T,p,0) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu'(-p-ki\omega)\bar{L}'_\tau(-p-kj\omega)\bar{L}_\tau(p+kj\omega)\mu(p+kj\omega). \tag{П.23}$$

Кроме того, из (П.20) и (П.21) следует

$$Q_{\bar{L}_\tau}(p) = \frac{1}{T}\bar{L}_\tau(p)\mu(p),$$

$$Q'_{\bar{L}_\tau}(-p) = \frac{1}{T}\mu'(-p)\bar{L}'_\tau(-p). \tag{П.24}$$

Для дальнейших преобразований отметим, что в силу (3.2) имеем в рассматриваемом случае

$$\bar{L}_\tau(p) = \begin{bmatrix} L_1(p)e^{-p\tau_{L1}} \\ L_2(p)e^{-p\tau_{L2}} \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}'_\tau(-p) = \begin{bmatrix} L'_1(-p)e^{p\tau_{L_1}} & L'_2(-p)e^{p\tau_{L_2}} \end{bmatrix}. \tag{П.25}$$

Произведение последних выражений имеет вид

$$\bar{L}'_\tau(-p)\bar{L}_\tau(p) = \bar{L}'(-p)\bar{L}(p), \tag{П.26}$$

где использованы обозначения

$$\bar{L}(p) = \begin{bmatrix} L_1(p) \\ L_2(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{L}'(-p) = \begin{bmatrix} L'_1(-p) & L'_2(-p) \end{bmatrix}. \tag{П.27}$$

С учетом (П.27) из (П.22), (П.23) получается, что

$$\begin{gathered} \tilde{D}_{\bar{L}}(p) = \frac{1}{T}\tilde{D}_{\underline{\mu'}\underline{\bar{L}}'\bar{L}\mu}(T,p,0) = \\ = \frac{1}{T}\tilde{D}_{\underline{\mu'}\underline{L}'_1 L_1\mu}(T,p,0) + \frac{1}{T}\tilde{D}_{\underline{\mu'}\underline{L}'_2 L_2\mu}(T,p,0). \end{gathered} \tag{П.28}$$

Продолжая вычисления, отметим, что из (П.24) и (П.25) имеем:

$$\begin{gathered} Q_{\bar{L}_\tau}(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T}L_1(p)e^{-p\tau_{L1}} \\ \dfrac{1}{T}L_2(p)e^{-p\tau_{L2}} \end{bmatrix}\mu(p), \\ Q'_{\bar{L}_\tau}(-p) = \mu'(-p)\begin{bmatrix} \dfrac{1}{T}L'_1(-p)e^{p\tau_{L1}} & \dfrac{1}{T}L'_2(-p)e^{p\tau_{L2}} \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{П.29}$$

Далее, используя (3.2), находим, что

$$\begin{gathered} \bar{K}_\tau(p) = \begin{bmatrix} K_1(p)e^{-p\tau_{K1}} \\ K_2(p)e^{-p\tau_{K2}} \end{bmatrix}, \\ \bar{K'}_\tau(-p) = \begin{bmatrix} K'_1(-p)e^{p\tau_{K1}} & K'_2(-p)e^{p\tau_{K2}} \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{П.30}$$

При этом из (П.24), (П.25) следует

$$\begin{gathered} \bar{K}'_\tau(-p)Q_{\bar{L}_\tau}(p) = \frac{1}{T}K'_1(-p)L_1(p)\mu(p)e^{p(\tau_{K1}-\tau_{L1})} + \\ + \frac{1}{T}K'_2(-p)L_2(p)\mu(p)e^{p(\tau_{K2}-\tau_{L2})}. \end{gathered} \tag{П.31}$$

Отсюда, учитывая, что

$$M_\tau(p) = M(p)e^{-p\tau_1}, \tag{П.32}$$

получаем из (П.31), что

$$\begin{gathered} \bar{K}'_\tau(-p)\bar{Q}_{\bar{L}_\tau}(p)\tilde{R}_N(p)M_\tau(p) = \\ = \frac{1}{T}K'_1(-p)L_1(p)\mu(p)\tilde{R}_N(p)M(p)e^{p(\tau_{K1}-\tau_{L1}-\tau_1)} + \\ + \frac{1}{T}K'_2(-p)L_2(p)\mu(p)\tilde{R}_N(p)M(p)e^{p(\tau_{K2}-\tau_{L2}-\tau_1)}. \end{gathered} \tag{П.33}$$

Если учесть вытекающие из (3.7) соотношения

$$\tau_{Ki} - \tau_{Li} - \tau_1 = -\tau_2 = -\tau_N, \quad i = 1, 2, \tag{П.34}$$

то (П.33) примет вид

$$\begin{gathered}\bar{K}'_\tau(-p) Q_{\bar{L}_\tau}(p) \tilde{R}_N(p) M_\tau(p) = \\ = \frac{1}{T} \bar{K}'(-p) \bar{L}(p) \mu(p) \tilde{R}_N(p) M(p) e^{-p\tau_N},\end{gathered} \tag{П.35}$$

где, как и ранее,

$$\bar{K}(p) = \begin{bmatrix} K_1(p) \\ K_2(p) \end{bmatrix}. \tag{П.36}$$

Учитывая (3.9), приходим к выводу, что правая часть формулы (П.35) не зависит от постоянных τ_1 и τ_{3i}, $i = 1, 2$, и зависит только от запаздывания управления $\tau_2 = \tau_N$. Очевидно, что верна также формула

$$\begin{gathered}M'_\tau(-p) \tilde{R}'_N(-p) Q'_{\bar{L}_\tau}(-p) \bar{K}_\tau(p) = \\ = \frac{1}{T} M'(-p) \tilde{R}'_N(-p) \mu'(-p) \bar{L}'(-p) \bar{K}(p) e^{p\tau_N}.\end{gathered} \tag{П.37}$$

Используя полученные выражения и равенство

$$\bar{K}'_\tau(-p) \bar{K}_\tau(p) = \bar{K}'(-p) \bar{K}(p), \tag{П.38}$$

вытекающее из (П.30), а также (П.28), (П.33) и (П.23), соотношение (5.3) можно представить в виде, зависящем только от постоянной τ_N

$$\begin{gathered}TB(p) = M'(-p) \tilde{R}'_N(-p) \tilde{D}_{\underline{\mu'} \underline{\bar{L}'} \bar{L}\mu}(T, p, 0) \tilde{W}_N(p) M(p) + \\ + \bar{K}'(-p) \bar{L}(p) \mu(p) \tilde{R}_N(p) M(p) e^{-p\tau_N} + \\ + M'(-p) \tilde{R}'_N(-p) \mu'(-p) \bar{L}'(-p) \bar{K}(p) e^{p\tau_N} + T\bar{K}'(-p) \bar{K}(p).\end{gathered} \tag{П.39}$$

Отсюда, используя (5.6) и (5.7), приходим к выводу, что величины $||S_g||_2^2$ и $||\bar{S}_\tau||_2^2$ совпадают. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. При $\tau_1 = 0$, $\tau_{3i} = 0$, $i = 1, \ldots, \gamma$, из соотношений (2.1)–(2.4) и (2.9), (2.10) получаем, что уравнения расширенной системы $\bar{S}_\tau$ имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + B_1 x(t) + Bu(t - \tau_2), \\ y(t) = Cx(t), \\ \xi_k = y(kT), \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \\ \alpha(\zeta)\psi_k = \beta(\zeta)\xi_k, \\ u(t) = h(t - kT)\psi_k, \quad kT < t < (k+1)T, \\ z(t) = \bar{C}v(t) + \bar{D}u(t - \tau_2),\end{gathered} \tag{П.40}$$

где $\bar{C}$ и $\bar{D}$ — постоянные матрицы, определенные соотношениями (П.9). При этом в силу (3.7) получаем, что для системы $\bar{S}_\tau$ справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}\tau_M = \tau_1 = 0, \quad \tau_N = \tau_2, \\ \tau_{Ki} = 0, \quad \tau_{Li} = \tau_N, \quad i = 1, 2.\end{gathered} \tag{П.41}$$

В соответствии с (3.11) ППМ системы $\bar{S}_\tau$ имеет вид

$$\bar{W}(p,t) = \varphi_{\bar{L}\mu}(T,p,t)\tilde{R}_N(p)M(p) + \bar{K}(p), \tag{П.42}$$

где

$$\begin{gathered}\bar{L}(p) = \bar{C}(pI_\chi - A)^{-1}B + \bar{D}, \\ \bar{K}(p) = \bar{C}(pI_\chi - A)^{-1}B_1.\end{gathered} \tag{П.43}$$

Используя (П.42), можно после преобразований прийти к соотношению (П.39). Отсюда вытекает, что выражения для H_2-нормы систем S_g и $\bar{S}_\tau$ совпадают.

Поскольку множества передаточных матриц стабилизирующих дискретных регуляторов для систем S_g и $\bar{S}_\tau$ также совпадают, то приходим к выводу, что H_2-оптимальная программа управления для системы $\bar{S}_\tau$ одновременно является H_2-оптимальной программой управления для системы S_g и наоборот. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть стандартизируемая система S^0 имеет ППМ $\bar{W}_{\bar{z}x}(p,t)$ с некоторыми матрицами $\bar{K}(p)$, $\bar{L}(p)$, $M(p)$, $N(p)$ и постоянными τ_M, τ_N и τ_{Ki}, τ_{Li}, $i = 1, 2$.

Тогда в соответствии с замечанием 2 предполагаем, что система S^0 описывается соотношениями вида (2.1)–(2.10) с теми же матрицами $M(p)$, $N(p)$ и $K_i(p)$, $L_i(p)$, $i = 1, \ldots, \gamma$, и постоянными

$$\begin{gathered}\tau_1 = \tau_M, \quad \tau_2 = \tau_N, \\ \tau_{3i} = \tau_{K_i} - \tau_M = \tau_{Li} - \tau_N,\end{gathered} \tag{П.44}$$

что следует из (3.7). При этом в силу замечания 2 система S^0 H_2-эквивалентна системе $\bar{S}_\tau$, уравнения которой имеют вид (5.7), (5.8) при $\tau_2 = \tau_N$. Переходя от уравнений системы $\bar{S}_\tau$ к соответствующей ППМ, приходим к утверждению теоремы 4. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear Optimal Control Systems. N.Y.: Wiley-Interscience, 1972.
2. *Ackermann J.* Abtastregelung. Berlin: Springer-Verlag, 3 ed., 1988.
3. *Astrom K.J., Wittenmark B.* Computer Controlled Systems: Theory and Design. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 3rd ed., 1997.
4. *Khargonekar P.P., Sivarshankar N.* H_2-optimal Control for Sampled-Data Systems // Syst. Control Lett. 1992. V. 18. P. 627–631.

5. *Bamieh B.A., Pearson J.B.* The H_2-problem for Sampled-Data Systems // Syst. Control Lett. 1992. V. 19. No. 1. P. 1–12.
6. *Chen T., Francis B.A.* H_2-optimal Sampled-Data Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. AC-36. No. 1. P. 387–397.
7. *Yamamoto Y.* A Function Space Approach to Sampled-Data Systems and Tracking Problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. AC-39. No. 4. P. 703–713.
8. *Hagiwara T., Araki M.* FR-operator Approach to the H_2-analysis and Synthesis of Sampled-Data Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1995. V. AC-40. No. 8. P. 1411–1421.
9. *Chen T., Francis B.A.* Optimal sampled-data control systems. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
10. *Fridman E., Shaked U.* Sampled-Data H_∞ State Feedback Control of Systems with State Delays // Int. J. Control. 2000. V. 73. No. 12. P. 1115–1128.
11. *Khargonekar P.P., Yamamoto J.* Delayed Signal Reconstruction Using Sampled-Data Control // Proc. 35th IEEE Conf. on Decision Control, Kyoto. 1996. P. 1259–1263.
12. *Yamamoto Y., Hara S.* Performance lower bound for a sampled-data signal reconstruction / V. Blondel, E. Sontag, M. Vidyasagar, J. Willems, eds. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer-Verlag. 1998. P. 277–279.
13. *Lennartson B.* Sampled-Data Control for Time-Delayed Plants // Int. J. Control. 1989. V. 49. P. 1601–1614.
14. *Hara S., Fujioka H., Kabamba P.T.* A Hybrid State-Space Approach to Sampled-Data Feedback Control // Linear Algebra and Its Applications. 1994. V. 205–206. P. 679–712.
15. *Wittenmark B.* Sampling of a System with Time Delay // IEEE Trans. Autom. Control. May 1985. V. AC-30. P. 507–510.
16. *Jugo J.* Discretization of Continuous Time-Delay Systems // Proc. 15th IFAC Triennial World Congr. V. Linear systems / Time-delay systems. P. REG1450, Barcelona, 2002.
17. *Polyakov K.Yu.* H_2-optimal Sampled-Data Control of Plants with Multiple Input and Output Delays // Asian J. Control. June 2006. V. 8. No. 2. P. 107–116.
18. *Mirkin L., Palmor Z.J., Shneiderman D.* Dead-Time Compensation for Systems with Multiple I/O Delays: a Loop-Shifting Approach // IEEE Trans. Autom. Control. November 2011. V. 56. No. 11.
19. *Mirkin L., Shima T., Tadmor G.* Analog Loop Shifting in H_2 Optimization of Input-Delay Sampled-Data Systems // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. December 10–13, 2013. Florence, Italy.
20. *Mirkin L., Shima T., Tadmor G.* Sampled-Data H_2 Optimization of Systems with I/O Delays via Analog Loop Shifting // IEEE Trans. Autom. Control. March 2014. V. 59. No. 3.
21. *Розенвассер Е.Н.* Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. М.: Наука, 1994.
22. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P.* Digitale Regelung in kontinuierlicher Zeit — Analyse und Entwurf im Frequenzbereich. Stuttgart: B.G. Teubner, 1997.
23. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P.* Algebraische Methoden zur Theorie der Mehrgrößen-Abtastsysteme. Rostock: Universitätsverlag, 2000. ISBN 3-86009-195-6.
24. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P.* Computer Controlled Systems — Analysis and Design with Process-orientated Models. London–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.

25. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P.* Multivariable Computer-Controlled Systems — A Transfer Function Approach. London: Springer, 2006.

26. *Лямпе Б.П., Розенвассер Е.Н.* H_2-оптимизация импульсных систем с запаздыванием на основе метода параметрической передаточной матрицы // АиТ. 2010. № 1. С. 57–79.

    Lampe B.P., Rosenwasser E.N. H_2-optimization of Time-Delayed Sampled-Data Systems on the Basis of the Parametric Transfer Matrix Method // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 1. P. 49–69.

27. *Kailath T.* Linear Systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1980.

28. *Барабанов А.Е.* Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 1996.

29. *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Ленинград: Из-во ЛГУ, 1985.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 10.01.2018

После доработки 26.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018