Автоматика и телемеханика, № 3, 2019

Нелинейные системы

© 2019 г. **А.А. КОСОВ, канд. физ.-мат. наук (kosov_idstu@mail.ru)**
(Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск),
М.В. КОЗЛОВ (kozlov.mvl@yandex.ru)
(Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

Рассматривается задача об устойчивости сингулярных переключаемых систем с однородными функциями в правых частях. На основе декомпозиции на изолированные подсистемы быстрых и медленных движений получены условия устойчивости полной системы при произвольном режиме переключений. Предложен способ выбора стабилизирующей обратной связи в случае, когда измерению доступны только быстрые переменные.

Ключевые слова: устойчивость, сингулярные системы, системы с переключениями, однородные функции, общие функции Ляпунова.

DOI: 10.1134/S0005231019030036

1. Введение

Изучение динамики сингулярных систем, моделируемых дифференциальными уравнениями с малым параметром при старшей производной, было начато А.Н. Тихоновым [1]. Эти системы играют важную роль в современной теории управления и интенсивно изучаются (см., например, обзор [2], где цитируется более 500 работ по этой тематике). Начиная с основополагающей статьи [3] для анализа устойчивости сингулярных систем разрабатывается подход, основанный на декомпозиции исходной системы на две изолированные подсистемы для “быстрых” и “медленных” переменных, каждая из которых существенно меньшей размерности, чем исходная, и изучении их в отдельности. Аналогичный подход применяется и для решения задачи стабилизации, т.е. синтеза такого закона управления, который гарантирует нужные свойства устойчивости замкнутой системе [4]. При этом управляющие обратные связи могут формироваться не по всем координатам, а только по некоторым, например “быстрым” переменным [5].

В теории управления активно изучаются гибридные системы, описываемые уравнениями с переключениями правых частей в ходе процесса управления [6–8]. Наличие переключений существенно затрудняет решение задач анализа динамики и синтеза стабилизирующих управлений, поэтому актуальной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-31-50034).

задачей является развитие теории управления для такого рода гибридных систем [9]. Основным, а часто и единственным строгим методом исследования динамики гибридных систем обычно выступает метод функций Ляпунова (см., например, [10–14]). Как следует из обзоров [6–8], наиболее изучены вопросы устойчивости, стабилизации, построения общих квадратичных функций Ляпунова для линейных систем. Нелинейные системы с переключениями в этом плане значительно менее изучены. Как отмечается в [9, с. 206], необходимо прежде всего исследовать отдельные специальные классы нелинейных систем с переключениями, такие как однородные системы или системы с обратными связями. Устойчивость для класса нелинейных сингулярных систем с переключениями ранее практически не изучалась в литературе, например, в подробном обзоре [2] в разделе об устойчивости нелинейные системы с переключениями не упоминаются.

Основная цель данной статьи состоит в получении условий асимптотической устойчивости сингулярной системы с переключениями и однородными функциями в правых частях в терминах аналогичных свойств отдельных изолированных подсистем быстрых и медленных движений. Переход к изолированным подсистемам существенно снижает размерность задачи и упрощает построение общей функции Ляпунова для конечного семейства дифференциальных уравнений. Рассмотрены два случая: один, когда в правых частях присутствуют однородные первого порядка функции, удовлетворяющие локальному условию Липшица, и второй, когда присутствуют однородные полиномы нечетной степени от медленных переменных. Доступными измерению считаются только быстрые переменные, и именно по ним строится стабилизирующая обратная связь. При этом матричные коэффициенты выбираются в отдельности для двух изолированных подсистем. Тем самым исходная задача декомпозируется на две аналогичных, только меньшей размерности, что существенно упрощает решение.

2. Устойчивость сингулярных однородных первого порядка систем с переключениями

Рассмотрим семейство сингулярно возмущенных систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^{(k)}(x) + A_{12}^{(k)} y, \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x) + A_{22} y. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $k \in S = \{1, \ldots, N\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$; ε — малый положительный параметр, $A_{12}^{(k)}$ и A_{22} — матрицы соответствующих размерностей; $g(x)$ и $f^{(k)}(x)$ — однородные первого порядка функции, удовлетворяющие локальному условию Липшица. Семейство (1) порождает систему с переключениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^{(\sigma(t))}(x) + A_{12}^{(\sigma(t))} y, \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x) + A_{22} y. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\sigma : [0, +\infty) \to S$ — кусочно-постоянная правосторонне непрерывная функция, имеющая в каждом конечном отрезке лишь конечное число точек разрыва. Функция $\sigma(t)$ называется законом или режимом переключения и показывает, какая система из семейства (1) функционирует в каждый момент времени. Задача состоит в том, чтобы получить условия устойчивости нулевого решения системы (2) при произвольном режиме переключений.

Используя второе уравнение, выпишем линейную систему

$$\dot{y} = A_{22}y \tag{3}$$

и выражение y через x

$$y = -A_{22}^{-1}g(x). \tag{4}$$

Подставляя (4) в первое уравнение (1), придем к семейству уравнений с однородными правыми частями

$$\dot{x} = f^{(k)}(x) - A_{12}^{(k)}A_{22}^{-1}g(x). \tag{5}$$

Т е о р е м а 1. *Если линейная система* (3) *асимптотически устойчива, а для семейства однородных систем* (5) *построена однородная порядка* $\eta > 1$ *общая функция Ляпунова* $V_1(x)$, *удовлетворяющая оценкам*

$$a_1||x||^\eta \leqslant V_1(x) \leqslant a_2||x||^\eta, \quad ||\mathrm{grad}_x V_1(x)|| \leqslant a_3||x||^{\eta-1}, \tag{6}$$
$$\dot{V}_1\Big|_{(5)} \leqslant -a_4||x||^\eta, \quad a_i > 0,$$

то существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *нулевое решение системы* (2) *асимптотически устойчиво при произвольных переключениях.*

Здесь через $\dot{V}_1\Big|_{(5)}$ обозначена производная от функции $V_1(x)$ в силу системы (5) и всюду далее аналогичным образом обозначаются производные в силу соответствующих систем.

Доказательство приведено в Приложении. Данная теорема декомпозирует и упрощает процесс исследования устойчивости гибридной системы (2). Построение общей функции Ляпунова проводится не для полного семейства (1), а для семейства однородных систем (5) меньшей размерности. При этом могут использоваться частные функции Ляпунова для отдельных систем семейства (5) и теорема 1 из [12].

Теперь рассмотрим вопрос об условиях неустойчивости.

Т е о р е м а 2. *Если линейная система* (3) *асимптотически устойчива, а для семейства однородных систем* (5) *построена однородная порядка* $\eta > 1$ *общая функция Ляпунова* $V_1(x)$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $V_1(0) = 0$, *сколь угодно близко к точке* $x = 0$ *есть точки* $\bar{x}$, *в которых* $V_1(\bar{x}) < 0$;

2) $||\mathrm{grad}_x V_1(x)|| \leqslant a_3||x||^{\eta-1}$;

3) $\dot{V}_1\Big|_{(5)} \leqslant -a_4||x||^\eta, \quad a_i > 0,$

то существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *нулевое решение системы* (2) *неустойчиво при произвольных переключениях.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

3. Стабилизация сингулярных переключаемых систем с однородными полиномами

Рассмотрим задачу стабилизации до асимптотической устойчивости нулевого решения сингулярной системы с однородными полиномами относительно “медленных” переменных в правых частях при наличии переключений. Доступными измерению при этом считаются только “быстрые” переменные, и именно по ним строится стабилизирующая обратная связь.

Пусть $\mu > 1$ – некоторое нечетное число, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$. Через $x^{\{\mu\}} = \mathrm{col}(x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots \ldots, x_{n_x}^\mu) \in \mathbb{R}^{n_x}$ будем обозначать вектор, составленный из μ степеней компонент вектора $x \in \mathbb{R}^{n_x}$. Через $x^{[\mu]} \in \mathbb{R}^{N_x}$ будем обозначать вектор $x^{[\mu]} = \mathrm{col}\left(x_1^\mu, x_1^{\mu-1}x_2, \ldots, x_{n_x}^\mu\right) \in \mathbb{R}^{N_x}$, составленный из всех расположенных в лексикографическом порядке мономов μ-й степени.

Рассмотрим семейство управляемых систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}^{(i)} x^{[\mu]} + A_{12}^{(i)} y + U_1, \\ \varepsilon \dot{y} &= A_{21} x^{[\mu]} + A_{22} y + U_2, \\ i &\in S = \{1, \ldots, N\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, A_{21}, A_{22}, $A_{11}^{(i)}$, $A_{12}^{(i)}$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\varepsilon > 0$ — малый положительный параметр. Управляющие воздействия U_1, U_2 строятся по принципу обратной связи по “быстрым” переменным y, так как только они предполагаются доступными непосредственному измерению.

Семейство (7) порождает гибридную систему с переключениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}^{(\sigma(t))} x^{[\mu]} + A_{12}^{(\sigma(t))} y + U_1, \\ \varepsilon \dot{y} &= A_{21} x^{[\mu]} + A_{22} y + U_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\sigma : [0, +\infty) \to S$ — кусочно-постоянная правосторонне непрерывная функция с конечным числом точек разрыва в каждом конечном отрезке.

Управления выберем линейными

$$U_1 = K_1\, y, \quad U_2 = K_2\, y, \tag{9}$$

где K_1 и K_2 — соответственно постоянные прямоугольная $n_x \times n_y$ и квадратная $n_x \times n_x$ матрицы. Задача стабилизации состоит в том, чтобы выбрать матрицы K_1 и K_2 так, чтобы нулевое решение системы (8), замкнутой управлением (9), было асимптотически устойчиво при любом режиме переключений $\sigma(t)$. Положим

$$K_2 = -E - A_{22}. \tag{10}$$

Здесь E — единичная матрица. Подставляя (10) во второе уравнение (8) и приравнивая правую часть к нулю, получим

$$y = A_{21} x^{[\mu]}. \tag{11}$$

Заменяя теперь в правой части первого уравнения (8) y выражением (11), приходим к системе с однородной правой частью

$$\dot{x} = \left[A_{11}^{(\sigma(t))} + A_{12}^{(\sigma(t))} A_{21} + K_1 A_{21}\right] x^{[\mu]}. \tag{12}$$

Т е о р е м а 3. Если матрица K_2 выбрана в соответствии с (10), *а матрица K_1 выбрана так, что для системы* (12) *существует общая функция Ляпунова $V_1(x)$, удовлетворяющая оценкам*

$$a_1||x||^\eta \leqslant V_1(x) \leqslant a_2||x||^\eta, \quad ||\mathrm{grad}_x V_1(x)|| \leqslant a_3||x||^{\eta-1},$$

$$\dot{V}_1\Big|_{(12)} \leqslant -a_4||x||^{\eta-1+\mu}, \quad \eta > 1, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1,4},$$

то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение системы (8), *замкнутой указанными управлениями, асимптотически устойчиво при произвольном режиме переключений.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении. Укажем теперь два случая, в которых можно выбрать стабилизирующую матрицу K_1 так, чтобы были выполнены условия теоремы 3.

В случае, когда $N_x = \dim x^{[\mu]} = \dim y = n_y$ и квадратная матрица A_{21} является невырожденной, за счет выбора матрицы K_1 можно сделать матрицу $K_1 A_{21}$ произвольной. Выбирая K_1 так, чтобы было $K_1 A_{21} x^{[\mu]} = -hEx^{\{\mu\}}$, где $h > 0$ — достаточно большое число, получаем, что все условия теоремы 3 будут выполняться для функции $V_1(x) = \frac{1}{2}\,||x||^2$. В случае, когда в системе (8) вместо $x^{[\mu]}$ присутствует только $x^{\{\mu\}}$ и $\mathrm{rank}\, A_{21} = n_x$, матрица $A_{21}^{\mathrm{T}} A_{21}$ является симметричной положительно определенной. Управление U_1 с матрицей $K_1 = -hA_{21}^{\mathrm{T}}$, $h > 0$ стабилизирует систему (12), принимающую вид

$$\dot{x} = \left[A_{11}^{(\sigma(t))} + A_{12}^{(\sigma(t))} A_{21} - hA_{21}^{\mathrm{T}} A_{21}\right] x^{\{\mu\}},$$

при достаточно больших $h > 0$. При этом в качестве функции $V_1(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 3, можно взять $V_1(x) = \frac{1}{\mu+1} \sum\limits_{i=1}^{n_x} x_i^{\mu+1}$.

4. Примеры

П р и м е р 1. Материальная точка малой массы εm движется в трехмерном пространстве под действием кубической пружины с переменным коэффициентом жесткости и сил сопротивления. Уравнения движения имеют вид

$$\varepsilon m\, \ddot{x}_i + b\,\dot{x}_i + a(x)\, x_i^3 = 0, \quad i = 1,2,3,$$
$$a(x) = \frac{a_0}{||x||^2} = \frac{a_0}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad a_0 > 0, \quad b > 0.$$

Не ограничивая общности, массу можем считать единичной $m = 1$. Позиционные силы $F_i(x) = -a(x)\, x_i^3$ являются возвращающими (всегда направлены к равновесию $x = 0$), но не являются потенциальными, так как $\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \neq \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}$, поэтому третья теорема Томсона–Тэта–Четаева [15] не применима.

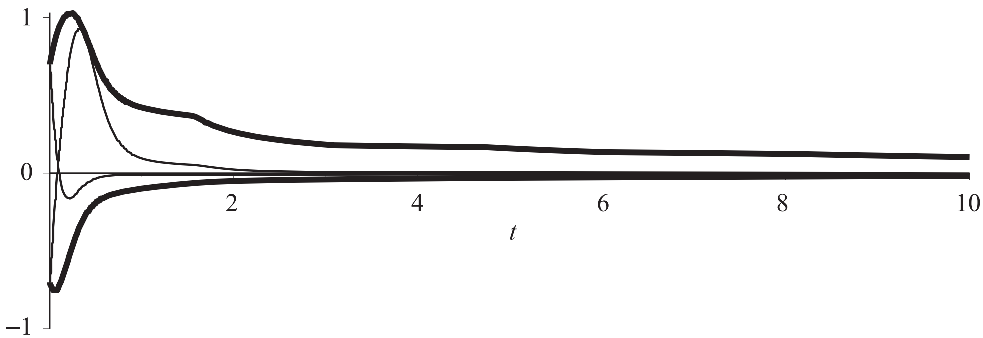

Рис. 1. Решение системы с переключениями из примера 2 при законе переключения $\sigma(t) = 1$ при $\sin 2t \geqslant 0$, и $\sigma(t) = 2$ при $\sin 2t < 0$.

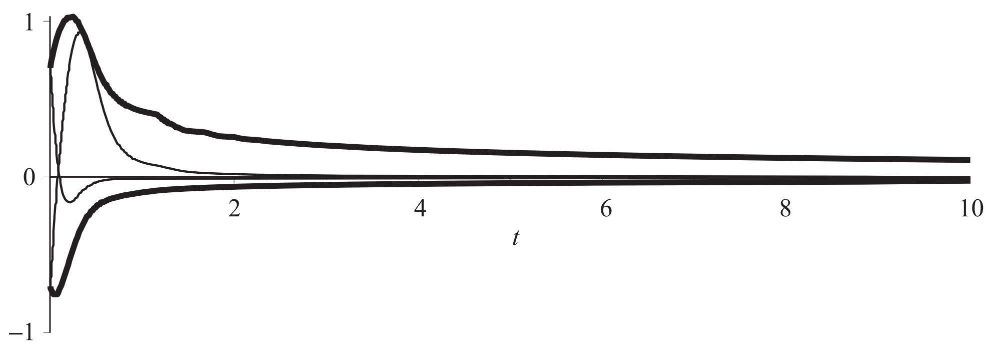

Рис. 2. Решение системы с переключениями из примера 2 при законе переключения $\sigma(t) = 1$ при $\sin 2t^3 \geqslant 0$, и $\sigma(t) = 2$ при $\sin 2t^3 < 0$.

В данном примере линейная система (3) принимает вид $\dot{y}_i = -by_i$, $i = 1, 2, 3$, а однородная система (5) записывается следующим образом: $\dot{x}_i = -\frac{a_0}{b||x||^2}\, x_i^3$, $i = 1, 2, 3$. Применяя теорему 1, устанавливаем, что положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Если же позиционные силы являются отталкивающими, т.е $a_0 < 0$, то из теоремы 2 следует неустойчивость равновесия при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Пример 2. Рассмотрим сингулярную систему

$$\dot{x}_1 = a_1^{(\sigma(t))} x_1^3 + x_2^3 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1^3 + a_2^{(\sigma(t))} x_2^3 + u_2,$$
$$\varepsilon \dot{y}_1 = x_1^3 - y_1, \quad \varepsilon \dot{y}_2 = x_2^3 - y_2.$$

Здесь $\sigma : [0, +\infty) \to S$, $a_i^{(j)} > \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $j \in S$. Из теоремы 3 следует, что при управлении $u_1 = k_1 y_1$, $u_2 = k_2 y_2$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ нулевое решение замкнутой системы будет асимптотически устойчивым при произвольных переключениях, если только коэффициенты обратной связи выбраны в соответствии с условиями $k_i < -1 - \max\limits_{j \in S} a_i^{(j)}$, $i = 1, 2$.

Приведем для иллюстрации графики решений системы с переключениями при следующих значениях параметров: $\varepsilon = 0{,}1$, $S = \{1, 2\}$, $a_1^{(1)} = 3$, $a_1^{(2)} = -3$, $a_2^{(1)} = -1$, $a_2^{(2)} = 3$, коэффициентах, стабилизирующих обратных связей по быстрым переменным $k_1 = k_2 = -4{,}1$, и начальных условиях $x_1(0) = 0{,}25$, $x_2(0) = -0{,}25$, $y_1(0) = -0{,}25$, $y_2(0) = 0{,}25$ для двух различных законов переключения $\sigma(t)$. Изменение медленных переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ показано жирной линией, изменение быстрых переменных $y_1(t)$, $y_2(t)$ показано тонкой линией. Каждая из четырех компонент вектора решения однозначно идентифицируется по начальному условию. Точки излома на кривых соответствуют моментам переключений.

Пример 3. Уравнения системы непрямого управления имеют вид [16, с. 93]

$$\dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}} y - \rho f(\sigma), \quad \dot{y} = Ay + bf(\sigma). \tag{13}$$

Здесь $y \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, c и b — постоянные n-мерные векторы, A — постоянная $n \times n$ матрица, все собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части, нелинейная характеристика $f(\sigma)$ удовлетворяет условию $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$. Первое уравнение системы (13) скалярное и описывает регулятор, второе уравнение векторное и описывает объект управления.

Пусть для объекта управления характерна быстрая динамика, т.е. в уравнениях объекта присутствует малый параметр ε при $\dot{y}$, нелинейная характеристика является степенной $f(\sigma) = k\sigma^\mu$ с нечетной степенью $\mu > 1$ и $k > 0$, регулятор может переключаться на несколько режимов с номерами $j \in S$ (например, с основного режима $j = 1$ на резервный $j = 2$ и обратно вследствие возможных отказов и восстановлений). Тогда после переобозначения $\sigma = x$, $f(\sigma) = kx^\mu = kx^{[\mu]}$ уравнения (13) принимают вид

$$\dot{x} = c_j^{\mathrm{T}} y - \rho_j k x^{[\mu]}, \quad j \in S, \quad \varepsilon \dot{y} = Ay + bkx^{[\mu]}, \tag{14}$$

где ρ_j, $c_j \in \mathbb{R}$, $j \in S$ — переключаемые параметры регулятора. Уравнения (14) являются частным случаем для (7).

Применяя теорему 3 к системе (14) как к системе (7) с уже заданными обратными связями по координатам объекта $y(t)$, приходим к следующему результату. Если выполнены неравенства

$$\rho_j + c_j^{\mathrm{T}} A^{-1} b > 0, \quad j \in S, \tag{15}$$

то нулевое решение $\sigma = 0$, $y = 0$ гибридной системы, порождаемой семейством уравнений (14), асимптотически устойчиво при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при произвольном режиме переключений. Выполнение неравенств (15) является необходимым условием устойчивости для каждой из систем семейства (14), рассматриваемых изолированно, т.е. при фиксированном j [16, с. 97].

В заключение отметим, что аналогичным образом рассматриваются случаи, когда матрица A имеет нулевые собственные значения [16, с. 98], а также когда в системе присутствует не одна, а несколько степенных нелинейностей.

Доказательство теоремы 1. Из асимптотической устойчивости системы (3) следует, что существует квадратичная форма $V_2(z)$, удовлетворяющая условиям

$$b_1||z||^2 \leqslant V_2(z) \leqslant b_2||z||^2, \quad ||\mathrm{grad} V_2(z)|| \leqslant b_3||z||, \quad \dot{V}_2\Big|_{(3)} \leqslant -b_4||z||^2. \tag{П.1}$$

Введем новую переменную по формуле $z = y + A_{22}^{-1}g(x)$. Тогда систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\dot{x} = f^{(\sigma(t))}(x) - A_{12}^{(\sigma(t))}A_{22}^{-1}g(x) + A_{12}^{(\sigma(t))}z,\\ \dot{z} = \varepsilon^{-1}A_{22}z + A_{22}^{-1}\frac{d}{dt}\,g(x(t)).\end{gathered} \tag{П.2}$$

Здесь с учетом локальной липшицевости $g(x)$

$$\frac{d}{dt}\,g(x(t)) = \overline{\lim_{h\to+0}}\,\frac{1}{h}\left[g(x(t+h)) - g(x(t))\right].$$

С учетом свойств функций, входящих в правые части (1), будут иметь место оценки

$$\begin{gathered}\left\|f^{(k)}(x) - A_{12}^{(k)}A_{22}^{-1}g(x)\right\| \leqslant k_1||x||, \quad \left\|A_{12}^{(k)}z\right\| \leqslant k_2||z||,\\ \left\|A_{22}^{-1}\frac{d}{dt}\,g(x(t))\right\| \leqslant k_3\left(k_1||x|| + k_2||z||\right).\end{gathered}$$

Здесь k_1, k_2, k_3 — некоторые положительные числа. В качестве общей функции Ляпунова для системы (П.2) возьмем $V(x,z) = V_1(x) + V_2(z)$. Для ее производной получим оценку

$$\begin{aligned}\dot{V}\Big|_{(\text{П2})} \leqslant -a_4||x||^{\eta} - \varepsilon^{-1}b_4||z||^2 + b_3||z||k_3\left(k_1||x|| + k_2||z||\right) +\\ + a_3||x||^{\eta-1}\left\|A_{12}^{(\sigma(t))}\right\|\,||z||.\end{aligned} \tag{П.3}$$

Без ограничения общности порядок однородности η функции $V_1(x)$ можно считать равным двум. Тогда в правой части (П.3) имеем квадратичную форму, которая при достаточно больших ε^{-1} будет определенно отрицательной. Тем самым теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Вновь рассмотрим в качестве функции Ляпунова $V(x,z) = V_1(x) + V_2(z)$ и для производной в силу системы (П.2) получим ту же самую оценку, что и при доказательстве теоремы 1. Эта производная будет отрицательно определенной при любых переключениях. Однако сама функция $V(x,z)$ теперь может принимать отрицательные значения при $x = \bar{x}$, $z = 0$. Поэтому для $V(x,z)$ выполнены все условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, ссылка на которую завершает доказательство.

Доказательство теоремы 3. Введем новые переменные $z = y - A_{21}x^{[\mu]}$, тогда при управлении (10) система (8) перепишется в виде

$$\text{(П.4)} \qquad \dot{x} = \left[A_{11}^{(\sigma(t))} + A_{12}^{(\sigma(t))}A_{21} + K_1 A_{21}\right] x^{[\mu]} + \left[A_{12}^{(\sigma(t))} + K_1\right] z,$$

$$\dot{z} = -\varepsilon^{-1}z - A_{21}\frac{\partial x^{[\mu]}}{\partial x}\left[\left(A_{11}^{(\sigma(t))} + A_{12}^{(\sigma(t))}A_{21} + K_1 A_{21}\right)x^{[\mu]} + \left(A_{12}^{(\sigma(t))} + K_1\right)z\right].$$

Для входящих в правые части системы (П.4) функций имеют место оценки

$$\left|\left|\left(A_{11}^{(\sigma(t))} + A_{12}^{(\sigma(t))}A_{21} + K_1 A_{21}\right)x^{[\mu]}\right|\right| \leqslant c_1||x||^{\mu},$$

$$\left|\left|\left(A_{12}^{(\sigma(t))} + K_1\right)z\right|\right| \leqslant c_2||z||, \quad c_i > 0.$$

В качестве общей функции Ляпунова для системы (П.4) возьмем $V(x,z) = V_1(x) + \frac{1}{2}||z||^2$. Для ее производной получим оценку

$$\text{(П.5)} \qquad \dot{V}\Big|_{(\text{П4})} \leqslant -a_4||x||^{\eta-1+\mu} + a_3||x||^{\eta-1}c_2||z|| - \varepsilon^{-1}||z||^2 +$$

$$+||A_{21}||\,||z||\,||x||^{\mu-1}\left[c_1||x||^{\mu} + c_2||z||\right].$$

Без ограничения общности можно считать порядок однородности η функции $V_1(x)$ сколь угодно большим. Правая часть (П.5) будет определенно отрицательной в некоторой окрестности нулевого решения $x = 0$, $z = 0$ при выполнении неравенства [17]

$$\frac{\eta - 1}{\eta - 1 + \mu} + \frac{1}{2} > 1.$$

Это неравенство сводится к $\eta > \mu + 1$ и выполняется при достаточно большом η. Ссылка на теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости завершает доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сборник. 1948. Т. 22 (64). № 2. С. 193–204.
2. *Yan Zhang, D. Subbaram Naidu, Chenxiao Cai, Yun Zou.* Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: an overview 2002–2012 // Int. J. Inform. Syst. Sci. 2014. V. 9. No. 1. P. 1–36.
3. *Климушев А.И., Красовский Н.Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикл. мат. и механика. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 680–690.
4. *Yang C., Zhang Q., Zhou L.* Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems / Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
5. *Lobry C., Sari T.* Singular Perturbation Methods in Control Theory / Control lineaire appl. Travaux en cours 64, Hermann, Paris. 2005. P. 151–177.

6. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. V. 49. No. 4. P. 545–592.
7. *Шпилевая О.Я., Котов К.Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (Обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71–87.
8. *Hai Lin, Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54. No. 2. P. 308–322.
9. Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory / Edited by V.D. Blondel & A. Megretski. Princeton, Oxford: Princeton Univer. Press, 2004.
10. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhauser, 2003.
11. *Пакшин П.В., Поздяев В.В.* Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 4. С. 22–27.
12. *Васильев С.Н., Косов А.А.* Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // АиТ. 2011. № 6. С. 27–46.

    Vassilyev S.N., Kosov A.A. Analysis of Hybrid Systems Dynamics Using the Common Lyapunov Functions and Multiple Homomorphisms // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 6. P. 1163–1183.
13. *Александров А.Ю., Косов А.А., Чэнь Я.* Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // АиТ. 2011. № 6. С. 5–17.

    Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Chen Yangzhou. Stability and Stabilization of Mechanical Systems with Switching // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 6. P. 1143–1154.
14. *Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Platonov A.V.* On the Asymptotic Stability of Switched Homogeneous Systems // Syst. Control Lett. 2012. V. 61. No. 1. P. 127–133.
15. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987.
16. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
17. *Александров А.Ю.* Устойчивость движений неавтономных динамических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 15.07.2018

После доработки 19.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018