Автоматика и телемеханика, № 3, 2019

© 2019 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhaivn@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, СОДЕРЖАЩАЯ СВЯЗАННЫЕ ПОДСИСТЕМЫ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ КОЛЕБАНИЙ[1]

Рассматривается периодическая модель, содержащая связанные подсистемы (МССП), которая при отсутствии связи между подсистемами распадается на системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что подсистемы допускают разные типы невырожденных одночастотных колебаний. Решаются задачи существования колебаний в МССП, их устойчивости, естественной стабилизации колебания МССП гладкими периодическими связующими управлениями. Приводится пример.

Ключевые слова: модель, связанные подсистемы, колебание, типы, устойчивость, естественная стабилизация.

DOI: 10.1134/S0005231019030048

1. Введение

Рассматривается модель, содержащая связанные подсистемы (МССП) и описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которой подсистемы — системы автономных ОДУ. Наличие связи между подсистемами определяется параметром связи ε, при нулевом значении которого модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько. Параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае — индивидуальная, сама подсистема может быть линейной или нелинейной и описывать различные процессы: механические, электрические, биофизические и т.д. МССП моделирует сложную систему, в которой одновременно происходят различные связанные между собой процессы. Будет ли МССП автономной или неавтономной — зависит от того, входит ли время явно в связи или нет. В случае когда связи задаются периодическими по времени функциями, получаем периодическую МССП.

Согласно описанию МССП представляет собой иерархическую сеть специального вида. Одноуровневая МССП обычно называется связанной (coupled) системой. МССП становится слабо связанной при малых значениях параметра ε.

Примеры МССП находятся в традиционных (механика, физика, радиотехника, популяционная динамика) и новых (мехатроника, биофизика, медицина, сети и др.) областях знаний. Публикации [1–15] дают некоторое представ-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00587, № 19-01-00146).

ление о возможных постановках задач для МССП и об исследуемых динамических свойствах модели.

Большой интерес представляют колебания связанных систем (см. [1–14]). Так, система трех связанных осцилляторов Ван дер Поля используется в [4] для анализа цикадных ритмов глаз, в [5] строится связанная система для изучения колебаний пар оснований ДНК, в [12] решается проблема синхронизации колебаний энергетических сетей и т.д.

В общетеоретической постановке исследованы вопросы устойчивости и ограниченности решений слабо связанных систем (см. [15]). В такой же постановке решались проблемы переноса свойства динамики (по колебаниям), имеющейся во всех подсистемах МССП, на всю связанную систему. Здесь, начиная с постановки задач исследования МССП в [14], сначала исследовались МССП с подсистемами, содержащими одночастотные колебания одного типа (см. обзор результатов в [16]).

Типы одночастотных колебаний в подсистеме МССП различаются используемыми необходимыми и достаточными условиями

$$f \equiv x(x^0, T) - x^0 = 0, \quad x \in \mathrm{R}^n,$$

существования T-периодического решения в автономной системе, где x – фазовая переменная, x^0 – ее значение при $t = 0$. Пусть выписанное уравнение имеет решение $x^0 = x^*$, $T = T^*$. Тогда ранг функциональной матрицы для f в точке x^* при $T = T^*$ не превышает числа $Ra = n - 1$. Случай $Ra = n - 1$ называется (см. [16]) *невырожденным*, а соответствующие колебания — *невырожденными*. В невырожденном случае реализуется одно из двух типов колебаний: цикл и двумерное семейство колебаний, на котором период мотонотонно зависит от периода. Другие возможности исключаются существованием единственного периодического решения системы уравнений в вариациях. Случай семейства присутствует обычно в динамических системах, обладающих свойством пространственно-временной симметрии (reversible system) (см. [17]).

В [18] исследована ситуация одновременного наличия подсистем с семействами периодических решений и подсистем с циклами для автономной МССП. Решены задачи существования колебаний в МССП, их устойчивости и стабилизации колебания МССП гладкими автономными связующими управлениями.

Далее в такой общей ситуации исследуется одноуровневая периодическая МССП. Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ во всех подсистемах реализуется невырожденный для периодического решения случай. Решаются задача о нахождении условий на связи, при выполнении которых свойство динамики подсистем переносится на МССП, и задача естественной стабилизации колебания МССП выбором надлежащей связи, которая заключается в нахождении связи, гарантирующей одновременно существование колебания, его устойчивость и стабилизацию. Для исследуемой МССП задача решается гладкими периодическими связями.

Отметим, что описанные далее результаты справедливы при малых значениях параметра связи ε, т.е. для слабо связанных МССП.

2. Изолированные колебания МССП

Рассматривается достаточно гладкая одноуровневая МССП, записанная с использованием двух групп переменных x^s, y^r:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}^s = X^s(x^s) + \varepsilon \tilde{X}^s(\varepsilon, x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^l, t),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad x^s \in \mathrm{R}^{\hat{m}_s}, \quad s = 1, \dots, m,\\
&\dot{y}^r = Y^r(y^r) + \varepsilon \tilde{Y}^r(\varepsilon, x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^l, t),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad y^r \in \mathrm{R}^{\hat{l}_r}, \quad r = 1, \dots, l,\\
&x = (x^1, \dots, x^m), \quad y = (y^1, \dots, y^l), \quad x^s \in \mathrm{R}^{\hat{m}_s},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad y^r \in \mathrm{R}^{\hat{l}_r}, \quad \sum_{s=1}^{m} \hat{m}_s + \sum_{r=1}^{l} \hat{l}_r = n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(ε – параметр). Связи в (1) задаются 2π-периодическими по времени t функциями $\tilde{X}^s$, $\tilde{Y}^r$; правые части системы заданы в некотором открытом множестве пространства переменных x, y и ε.

При отсутствии связи ($\varepsilon = 0$) система (1) распадается на $m + l$ независимых векторных автономных уравнений. Предполагается, что каждое из этих уравнений допускает одночастотное колебание, и рассматривается невырожденный случай существования периодического решения. В системе (1) две группы переменных x^s, y^r отвечают двум возможностям существования невырожденного одночастотного колебания. Так, принимается, что при $\varepsilon = 0$ подсистема с номером s допускает семейство периодических решений

$$
x^s = \varphi^s(h_s, t + \beta_s),
\tag{2}
$$

на котором период $T_s(h_s)$ монотонно зависит от параметра h_s, причем семейство содержит решение периода $T_s(h_s^*) = 2\pi$. Также принимается, что подсистема с номером r допускает цикл

$$
y^r = \psi^r(t + \gamma_r)
\tag{3}
$$

с периодом 2π. Параметры β_s и γ_r дают сдвиг начальной точки по траектории.

В невырожденном для периодического решения случае семейству отвечает двойной нулевой характеристический показатель (ХП) в жордановой клетке, для цикла имеется один нулевой ХП (см. [16]); остальные ХП отличны от нуля.

Замечание 1. В T-периодической линейной системе порядка n всегда существует частное решение вида

$$
\zeta_s(t) = e^{\lambda_k t}\theta_s(t), \quad \theta_s(t + T) = \theta_s(t), \quad s = 1, \dots, n,
$$

в котором число λ_k называется (см. [19, с. 204]) *характеристическим показателем.*

В связанной системе решение $z = (x, y)$ системы (1) зависит от ε. Вычислим частную производную $\partial z/\partial\varepsilon$ по ε для решения, начальная точка которой совпадает с начальной точкой для решения при $\varepsilon = 0$. Тогда для указанной производной получаем систему неоднородных линейных уравнений порядка $m + l$. Выпишем необходимые и достаточные условия существования 2π-периодического решения с нулевыми начальными условиями для этой системы. Получим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
f(h^*, \beta, \gamma) = 0, \quad g(h^*, \beta, \gamma) = 0, \\
f = (f^1, \dots, f^m), \quad g = (g^1, \dots, g^l), \\
h^* = (h_1^*, \dots, h_l^*), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m), \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l),
\end{gathered} \tag{4}
$$

которая в теории МССП называется (см. [14]) *амплитудным уравнением.* В явном виде компоненты векторных функций $f(h^*, \beta, \gamma), g(h^*, \beta, \gamma)$ даются формулами:

$$
\begin{gathered}
f^s(h^*, \beta, \gamma) \equiv \int\limits_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\hat{m}_s} \tilde{X}_i^s(0, \varphi^1(h_1^*, t + \beta_1), \dots \\
\dots, \varphi^m(h_m^*, t + \beta_m), \psi^1(t + \gamma_1), \dots, \psi^l(t + \gamma_l), t) \xi_i^s(h_s^*, t + \beta_s) dt, \\
g^r(h^*, \beta, \gamma) \equiv \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\hat{l}_r} \tilde{Y}_k^r(0, \varphi^1(h_1^*, t + \beta_1), \dots \\
\dots, \varphi^m(h_m^*, t + \beta_m), \psi^1(t + \gamma_1), \dots, \psi^l(t + \gamma_l), t) \eta_k^r(t + \gamma_r) dt, \\
s = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, l,
\end{gathered} \tag{5}
$$

в которых 2π-периодическое решение сопряженной системы обозначено через $\{\xi_i^s(h^*, t + \beta_s)\}, \{\eta_k^r(t + \gamma_r)\}$.

Справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Каждому простому корню $(\beta, \gamma) = (\beta^*, \gamma^*)$ амплитудного уравнения $(f(\beta, \gamma), g(\beta, \gamma)) = (0, 0)$ отвечает изолированное периодическое решение МССП.*

Доказательство теоремы 1 приводится в Приложении.

Замечание 2. Частные случаи теоремы 1, когда в подсистемах имеются колебания только одного типа, установлены ранее (см. [16, 20]).

3. Характеристические показали изолированного периодического решения МССП

Пусть выполнены условия теоремы 1, а изолированному периодическому решению без ограничения общности отвечают числа $\beta_s = 0$, $s = 1, \dots, m$,

$\gamma_r = 0$, $r = 1, \dots, l$; значение $h = h^*$ для этого решения явно не пишем. Составим уравнения в вариациях для этого решения. Получим линейную периодическую систему:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}^s &= P^s(t)\delta x^s + \varepsilon\left[(A^s(t) + O(\varepsilon))\delta x + (B^s(t) + O(\varepsilon))\delta y\right], \\ \delta\dot{y}^r &= Q^r(t)\delta y^r + \varepsilon\left[(C^r(t) + O(\varepsilon))\delta x + (D^r(t) + O(\varepsilon))\delta y\right], \end{aligned} \tag{6}$$
$$\delta x = (\delta x^1, \dots, \delta x^m), \quad \delta y = (\delta y^1, \dots, \delta y^l), \quad s = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, l,$$

с 2π-периодическими коэффициентами; входящие в (6) матрицы выписываются стандартным способом путем вычисления частных производных и группирования слагаемых одного порядка по ε. Опуская эту операцию, здесь только отметим, что матрицы в (6) содержат производные от функций $\tilde{X}^s$, $\tilde{Y}^r$ на изолированном периодическом решении. Система (6) для частного случая выписана явно в [20].

В системе (6) в точке $\varepsilon = 0$ происходит бифуркация ХП. При этом отличные от нуля ХП, чуть-чуть меняясь вместе с ε, остаются при $\varepsilon \neq 0$ ненулевыми. Известно из [14], что в системе (1), содержащей только подсистемы с семействами периодических решений, пара нулевых ХП бифурцирует по такому сценарию:

$$\lambda_s = \pm\alpha_1^s \varepsilon^{1/2} + \alpha_2^s \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{7}$$

С другой стороны, в случае системы (1), содержащей только подсистемы с циклами, в типичной ситуации ХП при $\varepsilon \neq 0$ получает приращение порядка ε (см. [21]): реализуется сценарий

$$\lambda_r = \alpha_2^r \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{8}$$

Исследуем бифуркацию нулевых ХП в общей ситуации наличия в (1) подсистем с семействами периодических решений и подсистем с циклами. С этой целью в системе (6) положим

$$\delta x^s = \delta\hat{x}^s \exp(\lambda t), \quad \delta y^r = \delta\hat{y}^r \exp(\lambda t),$$

причем значок над x и y далее для краткости записи опускаем. Подставим эти выражения в систему (6). Получим:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}^s &= -\lambda\delta x^s + P^s(t)\delta x^s + \varepsilon[(A^s(t) + O(\varepsilon))\delta x + (B^s(t) + O(\varepsilon))\delta y], \\ \delta\dot{y}^r &= -\lambda\delta y^r + Q^r(t)\delta y^r + \varepsilon[(C^r(t) + O(\varepsilon))\delta x + (D^r(t) + O(\varepsilon))\delta y], \\ & s = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, l. \end{aligned} \tag{9}$$

В соответствии с замечанием 1 каждому ХП λ системы (9) отвечает одно (с точностью до множителя) 2π-периодическое решение системы (9). Запишем решение системы (9) в таком общем виде:

$$\begin{aligned} \delta x^s &= \delta x_0^s + \varepsilon^{1/2}\delta x_1^s + \varepsilon\delta x_2^s + \varepsilon^{3/2}\delta x_3^s + o(\varepsilon^{3/2}), \\ \delta y^r &= \delta y_0^r + \varepsilon^{1/2}\delta y_1^r + \varepsilon\delta y_2^r + \varepsilon^{3/2}\delta y_3^r + o(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \tag{10}$$

Выражения (10) подставим в систему (9). Тогда в результате приравнивания членов при одинаковых степенях по ε получаются системы линейных уравнений:

$$\delta\dot{x}_k^s = P^s(t)\delta x_k^s + F_k^s(t), \quad \delta\dot{y}_k^r = Q^r(t)\delta y_k^r + G_k^r(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Вычислим:

$$F_0^s(t) \equiv 0, \quad G_0^r(t) \equiv 0, \quad F_1^s(t) = -\alpha_1 \delta x_0^s(t), \quad G_1^r(t) = -\alpha_1 \delta y_0^r(t).$$

Отсюда видно, что системы (11) при $k = 0$ и $k = 1$ распадаются на подсистемы по переменным δx^s и δy^r. В подсистеме для переменной δx^s имеется одно 2π-периодическое решение, отвечающее жордановой нулевой клетке, поэтому, как правило, получим $\alpha_1 \neq 0$. Для переменной δy_k^r периодическому решению отвечает простой нулевой ХП, следовательно, число α_1 в общей записи ХП, справедливой для (7) и (8), равняется нулю. Далее оказывается, что в системе (11) подсистемы уравнений по переменным δx^s и δy^r интегрируются независимо друг от друга. Поэтому двойной нулевой ХП, отвечающий семейству периодических решений, бифурцирует по сценарию (7), а нулевой ХП, отвечающий циклу, бифурцирует по сценарию (8).

Теорема 2. В общем случае, когда периодическая МССП содержит подсистемы с семействами периодических решений и подсистемы с циклами, бифуркация двойного нулевого ХП, отвечающего семейству периодических решений, происходит по сценарию (7)*, а бифуркация нулевого ХП, отвечающего циклу, — по сценарию* (8).

Замечание 3. В рассматриваемой общей ситуации ХП находятся единообразным способом, независимо от сценария (7) или (8), путем построения периодического решения системы уравнений (9).

4. Вычисление чисел α_1 и α_2

Далее на основе выписанной системы (9) дается аналитическое конструктивное решение задачи о сценарии бифуркации ХП колебания периодической МССП, содержащей подсистемы с различными типами колебаний. С этой целью получаются явные формулы для вычисления чисел α_1 и α_2, справедливые также и в частном случае наличия только одного из типов колебаний.

Необходимые и достаточные условия существования в системе (9) периодического решения имеют вид:

$$\int_0^{2\pi} F_k^s(t)\xi^s(t)dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} G_k^r(t)\eta^r(t)dt = 0. \tag{12}$$

Для $j = 0$ решение известно:

$$\delta x_0^s(t) = M_0^s \dot{\varphi}^s(t), \quad \delta y_0^r(t) = N_0^r \dot{\psi}^r(t).$$

При поиске α_1 и α_2 решения системы (9) находятся с точностью до постоянной, поэтому положим $M_0^s = 1$ и $N_0^r = 1$.

При $j = 1$ система (9) распадается на $m + l$ независимых подсистем, а условия (12) принимают вид:

$$\alpha_1^s \int_0^{2\pi} \dot{\varphi}^s(t)\xi^s(t)dt = 0, \quad \alpha_1^r \int_0^{2\pi} \dot{\psi}^r(t)\eta^r(t)dt = 0,$$

где согласно теореме 2 имеем $\alpha_1^r = 0$. Здесь в силу соотношения между решениями сопряженных систем подынтегральные выражения принимают постоянные значения, поэтому условия (12) выполняются тождественно. Следовательно, система (9) при $j = 1$ имеет периодическое решение:

$$\delta x_1^s(t) = M_1^s \dot{\varphi}^s(t) + \alpha_1^s \delta\tilde{x}_1^s(t), \quad \delta y_1^r(t) = N_1^r \dot{\psi}^r(t),$$

где $\alpha_1 \delta^s \tilde{x}_1^s(t)$ – частное решение, а M_1^s, N_1^r – постоянные. Здесь учитывается, что $F_1^s(t) = -\alpha_1^s \delta x_0^s(t)$ и $G_1^r(t) = 0$. Числа α_1^s при $j = 1$ не находятся.

Вычислим

$$F_2^s(t) = -\alpha_2 \delta x_0^s - \alpha_1 \delta x_1^s + A^s(t)\delta x_0(t) + B^s(t)\delta y_0(t),$$
$$G_2^r(t) = -\alpha_2 \delta y_0^r - \alpha_1 \delta y_1^r + C^r(t)\delta x_0(t) + D^r(t)\delta y_0(t)$$

и запишем условие (12) для $j = 2$. В результате получим, что

$$\int_0^{2\pi} [-\alpha_1^s \delta x_1^s + A^s(t)\delta x_0(t) + B^s(t)\delta y_0(t)]\xi^s(t)dt = 0.$$

Отсюда выводим формулу

$$(\alpha_1^s)^2 \int_0^{2\pi} \delta\tilde{x}_{k1}^s(t)\xi^s(t)dt = \int_0^{2\pi} [A^s(t)\delta x_0(t) + B^s(t)\delta y_0(t)]\xi^s(t)dt \tag{13}$$

для вычисления α_1^s.

Заметим, что из (7) следует существование для данного s пары чисел $\pm\alpha_1^s$, которые конструктивно вычисляются.

После нахождения α_1^s решение $\delta x_2^s(t)$ вполне вычисляется.

Теперь, учитывая формулы

$$F_3^s(t) = -\alpha_3 \delta x_0^s - \alpha_2 \delta x_1^s - \alpha_1 \delta x_2^s + A^s(t)\delta x_1(t) + B^s(t)\delta y_1(t),$$
$$G_2^r(t) = -\alpha_3 \delta y_0^r - \alpha_2 \delta y_1^r - \alpha_1 \delta y_2^r + C^r(t)\delta x_1(t) + D^r(t)\delta y_1(t),$$

запишем условие (12) для $j = 3$. Тогда получим уравнения для нахождения чисел α_2^s и α_2^r:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}[-\alpha_2^s\delta x_1^s(t) - \alpha_1^s\delta x_2^s(t) + A^s(t)\delta x_1(t) + B^s(t)\delta y_1(t)]\xi^s(t)dt = 0,\\
(14)\qquad &\int_0^{2\pi}[-\alpha_2^r\delta y_1^r(t) + C^r(t)\delta x_1(t) + D^r(t)\delta y_1(t)]\eta^r(t)dt = 0,
\end{aligned}
$$

в которых функции $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2^s(t)$ определены на предыдущих шагах.

Суммируем полученные результаты.

Теорема 3. В общей ситуации, когда периодическая МССП содержит подсистемы с семействами периодических решений и подсистемы с циклами, характеристические показатели изолированного периодического решения даются формулами (7), (8), (13) *и* (14).

Если в системе (6) *коэффициенты таковы, что все числа* $\alpha_1^s, \alpha_2^s, \alpha_2^r$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$
(\alpha_1^s)^2 \leqslant 0, \quad \alpha_2^s < 0, \quad \alpha_2^r < 0;
$$
$$
s = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, l,
$$

то изолированное периодическое решение МССП асимптотически устойчиво.

Замечание 4. Частные случаи теоремы 3 (для МССП, содержащих подсистемы с одним типом колебаний) установлены ранее (см. [16]).

5. Задача о естественной стабилизации изолированного периодического решения

В [22] предложена идея естественной стабилизации колебания автономной МССП, которая заключается в одновременном решении задач существования колебания системы, его устойчивости и стабилизации путем выбора надлежащих связующих управлений. В случае связей, периодически зависящих от времени, МССП допускает изолированное колебание (см. [16]). Задача естественной стабилизации такого колебания МССП с двумя подсистемами, каждая из которых задается на плоскости и допускает семейства периодических решений, решена в [20]. При этом в терминах исходной системы предлагаются конструктивные условия на гладкие периодические связующие управления, дающие решение задачи.

Также обстоит дело и в общей ситуации периодической системы (1). Действительно, в амплитудное уравнение (4) входят только функции $\tilde{X}(0, \varphi, \psi, t)$ и $\tilde{Y}(0, \varphi, \psi, t)$. Неравенство нулю числа, вычисляемого с помощью производных от этих функций в точке $(\varphi(h^*, \beta^*), \psi(h^*, \gamma^*))$ доставляет условие кратности корня (β^*, γ^*). С другой стороны, уравнения в вариациях (6) содержат частные производные от $\tilde{X}(0, \varphi, \psi, t)$ и от $\tilde{Y}(0, \varphi, \psi, t)$. Формулы (13), (14) получаются посредством интегрирования на периоде выражений, содержащих в качестве множителей эти производные. Поэтому условия теорем 1 и 2 не конфликтуют друг с другом и могут выполняться одновременно, а это означает справедливость теоремы 4.

Теорема 4. Задача естественной стабилизации изолированного колебания системы (1) *имеет решение: оно доставляется теоремами 1 и 3.*

Замечание 5. Частный случай теоремы 4, когда МССП содержит две подсистемы, заданные на плоскости и допускающие невырожденные семейства периодических решений, установлен в [20].

6. Пример

Рассмотрим систему двух связанных уравнений с одной степенью свободы:

$$\begin{gathered}
\ddot{\theta}_1 + 4\sin\theta_1 = \hat{\varepsilon}(1 - k\theta_1^2)\dot{\theta}_1 + \varepsilon\Theta_1(\theta_1, \theta_2, t), \\
\ddot{\theta}_2 + 4\sin\theta_2 = \mu(1 - k\theta_2^2)\dot{\theta}_2 + \varepsilon\Theta_2(\theta_1, \theta_2, t), \\
\left.\begin{aligned}
&\Theta_s(\theta_1, \theta_2, -t) = \Theta_s(\theta_1, \theta_2, t), \\
&\Theta_s(\theta_1, \theta_2, t + 2\pi) = \Theta_s(\theta_1, \theta_2, t),
\end{aligned}\right. \qquad s = 1, 2,
\end{gathered} \tag{15}$$

содержащую малые параметры $\hat{\varepsilon}$, μ и ε: $k > 0$ – постоянная. Здесь при $\hat{\varepsilon} = 0$, $\mu = 0, \varepsilon = 0$, имеем два идентичных друг другу математических маятника. Маятник допускает невырожденное семейство колебаний по параметру h – постоянной интеграла энергии, причем на семействе период монотонно возрастает от числа π, отвечающего малым колебаниям близ равновесия, до бесконечности. Значению $h = h^*$ отвечает колебание периода 2π.

Пусть $\hat{\varepsilon} = 0$, $\mu > 0$ и $\varepsilon = 0$. Тогда, выбирая, как в [22], значение k, соответствующее 2π-периодическому колебанию, сконструируем для второй подсистемы асимптотически орбитально устойчивый цикл — невырожденное периодическое решение. Таким образом, при $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$ и $\mu > 0$ в (15) рассматривается 2π-периодическая МССП, содержащая две подсистемы с различными невырожденными колебаниями.

Пусть $\hat{\varepsilon} > 0$, $\mu > 0$ и $\varepsilon = 0$. В каждой подсистеме происходит распад жордановой клетки из нулевых ХП на нулевой ХП и показатель (см. [20])

$$\lambda = \hat{\alpha}_2\sigma + O(\sigma^{3/2}), \quad \hat{\alpha}_2 < 0, \quad \sigma = \hat{\varepsilon}, \mu.$$

С другой стороны, при $\hat{\varepsilon} = \mu = 0$ в (15) получим обратимую 2π-периодическую связанную механическую систему. При $\varepsilon > 0$ в ней рождается (см. [16]) изолированное симметричное периодическое решение. При этом система амплитудных уравнений (см. [22])

$$
\int\limits_0^{2\pi} \Theta_1(\theta_1(t+\beta), \theta_2(t+\gamma), t)\dot{\theta}_1(t+\beta)dt = 0,
$$

(16)

$$
\int\limits_0^{2\pi} \Theta_2(\theta_1(t+\beta), \theta_2(t+\gamma), t)\dot{\theta}_2(t+\gamma)dt = 0
$$

имеет простой корень $\beta = \gamma = 0$. Бифуркация жордановых клеток происходит с рождением пары ХП вида $\pm\hat{\alpha}_1\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)$ [20].

Запишем систему амплитудных уравнений при $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$. В ней второе уравнение совпадает со вторым уравнением в (16), а первое уравнение приобретает вид

$$
\int\limits_0^{2\pi} [(1 - k\theta_1^2(t+\beta))\dot{\theta}_1(t+\beta) + \Theta_1(\theta_1(t+\beta), \theta_2(t+\gamma), t)\dot{\theta}_1(t+\beta)]dt = 0.
$$

Здесь подынтегральная функция содержит два слагаемых. Число k в первом слагаемом выбирается таким образом, чтобы интеграл от него равнялся нулю. Поэтому система амплитудных уравнений в рассматриваемом случае $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$ имеет корень $\beta = 0,\ \gamma = 0$. В силу простоты этого корня он будет простым и для системы (16). Следовательно, устанавливается существование изолированного 2π-периодического решения в системе (15) при $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$.

Для доказательства асимптотической устойчивости этого решения учтем аддитивность малых слагаемых в правых частях уравнений в (15). Это обстоятельство согласно выводам в [20] приводит к аддитивности в формуле для вычисления ХП периодического решения в (15):

$$
\lambda_1 = \pm\hat{\alpha}_1\varepsilon^{1/2} + \alpha_2^{(1)}\hat{\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}),
$$
$$
\lambda_2 = \pm\hat{\alpha}_1\varepsilon^{1/2} + \alpha_2^{(2)}\mu + O(\mu^{3/2}, \varepsilon^{3/2}).
$$

При $\varepsilon = 0$ для первого маятника имеем $\alpha_2^{(1)} = \hat{\alpha}_2 < 0$, для второго маятника получим: $\alpha_2^{(2)} = \hat{\alpha}_2 < 0$. Подчиним связи условию $(\hat{\alpha}_1)^2 \leqslant 0$. Тогда по теореме 2 изолированное периодическое решение асимптотически устойчиво.

7. Заключение

Модели, содержащие связанные подсистемы, могут быть различной физической природы. Исследование одночастотных колебаний таких систем показывает, что свойство иметь такое колебание в отдельной системе переносится на всю модель. При этом получаются условия на связи, гарантирующие существование колебаний, их устойчивость и естественную стабилизацию. В периодических МССП задача переноса решается надлежащим выбором периодических связующих управлений.

Доказательство теоремы 1. Запишем систему (1) в переменных $z = (x, y)$. Периодическое решение $z(\varepsilon, z^0, t)$ с начальной точкой z^0 при $t = 0$ и периодом 2π удовлетворяет условию

$$Q \equiv z(\varepsilon, z^0, 2\pi) - z^0 = 0. \tag{П.1}$$

Следовательно, задача состоит в нахождение корня z^0 системы уравнений (П.1), который при $\varepsilon = 0$ удовлетворяет уравнению

$$Q_0 \equiv z(0, z^0, 2\pi) - z^0 = 0. \tag{П.2}$$

Уравнение (П.1) распадается на $m + l$ уравнений, каждое из которых соответствует своей подсистеме в несвязанной системе. В подсистемах рассматривается невырожденный для периодического решения случай. Поэтому периодическое решение кроме нулевых ХП содержит отличные от нуля ХП. Значит, в каждом уравнении в (П.2) ранг функциональной матрицы в точке решения на единицу меньше размерности системы.

В системе (П.2) начальная точка $z^0 = z^0(h^*, \beta, \gamma)$, причем h^* — известное число. Пусть для решения уравнения (П.2) имеем $\beta = \beta^*$, $\gamma = \gamma^*$ и $z^0(h^*, \beta, \gamma) = z^*$. Тогда ранг функциональной матрицы уравнения (П.1) в точке z^* равен числу

$$Ra_* = \sum_{s=1}^{m}(\hat{m}_s - 1) + \sum_{r=1}^{l}(\hat{l}_s - 1) = n - (m + l).$$

В уравнении (П.1) положим $\delta z = z^0 - z^*$. Тогда, учитывая равенство $Ra_* = n - (m + l)$, разрешим при малых ε систему (П.1) относительно $m + l$ приращений δz. Далее, собирая эти приращения в вектор w, из (П.1) приходим к уравнению

$$\Phi(w, 2\pi) + \varepsilon\Psi(\varepsilon, w, 2\pi) = 0, \quad w \in \mathrm{R}^{m+l}, \tag{П.3}$$

в записи которого выделяются слагаемые, содержащие ($\varepsilon\Psi$) и не содержащие (Φ) параметр ε.

В уравнении (П.3) функция Φ не содержит линейного члена по w. Далее, справедливы оценки $w \sim \varepsilon$, $\beta - \beta^* \sim \varepsilon$, $\gamma - \gamma^* \sim \varepsilon$. Поэтому из (П.3) при малых $\varepsilon \neq 0$ получаем уравнение

$$\Psi(0, w(h^*, \beta, \gamma), 2\pi) = 0,$$

совпадающее с амплитудным уравнением (4), т.е. теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Поперечные колебания стержня, вызванные кратковременным продольным ударом // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 37–41.

2. *Kovaleva A., Manevitch L.I.* Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 320 (15 Apr. 2016). P. 1–8.
3. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 411–425.
4. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. No. 5. P. 794–803.
5. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // 10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879–886.
6. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга-Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
7. *Danzl P., Moehlis J.* Weakly Coupled Parametrically Forced Oscillator Networks: Existence, Stability, and Symmetry of Solutions // Nonlinear Dynamics. 2010. V. 59. Iss. 4. P. 661–680.
8. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which are Driven by a Third Oscillator // J. Appl. Nonlin. Dynam. 2014. V. 3. No. 3. P. 271–282.
9. *Kawamura Y.* Collective Phase Dynamics of Globally Coupled Oscillators: Noise-induced anti-phase Synchronization // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. V. 270 (1 Jun. 2014). P. 20–29.
10. *Peng Du, Michael Y. Li.* Impact of Network Connectivity on the Synchronization and Global Dynamics of Coupled Systems of Differential Equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. V. 286-287 (15 Oct. 2014). P. 32–42.
11. *Buono P.-L., Chan B.S., Palacios A., et al.* Dynamics and Bifurcations in a D_n-symmetric Hamiltonian Network. Application to Coupled Gyroscopes // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. V. 290 (1 Jun. 2014). P. 8–23.
12. *Vu T.L., Turitsyn K.* A Framework for Robust Assessment of Power Grid Stability and Resiliency // IEEE Trans. Automat. Control. 2017. V. 62. No. 3. P. 1165–1177.
13. *Амелина Н.О., Ананьевский М.С., Андриевский Б.Р. и др.* Проблемы сетевого управления. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.
14. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы // АиТ. 2013. № 6. С. 32–41.

    Tkhai V.N. Model with Coupled Subsystems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 919–931.
15. *Martynyuk A.A., Chernenetskaya L.N., Martynyuk V.A.* Weakly Connected Nonlinear Systems. Boundedness and Stability of Motion. Boca Raton – London – N.Y.: CRC Press, Taylor and Fransis Group, 2013.
16. *Тхай В.Н.* Динамическая модель, содержащая связанные подсистемы // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Тр. Межд. Четаевской конф. Т. 1. Аналитическая механика. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. С. 320–329.
17. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.

    Tkhai V.N. The Behaviour of the Period of Symmetrical Periodic Motions // J. Appl. Math. Mech. 2012. V. 76. Iss. 4. P. 446–450.

18. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы с различными типами колебаний //АиТ. 2017. № 4. С. 21–36.

Tkhai V.N. Model Containing Coupled Subsystems with Oscillations of Different Types // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 4. P. 595–607.

19. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

20. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания в связанной периодической системе // АиТ. 2017. № 11. С. 34–47.

Tkhai V.N. Stabilization of Oscilliaions in a Couple Periodic System // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 1967–1977.

21. *Тхай В.Н.* Колебания, устойчивость и стабилизация в модели, содержащей связанные подсистемы с циклами // АиТ. 2015. № 7. С. 40–51.

Tkhai V.N. Oscillations, Stability and Stabilization in the Model Containing Coupled Subsystems with Cycles // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 7. P. 1169–1178.

22. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.

Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 21.11.2017

После доработки 09.08.2018

Принята к публикации 08.11.2018