Автоматика и телемеханика, № 3, 2019

© 2019 г. **С.Л. СЕМАКОВ, д-р физ.-мат. наук (slsemakov@yandex.ru)**
(Московский физико-технический институт;
Московский авиационный институт),
И.С. СЕМАКОВ (champione7@yandex.ru)
(Московский авиационный институт)

ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ НА ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Оценивается вероятность события, состоящего в том, что первое достижение заданного уровня непрерывным случайным процессом происходит на заданном промежутке изменения независимой переменной. Результаты конкретизируются для гауссовского процесса. Приводится пример численных оценок.

Ключевые слова: случайный процесс, вероятность достижения уровня, момент первого достижения уровня.

DOI: 10.1134/S0005231019030061

1. Введение

При исследовании стохастических систем нередко возникает вопрос: "С какой вероятностью в течение заданного промежутка времени процесс функционирования системы не выйдет из некоторых заранее оговоренных рамок?" В более узкой и математически формализованной постановке этот вопрос можно сформулировать, в частности, так: "С какой вероятностью исследуемый случайный процесс, имеющий непрерывные реализации, первый раз достигнет интересующего исследователя уровня на заданном промежутке изменения независимой переменной?" В данной постановке задача была сформулирована в [1], хотя в близкой более общей постановке ее можно найти в [2]. Необходимость в оценке вероятностей событий такого типа возникает при решении задач из различных предметных областей, например в задачах обеспечения точности и безопасности посадки самолета [3, 4].

Для диффузионных марковских процессов нахождение указанной вероятности может быть сведено к решению краевой задачи для уравнения в частных производных, что было показано еще в [2]. Примеры точного вычисления этой вероятности как решения соответствующей краевой задачи приведены в [3, 5].

Для непрерывных немарковских процессов оценки искомой вероятности получены в [1] и затем усилены в [6]. Все другие известные авторам результаты, связанные с вычислением вероятности достижения уровня такими процессами, носят очень частный характер. В качестве примеров можно привести результаты из [7–9]. В [7] для стационарного гауссовского процесса получены оценки вероятности

$$P\{\xi(x) \leqslant kx + a \text{ для любого } x \in [0, x^*]\}$$

невыхода такого процесса за наклонный уровень в предположении, что для корреляционной функции указанного процесса справедливо определенное асимптотическое представление. В [8] для стационарного гауссовского процесса найдена асимптотика вероятности пересечения барьера $u+f(x)$ при $u \to +\infty$, где $f(x)$ – детерминированная непрерывная функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям. В [9] найдено точное выражение для вероятности

$$P\{\xi(x) \geqslant 0 \ \text{ для любого } \ x \in [0, x^*]\},$$

где процесс $\xi(x)$ определяется равенством $\xi(x) = U + V\cos(\frac{x}{\beta} + W)$, в котором U, V, W – независимые случайные величины, причем U и V распределены нормально с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $1-\beta^2$ и β^2 соответственно, а W имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$.

Настоящая статья является продолжением публикации [10], в которой общие результаты, полученные в [1, 6] для непрерывных процессов, конкретизируются для гауссовского процесса.

2. Постановка задачи

Рассмотрим случайный процесс $\xi(x)$ с непрерывными реализациями, определенный на отрезке $[x_0, x'']$, $x_0 > -\infty$, или на полуинтервале $(x_0, x'']$, $x_0 \geqslant -\infty$. Пусть задана произвольная точка x' из интервала (x_0, x'') и некоторое число h. Будем предполагать, что выполнено равенство

$$P\{\xi(x_0) > h\} = 1, \tag{1}$$

если x изменяется на отрезке $[x_0, x'']$, или выполнено равенство

$$\lim_{x \to x_0} P\{\xi(x) > h\} = 1, \tag{2}$$

если x изменяется на полуинтервале $(x_0, x'']$. Физический смысл равенств (1) или (2) состоит в том, что изучаемая числовая характеристика, поведение которой описывается процессом $\xi(x)$, в начальный момент удовлетворяет известному условию. В данном случае это условие означает, что в момент начала изучения исследуемая характеристика заведомо больше числа h.

Следуя [11], обозначим через $G_h(x_0, x'')$ множество непрерывных на промежутке от x_0 до x'' – $[x_0, x'']$ или $(x_0, x'']$ (в зависимости от рассматриваемого множества значений переменной x) – скалярных функций, которые не совпадают тождественно с h ни в одном из интервалов этого промежутка. Будем использовать понятия “вход под уровень”, “выход за уровень”, “пересечение уровня” и “касание уровня” непрерывной функцией в соответствии с естественными определениями этих понятий, данными в [11], а именно: функция $f(x)$ из множества $G_h(x_0, x'')$ в точке $x^* \in (x', x'')$ имеет:

а) вход под уровень h, если существует $\epsilon > 0$ такое, что

$$f(x) \geqslant h \ \ \forall x \in (x^* - \epsilon, x^*), \quad f(x) \leqslant h \ \ \forall x \in (x^*, x^* + \epsilon);$$

б) выход за уровень h, если существует $\epsilon > 0$ такое, что

$$f(x) \leqslant h \ \forall x \in (x^* - \epsilon, x^*), \quad f(x) \geqslant h \ \forall x \in (x^*, x^* + \epsilon);$$

в) пересечение уровня h, если для любого $\epsilon > 0$ существуют $\hat{x}$ и $\check{x}$ из промежутка $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ такие, что

$$(f(\hat{x}) - h)(f(\check{x}) - h) < 0;$$

г) касание уровня h, если $f(x^*) = h$ и существует $\epsilon > 0$ такое, что разность $f(x) - h$ не меняет знака в интервале $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$.

Обозначим через $N(x_1, x_2)$, $N^-(x_1, x_2)$ и $N^+(x_1, x_2)$ средние[1] числа пересечений уровня h, входов под уровень h и выходов за уровень h процесса $\xi(x)$ на промежутке (x_1, x_2), если эти средние существуют. Введем в рассмотрение событие

$$Z = \left\{ \begin{array}{c} \text{существует } x^* \in (x', x'') \text{ такое, что для любого } x < x^* \ \ \xi(x) > h \\ \text{и при этом } \xi(x^*) = h \end{array} \right\},$$

смысл которого заключается в том, что первое достижение уровня h процессом $\xi(x)$ происходит на интервале (x', x''). В [1] получены следующие оценки для вероятности $P\{Z\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* 1) *с вероятностью* 1 *реализации процесса* $\xi(x)$ *принадлежат множеству* $G_h(x_0, x'')$ *и не имеют касаний уровня* h *на промежутке* (x_0, x''), $N(x_0, x'') < \infty$; 2) $P\{\xi(x') = h\} = 0$; 3) *выполнено условие* (1), *если* x *изменяется на отрезке* $[x_0, x'']$, *или выполнено условие* (2), *если* x *изменяется на полуинтервале* $(x_0, x'']$. *Тогда*

$$N^-(x', x'') - N^+(x_0, x'') \leqslant P\{Z\} \leqslant N^-(x', x''). \tag{3}$$

Затем оценки (3) были усилены в [6].

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом разбиении промежутка* (x_0, x'') *точками* $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $n \geqslant 2$, *где*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x''$$

и для любого $i = 1, \ldots, n-1$ $P\{\xi(x_i) = h\} = 0$, *справедливы неравенства*

$$N^-(x', x'') - N^+(x_0, x'') + \Delta \leqslant P\{Z\} \leqslant N^-(x', x''), \tag{4}$$

где

$$\Delta = \Delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} P\left\{ \Big(\xi(x_i) < h\Big) \cap \left[\bigcap_{j=i+1}^{n} \Big(\xi(x_j) > h\Big) \right] \right\}.$$

Причем если к имеющимся точкам разбиения x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, *добавить новые точки* x_k, *для которых* $P\{\xi(x_k) = h\} = 0$, *то величина* Δ *может от этого разве лишь возрасти и, как следствие, нижняя из оценок* (4) *– может только лишь улучшиться.*

---

[1] Под средним здесь и далее понимается математическое ожидание соответствующей случайной величины.

Достаточные условия выполнения предположения 1) теоремы 1 хорошо изучены и подробно описаны, например, в [11]. Числа N^- и N^+ для дифференцируемых процессов вычисляются по известным формулам Райса:

$$N^-(x', x'') = -\int\limits_{x'}^{x''} dx \int\limits_{-\infty}^{0} v\rho_x(h, v)dv,$$

$$N^+(x_0, x'') = \int\limits_{x_0}^{x''} dx \int\limits_{0}^{\infty} v\rho_x(h, v)dv,$$

полученным в [12]. Здесь $\rho_x(u, v)$ – плотность совместного распределения значений процесса $\xi(x)$ и его производной $\frac{d\xi(x)}{dx}$ в среднеквадратичном в один и тот же момент x.

Что касается точности полученных оценок, т.е. разности между верхней и нижней оценками искомой вероятности $P\{Z\}$, то она зависит от “склонности” реализаций $\xi(x)$ пересекать уровень h снизу вверх на интервале (x_0, x'') и во многом определяется величиной числа $N^+(x_0, x'')$. Иллюстрирующие примеры приведены в [3], где помимо прочего показано, насколько эффективными оказались оценки (3) в авиационных приложениях при их использовании для вычисления вероятности успешного приземления реальных самолетов, в частности самолетов корабельного базирования при их посадке на реальный[2] авианесущий крейсер с учетом и возможной качки корабля. В этом случае в роли $\xi(x)$ выступает случайный процесс изменения высоты полета самолета в системе координат, связанной с посадочной поверхностью, уровень $h = 0$, а независимой переменной x является дальность полета. Событие Z при этом означает, что начальное касание самолетом посадочной поверхности происходит на заданном участке.

В настоящей статье исследуется вопрос, состоящий в том, как сильно можно улучшить оценки (3) за счет подсчета величины $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ с целью последующего использования более точных оценок (4). При фиксированном числе $n-1$ точек $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $n \geqslant 2$, разбиения интервала (x_0, x'') величина $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ не фиксирована: она может меняться в зависимости от расположения точек $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Желаемый выбор точек $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — такой, при котором $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ принимает наибольшее значение, в результате чего получается наилучшая нижняя оценка для $P\{Z\}$. Другими словами, задача выбора точек $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — это задача отыскания точки максимума функции $(n-1)$-й переменной. В [10] эта задача решена в случае $n = 2$ для гауссовского процесса. В настоящей статье рассматривается случай $n = 3$, т.е. когда при подсчете величины Δ берется не одна (как в [10]), а две точки разбиения интервала (x_0, x''), что позволяет улучшить оценки искомой вероятности по сравнению со случаем $n = 2$, рассмотренным в [10].

[2] Речь идет о самолетах МиГ-29К при посадке на авианесущий крейсер “Адмирал Кузнецов”.

3. Конкретизация для гауссовского процесса

Пусть процесс $\xi(x)$ имеет вид

$$\xi(x) = -a_1 x + a_0 + \zeta(x), \quad x \in (-\infty, x''],$$

где $a_1 > 0$ и a_0 – постоянные, $\zeta(x)$ – стационарный центрированный гауссовский процесс с непрерывными реализациями и нормированной корреляционной функцией

$$r(y) = \frac{\mathrm{M}\{\zeta(x)\zeta(x+y)\}}{\sigma^2},$$

σ^2 – дисперсия процессов $\xi(x)$ и $\zeta(x)$, символ М означает операцию взятия математического ожидания. Будем считать, что существует конечная вторая производная $r''(0)$. Тогда (см., например, [11]) для процесса $\xi(x)$ условия теорем 1 и 2 выполнены.

Пусть для определенности точки x' и x'' расположены симметрично относительно абсциссы точки пересечения уровня h прямой $y = -a_1 x + a_0$ (см. рис. 1). В этом случае разности $(-a_1 x' + a_0) - h$ и $h - (-a_1 x'' + a_0)$ положительны и одинаковы; обозначим их через b (см. рис. 1): $(-a_1 x' + a_0) - h = h - (-a_1 x'' + a_0) = b > 0$.

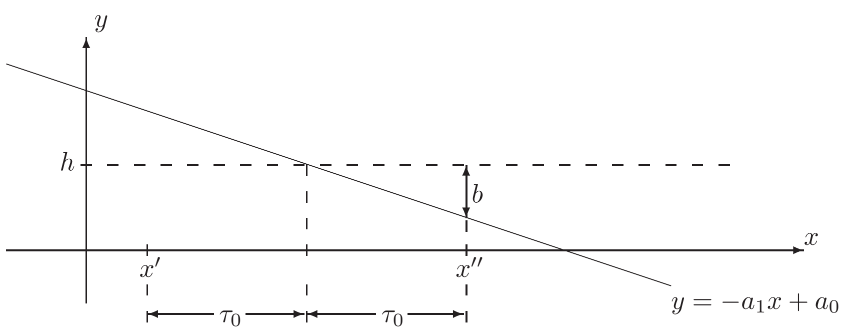

Рис. 1.

В силу существования $r''(0)$ процесс $\zeta(x)$ дифференцируем в среднеквадратичном, так что для подсчета средних $N^-(x', x'')$ и $N^+(-\infty, x'')$ можно воспользоваться формулами Райса. Плотность $\rho_x(u,v)$ совместного распределения значений процесса $\xi(x)$ и его производной $\frac{d\xi(x)}{dx}$ в среднеквадратичном в один и тот же момент x в данном случае имеет вид

$$\rho_x(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_1} \exp\left\{ -\frac{(u - (-a_1 x + a_0))^2}{2\sigma^2} - \frac{(v - (-a_1))^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

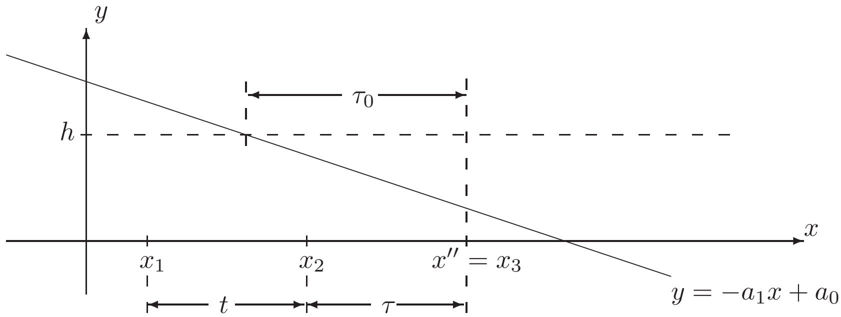

Рис. 2.

где $\sigma_1^2 = -\sigma^2 r''(0)$ – дисперсия процесса $\frac{d\xi(x)}{dx}$. Подстановка этой плотности в формулы Райса дает следующие результаты для $N^-(x', x'')$ и $N^+(-\infty, x'')$:

$$N^-(x', x'') = \left(\frac{\sigma_1}{a_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} + \Phi\left(\frac{a_1}{\sigma_1}\right)\right)\left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)\right), \tag{5}$$

$$N^+(-\infty, x'') = \left(\frac{\sigma_1}{a_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} - \Phi\left(-\frac{a_1}{\sigma_1}\right)\right)\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right), \tag{6}$$

где введено обозначение

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} dz.$$

Теперь займемся исследованием величины Δ. Выпишем выражение для $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ при $n = 3$:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^{2} P\left\{\Big(\xi(x_i) < h\Big) \cap \left[\bigcap_{j=i+1}^{3} \Big(\xi(x_j) > h\Big)\right]\right\} = \\ &= P\Big\{\Big(\xi(x_1) < h\Big) \cap \Big(\xi(x_2) > h\Big) \cap \Big(\xi(x_3) > h\Big)\Big\} + \\ &\quad + P\Big\{\Big(\xi(x_2) < h\Big) \cap \Big(\xi(x_3) > h\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Введем переменные t и τ следующим образом (см. рис. 2):

$$t = x_2 - x_1, \quad \tau = x'' - x_2.$$

Поскольку при $n = 3$ будет $x'' = x_3$, то при фиксированном значении x'' величина $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ однозначно определяется значениями t и τ. При этом заметим, что t и τ могут принимать только положительные значения. Задача состоит в отыскании таких положительных t и τ, при которых величина $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ принимает наибольшее значение.

В дальнейшем для краткости первое слагаемое в правой части (7) будем обозначать через $p(\tau, t)$ (это слагаемое зависит и от τ, и от t), а второе слагаемое — через $q(\tau)$ (это слагаемое зависит от τ и не зависит от t):

$$p(\tau,t) = P\Big\{\Big(\xi(x_1) < h\Big) \cap \Big(\xi(x_2) > h\Big) \cap \Big(\xi(x_3) > h\Big)\Big\},$$

$$q(\tau) = P\Big\{\Big(\xi(x_2) < h\Big) \cap \Big(\xi(x_3) > h\Big)\Big\},$$

так что

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = p(\tau, t) + q(\tau).$$

Положим по определению $V = \xi(x_2)$, $U = \xi(x_3)$ и $W = \xi(x_1)$. Тогда случайные величины V, U, W имеют одинаковые дисперсии σ^2 и совместное нормальное распределение. Обозначим через $\rho_{VU}(v,u)$ плотность совместного распределения случайных величин V и U. Поскольку

$$\mathrm{M}\{V\} = -a_1 x_2 + a_0, \quad \mathrm{M}\{U\} = -a_1 x_3 + a_0,$$

а коэффициент корреляции случайных величин V и U дается значением $r = r(\tau)$, то

$$\rho_{VU}(v,u) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2(\tau))}\left(\frac{(v-(-a_1x_2+a_0))^2}{\sigma^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(u-(-a_1x_3+a_0))^2}{\sigma^2} - 2r(\tau)\frac{(v-(-a_1x_2+a_0))(u-(-a_1x_3+a_0))}{\sigma^2}\right)\right\}$$

и

$$q(\tau) = P\Big\{\Big(\xi(x_2) < h\Big) \cap \Big(\xi(x_3) > h\Big)\Big\} = \int\limits_h^\infty du \int\limits_{-\infty}^h \rho_{VU}(v,u)dv.$$

Нетрудно показать, что вычислительную формулу для вероятности $q(\tau)$ можно привести к виду

$$q(\tau) = \int\limits_{b/\sigma}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{1-r^2(\tau)}}\left(\frac{b}{\sigma}\left(\frac{\tau}{\tau_0}-1\right) + r(\tau)y\right)\right)dy, \tag{8}$$

где введено обозначение $\tau_0 = b/a_1$ (см. рис. 1 и 2).

Теперь займемся вычислением вероятности

$$p(\tau,t) = P\Big\{\Big(\xi(x_1) < h\Big) \cap \Big(\xi(x_2) < h\Big) \cap \Big(\xi(x_3) > h\Big)\Big\}.$$

Введем обозначения:

$$m_1 = \mathrm{M}\{\xi(x_1)\}, \quad m_2 = \mathrm{M}\{\xi(x_2)\}, \quad m_3 = \mathrm{M}\{\xi(x_3)\},$$
$$r_{12} = \frac{\mathrm{M}\{(\xi(x_1) - m_1)(\xi(x_2) - m_2)\}}{\sigma^2}, \quad r_{21} = r_{12},$$
$$r_{13} = \frac{\mathrm{M}\{(\xi(x_1) - m_1)(\xi(x_3) - m_3)\}}{\sigma^2}, \quad r_{31} = r_{13},$$
$$r_{23} = \frac{\mathrm{M}\{(\xi(x_2) - m_2)(\xi(x_3) - m_3)\}}{\sigma^2}, \quad r_{32} = r_{23},$$
$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = 1.$$

Заметим, что $r_{12} = r(t)$, $r_{23} = r(\tau)$, $r_{13} = r(t+\tau)$, где $r(y)$ – ранее введенная нормированная корреляционная функция процесса $\zeta(x)$. Положим по определению

$$R = R(\tau, t) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 1 + 2r_{12}r_{13}r_{23} - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2;$$

R_{ij} – алгебраическое дополнение элемента r_{ij} определителя R. Тогда

$$(9)\ \ p(\tau,t) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sigma^3\sqrt{R}} \int\limits_{-\infty}^{h} dz_1 \int\limits_{h}^{\infty} dz_2 \int\limits_{h}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2R} \sum_{i,j=1}^{3} R_{ij} \frac{(z_i - m_i)(z_j - m_j)}{\sigma^2} \right\} dz_3.$$

В Приложении 1 показано, что вычислительную формулу для $p(\tau, t)$ можно привести к виду

$$p(\tau,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \mathcal{F}(u,\tau,t)du,$$

где функция $\mathcal{F}(u, \tau, t)$ выписана в явном виде в Приложении 1.

Поставим задачу нахождения точки абсолютного максимума функции

$$\Delta(\tau,t) \equiv p(\tau,t) + q(\tau)$$

в области $\tau > 0$, $t > 0$. Из вероятностных соображений и гауссовости рассматриваемых распределений очевидно, что при непрерывной корреляционной функции $r(y)$ функция $\Delta(\tau, t)$ непрерывна и ограничена в указанной области. Кроме того, для рассматриваемого процесса $\xi(x)$ из определения вероятностей $p(\tau, t)$ и $q(\tau)$ следует, что

$$\lim_{\tau\to 0} q(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to 0} p(\tau,t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \lim_{t\to 0} p(\tau,t) = 0 \quad \forall \tau > 0,$$
$$\lim_{\tau\to \infty} q(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to \infty} p(\tau,t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \lim_{t\to \infty} p(\tau,t) = 0 \quad \forall \tau > 0,$$

т.е. при приближении к границам области функция $\Delta(\tau,t)$ стремится к нулю. В этой ситуации, приняв во внимание положительность, ограниченность и непрерывность функции $\Delta(\tau,t)$ в области $\{(\tau,t):\tau>0,t>0\}$ для рассматриваемого процесса $\xi(x)$, можно утверждать, что точка абсолютного максимума существует и этот максимум достигается по крайней мере в одной точке (τ^*,t^*) области $\tau>0,\ t>0$.

Будем предполагать функцию $r(y)$ дифференцируемой. Тогда из полученных явных выражений для $p(\tau,t)$ и $q(\tau)$ следует, что функция $\Delta(\tau,t)$ дифференцируема по каждой из переменных τ и t, так что точка (τ^*,t^*) должна удовлетворять следующим необходимым условиям максимума:

$$\left.\frac{\partial\Delta}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau^*,t=t^*}=0,\qquad \left.\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right|_{\tau=\tau^*,t=t^*}=0,$$

т.е. для нахождения значений τ^* и t^* требуется в области $\{(\tau,t):\tau>0,t>0\}$ решить систему двух уравнений:

$$\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial\tau}+\frac{dq(\tau)}{d\tau}=0,\qquad \frac{\partial p(\tau,t)}{\partial t}=0. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{dq(\tau)}{d\tau}=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2\left(\frac{\tau}{\tau_0}-1\right)^2\right\}\times$$
$$\times\left(-\frac{r'(\tau)}{\sqrt{1-r^2(\tau)}}\exp\left\{-\frac{d^2}{2}\right\}-\frac{\sqrt{2\pi}b}{\sigma\tau_0}\Phi(-d)\right), \tag{11}$$

где

$$d=d(\tau)=\frac{b}{\sigma}\frac{1-r(\tau)}{\sqrt{1-r^2(\tau)}}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

В Приложении 2 показано, что

$$\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial\tau}=\frac{1}{2\pi}\Big(\alpha(\tau,t)+\beta(\tau,t)+\gamma(\tau,t)\Big)\quad\text{и}$$
$$\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\left(\hat\alpha(\tau,t)+\hat\beta(\tau,t)\right), \tag{12}$$

где $\alpha(\tau,t)$, $\beta(\tau,t)$, $\gamma(\tau,t)$, $\hat\alpha(\tau,t)$ и $\hat\beta(\tau,t)$ – функции переменных τ и t, выписанные в явном виде в Приложении 2.

С учетом результатов (11) и (12) первое из уравнений (10) принимает вид

$$\alpha(\tau,t)+\beta(\tau,t)+\gamma(\tau,t)=$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2\left(\frac{\tau}{\tau_0}-1\right)^2\right\}\left(\frac{r'(\tau)}{\sqrt{1-r^2(\tau)}}\exp\left\{-\frac{d^2}{2}\right\}+\frac{\sqrt{2\pi}b}{\sigma\tau_0}\Phi(-d)\right), \tag{13}$$

а второе –

$$\hat{\alpha}(\tau, t) + \hat{\beta}(\tau, t) = 0. \tag{14}$$

Система уравнений (13), (14) может быть решена каким-либо численным методом. Если решений будет несколько, нужно взять то решение, которому будет соответствовать наибольшее значение функции $\Delta(\tau, t)$.

4. Пример численных оценок

Для рассматриваемого процесса $\xi(x)$ оценки (3) для вероятности $P\{Z\}$ имеют вид

$$N^-(x', x'') - N^+(-\infty, x'') \leqslant P\{Z\} \leqslant N^-(x', x''), \tag{15}$$

где числа $N^-(x', x'')$ и $N^+(-\infty, x'')$ вычисляются по формулам (5) и (6). Более точные оценки для $P\{Z\}$, следующие из общего результата (4) при $n = 2$, в данном случае выглядят так:

$$N^-(x', x'') - N^+(-\infty, x'') + q(\tau_{\max}) \leqslant P\{Z\} \leqslant N^-(x', x''), \tag{16}$$

где $\tau_{\max}$ – значение τ, при котором функция $q(\tau)$, $\tau > 0$, вычисляемая по (8), достигает наибольшего значения. Наконец, еще более точные оценки для $P\{Z\}$, следующие из (4) при $n = 3$, имеют вид

$$N^-(x', x'') - N^+(-\infty, x'') + \Delta(\tau^*, t^*) \leqslant P\{Z\} \leqslant N^-(x', x''), \tag{17}$$

где (τ^*, t^*) – точка абсолютного максимума функции $\Delta(\tau, t)$ в области $\tau > 0$ и $t > 0$.

Для подсчета чисел $N^-(x', x'')$ и $N^+(-\infty, x'')$ по формулам (5) и (6) достаточно задать значения дробей b/σ и a_1/σ_1. Чтобы найти $\tau_{\max}$, τ^* и t^* и подсчитать $q(\tau_{\max})$ и $\Delta(\tau^*, t^*)$, нужно дополнительно задать функцию $r(\tau)$. При этом заметим, что параметр τ_0 после задания дробей b/σ, a_1/σ_1 и функции $r(\tau)$ также определяется:

$$\tau_0 = \frac{b}{a_1} = \frac{b/\sigma}{a_1/\sigma_1}\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{b/\sigma}{a_1/\sigma_1}\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{-r''(0)}} = \frac{b/\sigma}{a_1/\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{-r''(0)}}. \tag{18}$$

П р и м е р. Пусть

$$\frac{b}{\sigma} = 1, \quad \frac{a_1}{\sigma_1} = 1, \quad r(\tau) = \exp\{-\tau^2\}.$$

Тогда[3]

$$N^-(x', x'') = 0{,}739, \quad N^+(-\infty, x'') = 0{,}070, \quad \tau_0 = 1/\sqrt{2}, \quad \tau_{\max} = 0{,}972,$$
$$q(\tau_{\max}) = 0{,}024, \quad \tau^* = 0{,}730, \quad t^* = 0{,}614, \quad \Delta(\tau^*, t^*) = 0{,}030.$$

[3] Приводимые далее численные значения $N^-(x', x'')$, $N^+(-\infty, x'')$, $\tau_{\max}$, $q(\tau_{\max})$, τ^*, t^* и $\Delta(\tau^*, t^*)$ даются с округлением до тысячных долей единицы.

Оценки (15), (16) и (17) приводят к результатам

$$0{,}669 \leqslant P\{Z\} \leqslant 0{,}739, \quad 0{,}693 \leqslant P\{Z\} \leqslant 0{,}739 \quad \text{и} \quad 0{,}699 \leqslant P\{Z\} \leqslant 0{,}739$$

соответственно, или, используя эквивалентную форму записи, к результатам

$$P\{Z\} = 0{,}704 \pm 0{,}035, \quad P\{Z\} = 0{,}716 \pm 0{,}023 \quad \text{и} \quad P\{Z\} = 0{,}719 \pm 0{,}020.$$

Как видно из этого примера (и как уже отмечалось в [10]), использование неравенств (4) вместо неравенств (3) позволяет заметно точнее оценить искомую вероятность $P\{Z\}$ уже при $n = 2$, т.е. когда для подсчета величины $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ берется лишь одна точка разбиения интервала (x_0, x''). Так, в данном примере в случае использования неравенств (15) относительная погрешность определения вероятности составляет $(0{,}035/0{,}704) \cdot 100\,\% = 4{,}97\,\%$, а в случае использования неравенств (16) – $(0{,}023/0{,}716) \cdot 100\,\% = 3{,}21\,\%$.

При переходе к использованию неравенств (17), т.е. при $n = 3$, когда для подсчета величины $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ берутся две точки разбиения интервала (x_0, x''), относительная погрешность в рассматриваемом примере уменьшается до значения $(0{,}020/0{,}719) \cdot 100\,\% = 2{,}78\,\%$. Спрашивается, существенно ли такое улучшение оценок? Ответ на этот вопрос зависит от конкретной практической задачи, которая приводит к необходимости подсчета изучаемой вероятности. Если речь идет об оценке вероятности успешного приземления самолета, то такое улучшение существенно.

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе для гауссовского процесса конкретизированы ранее полученные для непрерывных процессов общие результаты, касающиеся оценок вероятности события, состоящего в том, что первое достижение заданного уровня исследуемым случайным процессом происходит на заданном промежутке изменения независимой переменной. Предлагаемые оценки (3) для искомой вероятности основаны на использовании известных результатов Райса для среднего числа пересечений, а усиление оценок (3) оценками (4) дополнительно предполагает подсчет величины $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, фигурирующей в теореме 2. Показано, что использование неравенств (4) вместо (3) позволяет существенно улучшить оценки искомой вероятности уже в случае $n = 2$. Использование неравенств (4) с $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ при $n = 3$ приводит к дальнейшему, вполне заметному улучшению оценок, хотя и не столь значительному, как при переходе от использования неравенств (3) к использованию неравенств (4) с $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ при $n = 2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Упростим правую часть равенства (9). Замена переменных

$$\tilde{z}_1 = \frac{z_1 - m_1}{\sigma}, \quad \tilde{z}_2 = \frac{z_2 - m_2}{\sigma}, \quad \tilde{z}_3 = \frac{z_3 - m_3}{\sigma}$$

позволяет привести интеграл (9) к виду

$$p(\tau,t)=\frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{R}}\int\limits_{\frac{h-m_2}{\sigma}}^{\infty}d\tilde{z}_2\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{h-m_3}{\sigma}}^{\infty}d\tilde{z}_3\exp\left\{-\frac{\tilde{z}_2^2}{2(1-r_{23}^2)}-\frac{\tilde{z}_3^2}{2(1-r_{23}^2)}+\frac{r_{23}}{1-r_{23}^2}\tilde{z}_2\tilde{z}_3\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\frac{h-m_1}{\sigma}}\exp\left\{-\frac{1}{2R}\left(\sqrt{1-r_{23}^2}\,\tilde{z}_1+\frac{r_{13}r_{23}-r_{12}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}\tilde{z}_2+\frac{r_{12}r_{23}-r_{13}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}\tilde{z}_3\right)^2\right\}d\tilde{z}_1,$$

откуда, вычисляя внутренний интеграл по $\tilde{z}_1$, получим

$$p(\tau,t)=\frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}\int\limits_{\frac{h-m_3}{\sigma}}^{\infty}d\tilde{z}_3\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{h-m_2}{\sigma}}^{\infty}\Phi\left(\tilde{g}(\tilde{z}_2,\tilde{z}_3)\right)\exp\left\{-\frac{\tilde{z}_2^2}{2(1-r_{23}^2)}-\frac{\tilde{z}_3^2}{2(1-r_{23}^2)}+\frac{r_{23}\tilde{z}_2\tilde{z}_3}{1-r_{23}^2}\right\}d\tilde{z}_2,$$

где введено обозначение

$$\tilde{g}(\tilde{z}_2,\tilde{z}_3)=\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\sqrt{1-r_{23}^2}\frac{h-m_1}{\sigma}+\frac{r_{13}r_{23}-r_{12}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}\tilde{z}_2+\frac{r_{12}r_{23}-r_{13}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}\tilde{z}_3\right).$$

Сделав в получившемся двойном интеграле для $p(\tau,t)$ замену переменных

$$v=\frac{\tilde{z}_2-r_{23}\tilde{z}_3}{\sqrt{1-r_{23}^2}},\quad u=\tilde{z}_3,$$

приведем его к виду

$$p(\tau,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{h-m_3}{\sigma}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\left\{\int\limits_{f(u)}^{\infty}\Phi\left(g(v,u)\right)\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv\right\}du,$$

где

$$g(v,u)=\frac{\sqrt{1-r_{23}^2}}{\sqrt{R}}\left(\frac{h-m_1}{\sigma}+\frac{r_{13}r_{23}-r_{12}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}v-r_{13}u\right),$$

$$f(u)=\frac{h-m_2}{\sigma\sqrt{1-r_{23}^2}}-\frac{r_{23}u}{\sqrt{1-r_{23}^2}}.$$

Если теперь учесть, что (см. рис. 1 и 2)

$$m_3 = -a_1 x_3 + a_0, \quad m_2 = -a_1(x_3 - \tau) + a_0, \quad m_1 = -a_1(x_3 - \tau - t) + a_0,$$
$$h - m_3 = b, \quad a_1 = b/\tau_0,$$

то

$$\frac{h - m_3}{\sigma} = \frac{b}{\sigma}, \quad \frac{h - m_2}{\sigma} = \frac{b}{\sigma}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad \frac{h - m_1}{\sigma} = \frac{b}{\sigma}\left(1 - \frac{\tau + t}{\tau_0}\right);$$

кроме того, $r_{23} = r(\tau)$, $r_{12} = r(t)$, $r_{13} = r(\tau + t)$, $R = R(\tau, t)$, так что функция $f(u)$ зависит еще и от τ, а функция $g(v, u)$ — еще и от τ и t. Окончательно можем записать

$$p(\tau, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \mathcal{F}(u, \tau, t) du, \tag{П.1.1}$$

где

$$\mathcal{F}(u, \tau, t) = \int\limits_{f(u,\tau)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} \Phi\left(g(v, u, \tau, t)\right) dv,$$

$$f(u, \tau) = \frac{b(1 - \tau/\tau_0)}{\sigma\sqrt{1 - r^2(\tau)}} - \frac{u r(\tau)}{\sqrt{1 - r^2(\tau)}},$$

$$g(v, u, \tau, t) = \frac{\sqrt{1 - r^2(\tau)}}{\sqrt{R(\tau, t)}} \left(\frac{b}{\sigma}\left(1 - \frac{\tau + t}{\tau_0}\right) + v\frac{r(t+\tau)r(\tau) - r(t)}{\sqrt{1 - r^2(\tau)}} - u r(t+\tau)\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Найдем частную производную $\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial \tau}$. В соответствии с (П.1.1) получим[4], что

$$\frac{\partial p(\tau, t)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \times \tag{П.2.1}$$
$$\times \left\{ \int\limits_{f(u,\tau)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} \frac{\partial \Phi\left(g(v, u, \tau, t)\right)}{\partial \tau} dv \right\} du -$$
$$- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \frac{\partial f(u, \tau)}{\partial \tau} \exp\left\{-\frac{f^2(u, \tau) + u^2}{2}\right\} \Phi\left(g(f(u, \tau), u, \tau, t)\right) du.$$

[4] Здесь и далее все аналитические преобразования и вычисления представлены настолько подробно, насколько это позволяет сделать ограничение на объем статьи.

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial f(u,\tau)}{\partial \tau} = A - Bu, \quad g(f(u,\tau),u,\tau,t) = C - Du,$$

где обозначено:

$$A = A(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2(\tau)}}\frac{b}{\sigma}\left[\frac{r(\tau)r'(\tau)}{1-r^2(\tau)}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{1}{\tau_0}\right],$$

$$B = B(\tau) = \frac{r'(\tau)}{(1-r^2(\tau))^{3/2}},$$

$$D = D(\tau,t) = \frac{r(\tau+t) - r(t)r(\tau)}{\sqrt{1-r^2(\tau)}\sqrt{R(\tau,t)}},$$

$$C = C(\tau,t) = \frac{\sqrt{1-r^2(\tau)}}{\sqrt{R(\tau,t)}}\frac{b}{\sigma}\left[\left(1-\frac{\tau+t}{\tau_0}\right) + \frac{r(\tau+t)r(\tau)-r(t)}{1-r^2(\tau)}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right].$$

С учетом этого равенство (П.2.1) принимает вид

$$(\text{П.2.2}) \quad \frac{\partial p(\tau,t)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{f(u,\tau)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} \frac{\partial \Phi\left(g(v,u,\tau,t)\right)}{\partial \tau} dv \right\} du -$$

$$- \frac{K}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty}(A-Bu)\exp\left\{-\frac{\left[u - r(\tau)\frac{b}{\sigma}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right]^2}{2(1-r^2(\tau))}\right\}\Phi(C-Du)du,$$

где

$$K = K(\tau) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right\}.$$

Вычислим внутренний интеграл в первом слагаемом правой части равенства (П.2.2). Если ввести обозначения:

$$E = E(\tau,t) = \frac{\sqrt{1-r^2(\tau)}}{\sqrt{R(\tau,t)}}\frac{b}{\sigma}\left(1-\frac{\tau+t}{\tau_0}\right),$$

$$F = F(\tau,t) = \frac{r(t+\tau)r(\tau)-r(t)}{\sqrt{R(\tau,t)}},$$

$$G = G(\tau,t) = -r(t+\tau)\frac{\sqrt{1-r^2(\tau)}}{\sqrt{R(\tau,t)}},$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}(\tau,t) = \frac{\partial E(\tau,t)}{\partial\tau},$$

$$\tilde{F} = \tilde{F}(\tau,t) = \frac{\partial F(\tau,t)}{\partial\tau},$$

$$\tilde{G} = \tilde{G}(\tau,t) = \frac{\partial G(\tau,t)}{\partial\tau},$$

то

$$g(v,u,\tau,t) = E+Fv+Gu, \qquad \frac{\partial g(v,u,\tau,t)}{\partial\tau} = \tilde{E}+\tilde{F}v+\tilde{G}u,$$

и для искомого внутреннего интеграла получим

$$\int\limits_{f(u,\tau)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}\frac{\partial\Phi\left(g(v,u,\tau,t)\right)}{\partial\tau}dv =$$

$$= \frac{\tilde{F}}{\sqrt{2\pi}(1+F^2)}\exp\left\{-\frac{H^2}{2}-\frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)}\right\} +$$

$$+\frac{(\tilde{E}+\tilde{G}u)(1+F^2)-(E+Gu)F\tilde{F}}{(1+F^2)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)}\right\}\Phi(-H),$$

где

$$H = H(u,\tau,t) = \sqrt{1+F^2}f(u,\tau)+\frac{(E+Gu)F}{\sqrt{1+F^2}}.$$

С учетом этого равенство (П.2.2) принимает вид

$$\text{(П.2.3)}\quad \frac{\partial p(\tau,t)}{\partial\tau} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \frac{\tilde F}{\sqrt{2\pi}(1+F^2)} \exp\left\{-\frac{H^2}{2} - \frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)} - \frac{u^2}{2}\right\} du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \frac{(\tilde E+\tilde G u)(1+F^2) - (E+Gu)F\tilde F}{(1+F^2)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)} - \frac{u^2}{2}\right\} \Phi(-H) du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty} (-K)(A-Bu) \exp\left\{-\frac{\left[u - r(\tau)\frac{b}{\sigma}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right]^2}{2(1-r^2(\tau))}\right\} \Phi(C-Du) du.$$

Интеграл в первом слагаемом правой части равенства (П.2.3) вычисляется:

$$\int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \frac{\tilde F}{\sqrt{2\pi}(1+F^2)} \exp\left\{-\frac{H^2}{2} - \frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)} - \frac{u^2}{2}\right\} du =$$

$$\text{(П.2.4)}\qquad = \sqrt{\frac{R(\tau,t)}{1-r^2(t)}} \frac{\tilde F}{(1-r^2(\tau))(1-r^2(t+\tau))} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{R(\tau,t)T_1^2}{8(1-r^2(t))} - \frac{T_2}{2}\right\} \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\sqrt{\frac{1-r^2(t)}{R(\tau,t)}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R(\tau,t)}{1-r^2(t)}}T_1\right),$$

где

$$T_1 = T_1(\tau,t) = \frac{2}{R(\tau,t)}\frac{b}{\sigma}\left[\left(\frac{\tau+t}{\tau_0} - 1\right)(r(t+\tau) - r(\tau)r(t)) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)(r(\tau) - r(t+\tau)r(t))\right],$$

$$T_2 = T_2(\tau,t) = \frac{1}{R(\tau,t)}\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2 \left[\left(1-r^2(t+\tau)\right)\left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(1-r^2(\tau)\right)\left(\frac{\tau+t}{\tau_0} - 1\right)^2 + 2\left(r(t+\tau)r(\tau) - r(t)\right)\left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)\left(\frac{\tau+t}{\tau_0} - 1\right)\right].$$

Интеграл во втором слагаемом правой части (П.2.3) приводится к виду

$$\int\limits_{b/\sigma}^{\infty} \frac{(\tilde{E}+\tilde{G}u)(1+F^2)-(E+Gu)F\tilde{F}}{(1+F^2)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)}-\frac{u^2}{2}\right\}\Phi(-H)du =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2\left(1-\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)^2\right\}\times \tag{П.2.5}$$

$$\times\left[B^*\int\limits_{s}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}w^2\right\}\Phi(C^*w-D^*)dw + A^*\exp\left\{-\frac{1}{2}s^2\right\}\Phi(L_3)+\right.$$

$$\left.+A^*\frac{r(\tau)-r(t+\tau)r(t)}{\sqrt{1-r^2(t)}\sqrt{1-r^2(t+\tau)}}\exp\left\{-\frac{D^{*2}}{2(1+C^{*2})}\right\}\Phi(L_4)\right],$$

где

$$A^*=A^*(\tau,t)=\frac{\tilde{G}+\tilde{G}F^2-GF\tilde{F}}{(1+F^2)\sqrt{1+F^2+G^2}},$$

$$B^*=B^*(\tau,t)=\frac{\tilde{E}+\tilde{E}F^2-EF\tilde{F}}{(1+F^2)^{3/2}}-\frac{(\tilde{G}+\tilde{G}F^2-GF\tilde{F})EG}{(1+F^2)^{3/2}(1+F^2+G^2)},$$

$$C^*=C^*(\tau,t)=\frac{r(\tau)-r(t+\tau)r(t)}{\sqrt{R(\tau,t)}},$$

$$s=s(\tau,t)=\frac{b/\sigma}{\sqrt{1-r^2(t+\tau)}}\left[1-r(t+\tau)\left(1-\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)\right],$$

$$D^*=D^*(\tau,t)=\frac{b}{\sigma}\frac{\sqrt{1-r^2(t+\tau)}}{\sqrt{R(\tau,t)}}\left[1-\frac{\tau}{\tau_0}-r(t)\left(1-\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)\right],$$

$$L_3=L_3(\tau,t)=\frac{b}{\sigma}\frac{\sqrt{1-r^2(t+\tau)}}{\sqrt{R(\tau,t)}}\times$$

$$\times\left[\frac{r(\tau)-r(t+\tau)r(t)}{1-r^2(t+\tau)}+\frac{r(t)-r(t+\tau)r(\tau)}{1-r^2(t+\tau)}\left(1-\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)-\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right],$$

$$L_4=L_4(\tau,t)=\frac{b}{\sigma}\frac{\sqrt{1-r^2(t)}}{\sqrt{R(\tau,t)}}\times$$

$$\times\left[\frac{r(t+\tau)-r(\tau)r(t)}{1-r^2(t)}\left(1-\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)+\frac{r(\tau)-r(t+\tau)r(t)}{1-r^2(t)}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)-1\right].$$

Интеграл в третьем слагаемом правой части (П.2.3) приводится к виду

$$\int\limits_{b/\sigma}^{\infty}(-K)(A-Bu)\exp\left\{-\frac{\left[u-r(\tau)\frac{b}{\sigma}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right]^2}{2(1-r^2(\tau))}\right\}\Phi(C-Du)du =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right\}\left[\frac{b/\sigma}{\tau_0\sqrt{1-r^2(\tau)}}\times\right.$$

$$\times\int\limits_{d}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}w^2\right\}\Phi\left(L_5-D\sqrt{1-r^2(\tau)}w\right)dw+ \tag{П.2.6}$$

$$+B\sqrt{1-r^2(\tau)}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2\frac{\left(1-r(\tau)\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right)^2}{2(1-r^2(\tau))}\right\}\Phi(L_1)+$$

$$\left.+B\frac{r(t)r(\tau)-r(t+\tau)}{\sqrt{1-r^2(t)}}\exp\left\{-\left(\frac{b}{\sigma}\right)^2\frac{\left(1-\frac{\tau+t}{\tau_0}-r(t)\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right)^2}{2(1-r^2(t))}\right\}\Phi(L_2)\right],$$

где

$$L_1 = L_1(\tau,t) =$$

$$=\frac{b}{\sigma}\frac{\left[r(t)r(\tau)-r(t+\tau)+(r(t+\tau)r(\tau)-r(t))\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)+(1-r^2(\tau))\left(1-\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)\right]}{\sqrt{1-r^2(\tau)}\sqrt{R(\tau,t)}},$$

$$L_2 = L_2(\tau,t) =$$

$$=\frac{b}{\sigma}\frac{\left[(r(t+\tau)-r(t)r(\tau))\left(1-\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)+(r(\tau)-r(t)r(t+\tau))\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)+r^2(t)-1\right]}{\sqrt{1-r^2(t)}\sqrt{R(\tau,t)}},$$

$$L_5 = L_5(\tau,t) = \frac{b}{\sigma}\frac{\sqrt{1-r^2(\tau)}}{\sqrt{R(\tau,t)}}\left[1-\frac{\tau+t}{\tau_0}-r(t)\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right],$$

$$d = d(\tau) = \frac{b}{\sigma}\frac{\left[1-r(\tau)\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right]}{\sqrt{1-r^2(\tau)}}.$$

С учетом равенств (П.2.4), (П.2.5) и (П.2.6) равенство (П.2.3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial\tau}=\frac{1}{2\pi}(\alpha(\tau,t)+\beta(\tau,t)+\gamma(\tau,t)),$$

где через $\alpha(\tau,t)$ обозначена правая часть равенства (П.2.4), через $\beta(\tau,t)$ – правая часть равенства (П.2.5) и через $\gamma(\tau,t)$ – правая часть равенства (П.2.6).

Найдем производную $\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial t}$. В соответствии с (П.1.1) получим, что

$$\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}\left\{\int\limits_{f(u,\tau)}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}\frac{\partial\Phi\left(g(v,u,\tau,t)\right)}{\partial t}dv\right\}du.$$

Отсюда совершенно аналогично тому, как было получено равенство (П.2.3) из (П.2.1), найдем, что

$$\text{(П.2.7)}\quad \frac{\partial p(\tau,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty}\frac{\hat F}{\sqrt{2\pi}(1+F^2)}\exp\left\{-\frac{H^2}{2}-\frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)}-\frac{u^2}{2}\right\}du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{b/\sigma}^{\infty}\frac{(\hat E+\hat G u)(1+F^2)-(E+Gu)F\hat F}{(1+F^2)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(E+Gu)^2}{2(1+F^2)}-\frac{u^2}{2}\right\}\Phi(-H)du.$$

где

$$\hat E=\hat E(\tau,t)=\frac{\partial E(\tau,t)}{\partial t},\quad \hat F=\hat F(\tau,t)=\frac{\partial F(\tau,t)}{\partial t},\quad \hat G=\hat G(\tau,t)=\frac{\partial G(\tau,t)}{\partial t}.$$

Если теперь ввести обозначения:

$$A^{**}=A^{**}(\tau,t)=\frac{\hat G+\hat G F^2-GF\hat F}{(1+F^2)\sqrt{1+F^2+G^2}},$$

$$B^{**}=B^{**}(\tau,t)=\frac{\hat E+\hat E F^2-EF\hat F}{(1+F^2)^{3/2}}-\frac{(\hat G+\hat G F^2-GF\hat F)EG}{(1+F^2)^{3/2}(1+F^2+G^2)},$$

которые отличаются от введенных выше обозначений A^* и B^* лишь тем, что вместо $\tilde E, \tilde F$ и $\tilde G$ пишутся $\hat E, \hat F$ и $\hat G$ соответственно, то из (П.2.7) получим, что

$$\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}(\hat\alpha(\tau,t)+\hat\beta(\tau,t)),$$

где функция $\hat\alpha(\tau,t)$ отличается от ранее введенной функции $\alpha(\tau,t)$ лишь тем, что вместо $\tilde F$ пишется $\hat F$, а функция $\hat\beta(\tau,t)$ отличается от ранее введенной функции $\beta(\tau,t)$ лишь тем, что вместо A^* и B^* пишутся A^{**} и B^{**} соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Семаков С.Л.* Первое достижение границ случайным процессом // АиТ. 1988. № 6. С. 87–95.

   Semakov S.L. First Arrival of a Random Process on the Boundary // Autom. Remote Control. 1988. V. 49. No. 6. P. 757–764.

2. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // Журн. эксперимент. и теор. физики. 1933. Т. 3. № 3. С. 165–180.

3. *Семаков С.Л.* Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. М.: Наука, 2005.
4. *Семаков С.Л.* Применение известного решения одной задачи о достижении границ немарковским процессом к оценке вероятности успешного приземления самолета // Изв. РАН. ТиСУ. 1996. № 2. С. 139–145.
5. *Семаков С.Л.* Первый выход случайного процесса на границу области // АиТ. 2015. № 4. С. 80–96.

   Semakov S.L. Estimating the Probability That a Multidimensional Random Process Reaches the Boundary of a Region // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 4. P. 613–626.
6. *Семаков С.Л.* Вероятность первого достижения уровня компонентом многомерного процесса на заданном промежутке с соблюдением ограничений на его другие компоненты // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Т. 34. № 2. С. 402–406.
7. *Мирошин Р.Н.* Пересечения кривых гауссовскими процессами. Ленинград: ЛГУ, 1981.
8. *Berman S.* Excursions of Stationary Gaussian Processes Above High Moving Barriers // Ann. Probab. 1973. V. 1. No. 3. P. 365–387.
9. *Slepian D.* The One-Sided Barrier Problem for Gaussian Noise // Bell Syst. Techn. J. 1962. V. 41. No. 2. P. 463–501.
10. *Семаков С.Л., Семаков И.С.* Оценка вероятности одного события, связанного с моментом первого достижения уровня случайным процессом // АиТ. 2018. № 4. С. 65–74.

    Semakov S.L., Semakov I.S. Estimating the Probability of an Event Related to the Moment When a Random Process First Reaches a Given Level // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 4. P. 632–640.
11. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
12. *Rice S.O.* Mathematical Analysis of Random Noise // Bell Syst. Techn. J. 1945. V. 24. No. 1. P. 46–156.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 23.02.2018

После доработки 25.06.2018

Принята к публикации 08.11.2018