Автоматика и телемеханика, № 4, 2019

Обзоры

© 2019 г. В.С. КОЗЯКИН, д-р физ.-мат. наук (kozyakin@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва,
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва),
Н.А. КУЗНЕЦОВ, академик РАН (kuznetsov@cplire.ru)
(Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва,
Московский физико-технический институт (ГУ)),
П.Ю. ЧЕБОТАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (pavel4e@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва,
Московский физико-технический институт (ГУ))

КОНСЕНСУС В АСИНХРОННЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ. I. АСИНХРОННЫЕ МОДЕЛИ КОНСЕНСУСА[1]

Представлен обзор результатов по моделям консенсуса в асинхронных мультиагентных системах с дискретным и непрерывным временем. Дается описание математических методов, разработанных в последние годы, которые используются при анализе проблем устойчивости, стабилизируемости и консенсуса для линейных мультиагентных систем с дискретным временем. В основе этих методов лежит идея привлечения понятия совместного/обобщенного спектрального радиуса наборов матриц для анализа скорости сходимости матричных произведений с сомножителями из множеств матриц со специальными свойствами.

Ключевые слова: асинхронные мультиагентные системы, консенсус, устойчивость, стабилизируемость, марковские системы, матричные произведения, совместный спектральный радиус.

DOI: 10.1134/S0005231019040019

1. Введение

В последние годы растущий интерес исследователей привлекают мультиагентные системы (МАС) с асинхронным взаимодействием агентов. Следует отметить, что в современной научной литературе термин "мультиагентные системы" часто трактуется достаточно неопределенно и широко. В широком смысле под мультиагентными понимают любые системы, состоящие из нескольких сравнительно изолированных частей (агентов), которые функционируют в определенном смысле независимо от других (иногда добавляют "интеллектуально"), обмениваясь тем не менее с остальными агентами информацией. В более строгом понимании, принятом в теории управления, теории передачи информации и других "родственных" областях науки, под мультиагентными системами понимают системы, в которых каждый агент имеет свою последовательность моментов времени, в которые он обновляет

[1] Работа поддержана грантом Российского научного фонда 16-11-00063, предоставленным ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

информацию о своем состоянии и использует обновленную информацию о состояниях других агентов. Дискретность и асинхронность информационного обмена приближает модели мультиагентных систем к реальности, позволяет рационально использовать вычислительные и коммуникационные ресурсы. В то же время изучение свойств асинхронных систем и синтез управления для них приводят к более сложным задачам и требуют более совершенного математического аппарата, чем аналогичные исследования, проводимые в предположениях синхронности. В связи с этим первая часть настоящего обзора содержит информацию о современных разработках в области анализа и синтеза асинхронных протоколов консенсуса, составляющих ядро алгоритмов децентрализованного управления сетевыми мультиагентными системами.

Несмотря на то, что термин “мультиагентные системы” стал широко использоваться в научной литературе в последние 20 лет, близкие понятия под другими названиями использовались уже давно, как минимум с начала 50-х гг. XX в. При математическом анализе такого рода систем в зависимости от исторических традиций и области науки использовались такие термины, как асинхронные или рассинхронизованные системы, переключающиеся системы и т.п. А при исследовании линейных мультиагентных систем с дискретным временем (анализ устойчивости которых часто выражается в терминах сходимости матричных произведений) зачастую авторы, опуская содержательную мотивацию, просто ограничивались изучением свойств бесконечных матричных произведений. О многообразии систем, которые могут с полным правом в современной терминологии трактоваться как мультиагентные, говорят следующие примеры, где асинхронный характер взаимодействия различных частей систем возникает естественно:

- системы, состоящие из живых организмов;
- стаи мобильных роботов, многопроцессорные системы; мультиконтроллерные устройства;
- распределенные информационно-коммуникационные сети;
- вычислительные GRID-алгоритмы;
- модели Хопфилда – Танка [1–3] нейронной активности в живых организмах;
- производственные системы;
- модели рыночной экономики и т.д.

Консенсус в мультиагентной системе есть общее для всех агентов значение некоторой рассматриваемой характеристики. Как правило, предполагается, что это общее значение должно оставаться постоянным с момента t^* достижения консенсуса. Иногда допускается, однако, что это значение, оставаясь общим для всех агентов, может меняться во времени. Последний случай сводится к предыдущему: для этого в качестве новой характеристики достаточно рассмотреть функцию изменения во времени характеристики, рассмотренной ранее, при $t \geqslant t^*$. Под *асимптотическим консенсусом* понимают стремление значения исследуемой характеристики каждого агента к общему пределу при $t \to \infty$.

В мультиагентных системах, исходно описываемых дифференциальными или разностными уравнениями второго порядка, как правило, в вектор состояния агента включают как исследуемую переменную, так и скорость ее изменения. В этом случае речь идет обычно о консенсусе по скорости. Если консенсусное значение скорости отлично от нуля, то значения самой переменной ни к какому пределу не сходятся. Для систем, состоящих из интеграторов первого порядка, скорость изменения исследуемой переменной в вектор состояния не включают и говорят о консенсусе по самой этой переменной.

К понятию консенсуса близко понятие *синхронизации процессов*, введенное в работах И.И. Блехмана [4]. В широком смысле синхронизация понимается как согласованное поведение агентов [5]. Полная или частичная координатная синхронизация означает асимптотическое сближение состояний агентов $\|x_i(t) - x_j(t)\| \to 0$ или их наблюдаемых выходов $\|y_i(t) - y_j(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Для колеблющихся или вращающихся тел и вообще для колебательных процессов часто важна *частотная синхронизация*, а при равной частоте также *фазовая синхронизация*.

В начале 2000-х гг. было осознано, что протоколы поиска консенсуса составляют ядро алгоритмов управления сетевыми мультиагентными системами. Это связано с тем, что если агенты способны прийти к консенсусу, то далее мультиагентная система может решать поставленную перед ней задачу как единое целое. Тем самым специфика децентрализованного управления в существенной мере сводится к решению задач достижения консенсуса. Поэтому неудивительно, что значительная часть работ по сетевому управлению посвящена именно этим задачам.

Одной из сравнительно ранних работ, в которых проблема консенсуса для асинхронных систем была выделена и сформулирована в простой форме, был оставшийся почти не замеченным отчет [6]. В 2000-е гг. анализ математических проблем консенсуса в мультиагентных системах стал одним из важнейших направлений в потоке исследований по устойчивости и стабилизируемости мультиагентных систем.

Уже первые попытки анализа динамики таких подклассов мультиагентных систем, как асинхронные (рассинхронизованные) системы управления [7] или системы распределенных вычислений [8], показали, что даже в случае линейных систем классические методы анализа плохо “справляются” с возникающими задачами. Позже ряд проблем устойчивости и стабилизируемости линейных мультиагентных систем были сведены к задачам о сходимости произведений матриц, описывающих поведение агентов в последовательные промежутки времени, и исследованы с использованием различных вариантов понятия совместного спектрального радиуса набора матриц (см., например, библиографию [9]).

Тем не менее и сегодня комплекс математических методов анализа мультиагентных систем едва ли можно считать сформированным ввиду большого разнообразия систем, объединенных термином “мультиагентные”, а также из-за сложности анализа их функционирования. В следующих частях настоящего обзора основное внимание уделено достижениям и подходам, развитым в последние годы для анализа устойчивости и стабилизируемости лишь одного класса мультиагентных систем – так называемых линейных переключающихся систем, которые изменяют свои состояния в определенные дискретные моменты времени.

2. Базовые понятия

Динамика агента с номером i в непрерывном времени $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ в составе группы из N агентов моделируется обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), u_i(t)), \quad i \in V = \{1, \dots, N\}, \tag{1}$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ и $u_i(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – соответственно вектор состояния и управляющий вектор агента i в момент t (их порой удобно представлять векторстроками); функция $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \to \mathbb{R}^{n_x}$ удовлетворяет условию $f(0, 0) = 0$.

Относительная автономность и пространственная разделенность агентов делают реалистичной асинхронную парадигму их взаимодействия, при которой каждый агент имеет свой набор моментов времени, когда он актуализирует доступную другим агентам информацию о своем состоянии и начинает использовать новейшую предоставленную агентами-“соседями” информацию об их состояниях.

Информация, представляемая агентом i, имеет вид $x_i(s^i_k)$, где $\{s^i_k\}$, $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ – последовательность моментов времени, удовлетворяющая условиям

$$0 = s^i_0 < s^i_1 < \dots < s^i_k < \dots \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{k\to\infty} s^i_k = +\infty, \quad i \in V. \tag{2}$$

Последовательность (2) определяет, когда производятся измерения состояния агента i, используемые как им самим, так и его “соседями”. Очевидно, $\bigcup_{k=0}^{\infty}[s^i_k, s^i_{k+1}) = \mathbb{R}^+$. Пусть $T^i_k = s^i_{k+1} - s^i_k$ – интервал времени между двумя последовательными моментами наблюдения для $i \in V$. Величина T^i_k называется *k-м асинхронным периодом* агента i. Не учитывая задержек на квантование и кодирование данных, результатом данного измерения будем считать пакет данных $(s^i_k, x^i(s^i_k))$, где s^i_k – временна́я метка. Этот пакет данных предоставляется “соседям” агента i. При этом соседство определяется топологией информационного взаимодействия, моделируемой взвешенным *орграфом влияний* Γ.

3. Асинхронные механизмы организации взаимодействия агентов

Влияние асинхронности используемой информации (“выборок”) на точность результатов исследуется специалистами по управлению, по крайней мере, с середины 80-х гг. XX в. [10, 11]. Для теории мультиагентных систем эта проблема имеет первостепенное значение. Так, каждый робот при совместном движении с другими роботами, планируя свой маршрут, обычно использует информацию о положении и скоростях роботов-соседей. При этом получение информации разными роботами не обязательно синхронизовано: как отмечено выше, асинхронные механизмы сбора информации более реалистичны. В то же время асинхронная система может быть неустойчива при устойчивости соответствующей синхронной системы [12]. В техническом отношении алгоритмы управления асинхронными системами предъявляют довольно строгие требования к надежности датчиков и контроллеров, к возможным ошибкам и задержкам передачи и обработки информации. Большинство результатов в этой области было получено для систем одинарных и двойных интеграторов, но есть и результаты, относящиеся к системам с общей линейной [13–20] и нелинейной [21–24] динамикой.

В теории децентрализованного управления мультиагентными системами рассматриваются четыре основные механизма [25, 26] организации измерений при асинхронном взаимодействии агентов.

1. *Асинхронный равномерный механизм* (asynchronous uniform sampling, AUS). Этот механизм из-за относительной простоты имплементации и анализа использовался в ранних цифровых реализациях МАС. Здесь интервал между измерениями i-го агента есть известная константа T^i [27], т.е. $T_k^i \equiv T^i > 0$. Тем самым состояния агента i измеряются в эквидистантные моменты времени $s_k^i = kT^i,\ k \in \mathbb{N},\ i \in V$. Для анализа таких систем обычно используют модели МАС с временны́ми задержками.

2. *Асинхронный неравномерный механизм* (asynchronous nonuniform sampling, ANS). Этот механизм, предполагающий апериодические измерения состояния каждого агента, сложнее, но обеспечивает бо́льшую гибкость и позволяет моделировать более широкий класс МАС [28–32]. Здесь интервал между измерениями агента i может произвольно меняться, оставаясь в заданных границах: $T_k^i \in [T_m^i, T_M^i] \subseteq \mathbb{R}^+$, где T_m^i и T_M^i – известные константы; T_k^i не фиксировано, но ограничено.

3. *Асинхронный случайный механизм* (asynchronous random sampling, ARS). При этом механизме интервалы между измерениями T_k^i представляют собой случайные величины, распределенные на положительной полуоси. Естественно полагать их распределения финитными, и тогда ARS-механизм можно трактовать как неравномерный (ANS) механизм, дополненный вероятностной структурой. Случайный механизм весьма полезен при моделировании определенных систем, например работы некоторых радаров. Он используется также для снижения перегрузок в компьютерных сетях, для демпфирования периодических колебаний и уменьшения влияния иных помех [33].

Специальным случаем ARS механизмов являются стохастические сплетневые (gossip) алгоритмы [34, 35]. В таких алгоритмах в каждый дискретный момент времени коммуницируют лишь два агента, соединенные ребром в графе взаимодействий. Это ребро для каждого момента выбирается случайно. Подобные асинхронные алгоритмы реализуются, например, тогда, когда на всю мультиагентную систему есть единственный канал связи, в каждый момент используемый лишь одной парой абонентов. Сплетневые алгоритмы – популярный инструмент моделирования социальных сетей. Существует их разновидность, в которой выбор пары взаимодействующих агентов производится детерминированно, например ребра графа могут чередоваться периодически. Для сплетневых алгоритмов ставятся и решаются задачи консенсуса [35], но из-за ярко выраженной специфики этих алгоритмов в настоящем обзоре не останавливаемся на них подробно.

4. *Асинхронный механизм, определяемый событиями* (asynchronous event-triggered sampling, AES). Этот механизм был предложен еще в [36], где использование его обосновывалось принципом приоритетной важности получения данных, нарушающих очевидные прогнозы. С тех пор схема измерений, инициированных событиями, получила развитие в работах по импульсным

системам управления (см., например, [37, 38]), по управлению стохастическими системами [39, 40], в работах П. Табуада [41, 42], а также в ряде работ, напрямую посвященных управлению сетевыми системами, см. [43, 44] и библиографию в [26]. В данном контексте следует упомянуть также исследования по синхронизации в сетях импульсно-связанных осцилляторов [45, 46].

Децентрализованному управлению МАС с использованием асинхронных измерений, инициированных событиями, в последнее время посвящено очень много работ – это направление исследований рассматривается как одно из самых перспективных. Основная мотивация использования механизма AES сводится к исключению из информационных обменов рутинной, легко предсказуемой информации и к экономии за счет этого вычислительных и коммуникационных ресурсов – энергии и пропускной способности сети. В литературе встречается несколько альтернативных терминов для механизмов этого типа: в частности, *межуровневая выборка* (level-crossing sampling) и *выборка Лебега*. Встречаются также комбинированные AES/ANS механизмы, в которых моменты измерений и взаимодействия определяются как событиями, так и не зависящими от событий обстоятельствами [47, 48].

В механизме AES интервалы T_k^i входят в число параметров управления и определяются посредством проверки выбранных условий появления "событий". Этот механизм, по сути, является интеллектуальным, поскольку он позволяет задавать моменты наблюдения продуманным выбором условий подобно тому, как это делает человек.

4. Две парадигмы асинхронного взаимодействия агентов

Для асинхронных механизмов взаимодействия агентов существуют две основных парадигмы формирования управляющих воздействий. Управление, относящееся к агенту i, в соответствии с этими парадигмами может быть представлено в общем виде как

$$u_i(s_k^i) = u\left(K, x_i(s_k^i), \sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}x_j(s_k^i)\right) \tag{3}$$

и

$$u_i(s_k^i) = u\left(K, x_i(s_k^i), \sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}x_j(s_{\tilde{k}}^j)\right) \tag{4}$$

соответственно, где $\mathcal{N}_i$ – множество агентов, влияющих на i, K – матрица управления,

$$\tilde{k} = \tilde{k}(t,j) = \arg\min_p \left\{t - s_p^j \mid t \geqslant s_p^j,\, p \in \mathbb{N}\right\}.$$

Нижний индекс $\tilde{k} = \tilde{k}(t,j)$ момента s^j есть номер позднейшего не превосходящего t момента "опорного" измерения состояния агента j. Чтобы формулы не становились слишком громоздкими, аргументы t и j можно опускать, что не приведет к неоднозначности вследствие присутствия параметров t и j в близком контексте. Так, j всегда является вторым индексом той же величины $s^j_{\tilde{k}}$.

Выражения (3) и (4) отличаются тем, что состояния x_j "соседей" агента i берутся в них в разные моменты времени. В (3) используются актуальные на момент s^i_k измерения агентов-соседей, тогда как в (4), корректируя свое состояние, агент i комбинирует свое последнее измерение с последними доступными измерениями других агентов. При этом может складываться парадоксальная на первый взгляд ситуация, когда агент пользуется более свежими данными о чужих состояниях, чем о своем собственном.

В частном случае задачи консенсуса без лидера с фиксированной топологией и механизмом AES парадигма (3) реализуется протоколом

$$u_i(t) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}\big(x_j(s^i_k) - x_i(s^i_k)\big), \quad t \in [s^i_k, s^i_{k+1}), \quad i \in V, \tag{5}$$

а протокол поиска консенсуса, использующий (4), имеет вид

$$u_i(t) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}\left(x_j(s^j_{\tilde{k}}) - x_i(s^i_k)\right), \quad t \in [s^i_k, s^i_{k+1}), \quad i \in V. \tag{6}$$

Выражение

$$\chi_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}\big(x_j(t) - x_i(t)\big) \tag{7}$$

назовем *термом относительных измерений* агента i в момент t. Пользуясь этим обозначением, перепишем (5) в виде

$$u_i(t) = K\chi_i(s^i_k), \quad t \in [s^i_k, s^i_{k+1}), \quad i \in V.$$

Таким образом, для реализации протокола (5) в реальных МАС каждому агенту i необходимо вычислить терм относительных измерений $\chi_i(t)$ в сопоставленные этому агенту моменты наблюдения $t \in \{s^i_k\}$. Один из способов достижения этой цели – за пренебрежимо малый промежуток времени отправить запросы соседям (агентам $j \in \mathcal{N}_i$) на получение результатов их измерений $x^j(t)$ и, комбинируя полученные ответы с собственными измерениями $x^i(s^i_k)$, реализовать протокол (5) [15]. Однако данный подход, вообще говоря, неприменим к ориентированным агентным сетям, где информационные связи несимметричны: те, кому агент i может отправить запрос, и те, в чьих измерениях он нуждается, – это разные множества агентов. В этом отношении парадигма (4) более реалистична.

5. Использование переменных запаздываний при описании систем с дискретными измерениями

Во второй половине XX в. был предложен [49] подход, связанный с представлением систем с дискретными (в том числе асинхронными и зависящими от событий) измерениями как систем с непрерывным временем и переменными запаздываниями пилообразной формы. Этот подход позволяет адаптировать некоторые результаты анализа систем с запаздываниями для исследования асинхронных МАС. Результаты такого рода могут быть получены с использованием обобщенных функционалов Ляпунова – Красовского [50], так называемого дескрипторного метода исследования систем с запаздыванием [51] и численных методов решения линейных матричных неравенств (LMI). О применении этого подхода для исследования сетевых систем управления см. [52–54]. При изучении задач консенсуса он был использован, в частности, в [23, 55–58]. В случае системы с дискретным временем аналогичный прием применялся в [12].

Далее в обзоре будут рассмотрены исследования, относящиеся к каждому из перечисленных механизмов измерения, взаимодействия агентов и коррекции их состояний на основе информации, полученной от других агентов.

6. Реализации асинхронных безусловных механизмов взаимодействия в детерминированных системах

Равномерный механизм AUS в случае непрерывных моделей второго порядка с переменной топологией изучался, в частности, в [27]. Консенсусный протокол в этой работе имел вид

$$u_i(t) = \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i(s_k^i)} a_{ij}(s_k^i) \left(x_j(s_k^i) - x_i(s_k^i) \right) +$$

$$+ \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i(s_k^i)} a_{ij}(s_k^i) \left(v_j(s_k^i) - v_i(s_k^i) \right), \quad t \in [s_k^i, s_{k+1}^i),$$

где $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$; $s_k^i = t_0 + kl^iT$ при $k \in \mathbb{N}$, $l^i \in \mathbb{N}^+$, $T > 0$; $i \in V$. Далее задача достижения консенсуса преобразовывалась в задачу асимптотической устойчивости системы с дискретным временем.

В большинстве современных работ понятие асинхронности подразумевает непериодичность моментов измерений состояния агентов. Отметим, что выборочные измерения вносят в систему существенный элемент дискретности. Распространенным приемом анализа асинхронных систем с непрерывным временем является преобразование их в системы с дискретным временем, имеющие ту же асимптотику.

Прежде всего рассмотрим асинхронные системы с дискретным временем и детерминированными моментами внесения выборочной информации в законы управления.

6.1. Асинхронность в дискретных детерминированных моделях поиска консенсуса

Одна из ранних асинхронных дискретных моделей консенсуса была предложена в [59, 60], где рассматривалась система точек, сближающихся на плоскости. При этом дуги в орграфе влияний агентов определялись текущей геометрической близостью соответствующих им точек, т.е. зависели от событий. Тем самым изменение топологии системы подчинялось событийному механизму. Однако моменты маневров от этих событий не зависели и определялись каждым агентом произвольно, т.е. подчинялись механизму ANS. Замеченная здесь неоднозначность типична: следует определиться, условия наступления каких моментов оцениваются при определении типа механизма – моментов измерений или же моментов, когда новейшие измерения корректируют управляющие воздействия. Более естественным представляется второй подход.

В [59] накладывалось специальное условие, обеспечивающее симметричность орграфа влияний: “соседями” назначались агенты, расстояние между которыми не превышает константы r. С учетом ряда нюансов, связанных с дискретностью, схема формирования управляющих воздействий была близка к (4). При конкретном алгоритме построения графа влияний (соседства) уравнения коррекции состояний в этой работе, напротив, имели весьма общий, вообще говоря нелинейный, вид. Воздействие на агента i его соседей определялось как

$$u_{i,k+1} = u\left(x_{j_1}\left(s^{j_1}_{\tilde{k}}\right) - x_i(s^i_k), \ldots, x_{j_{|\mathcal{N}_i|}}\left(s^{j_{|\mathcal{N}_i|}}_{\tilde{k}}\right) - x_i(s^i_k)\right), \quad i \in V, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $j_1, \ldots, j_{|\mathcal{N}_i|} \in \mathcal{N}_i$, $u(\cdot)$ – непрерывная функция из шара с центром 0 и радиусом r в пространстве $\mathbb{R}^{|\mathcal{N}_i|}$ в круг с центром 0 и меньшим радиусом r_M на плоскости. Далее на функцию $u(\cdot)$ с переменным количеством аргументов накладывались естественные ограничения, но вид ее оставался достаточно общим. Наконец, новые положения агентов определялись равенством

$$x_i(s^i_{k+1}) = x_i(s^i_k) + u_{i,k+1}, \quad i \in V.$$

Для анализа данной асинхронной системы строилась синхронная система, имеющая те же асимптотические свойства. Процедура ее построения была названа аналитической синхронизацией. Отмечалось сходство предложенного подхода с реализованным в главе 7 классической монографии [8], посвященной асинхронным итерационным алгоритмам.

В этой книге и других работах Джона Цициклиса и его соавторов [11, 61], опубликованных в 1980-е гг. (см. также [62], где компактно изложены соответствующие результаты), был разработан подход к анализу асинхронных систем, который был развит далее и отчасти переоткрыт только через 15–20 лет.

Следует отметить, что доказательства в [8, 11, 61] существенно используют предположение о существовании положительного числа, ограничивающего снизу ненулевые коэффициенты влияния (имеющие тот же смысл, что и коэффициенты a_{ij} в (6)), входящие в рассматриваемую модель. В дальнейших исследованиях значительные усилия были предприняты для получения условий консенсуса при ослаблении ограничений, накладываемых в ранних работах (включая [62]), в частности допущений, что при корректировке состояний каждый агент обязательно учитывает свое предыдущее состояние и что остальные ненулевые коэффициенты влияния равномерно ограничены снизу положительным числом.

Процедура аналитической синхронизации, примененная в [59, 60], использовалась и в [63], где задача координации движения агентов на плоскости решалась посредством последовательного нахождения каждым агентом арифметического среднего его собственного курса (heading) и направлений движения его соседей. При этом скорости всех агентов предполагались равными.

Под соседями агента i в каждый момент понимались те агенты, информация о направлении движения которых доступна i в данный момент. Бинарные отношения доступности информации предполагались произвольными, в частности не обязательно симметричными. Изменение такого отношения со временем можно рассматривать как событие, вместе с тем моменты пересчета курса движения от этих событий не зависели и определялись каждым агентом произвольно. Поэтому моменты коррекции управления подчинялись механизму ANS. Моменты обновления информации, полученной от соседей, можно считать подчиняющимися событийному механизму, однако это ничего не добавляет к утверждению, что система имеет переменную топологию.

Для получения условий консенсуса применялась техника анализа сходимости произведений стохастических матриц (см. часть II настоящего обзора, работы [64–69], заложившие начало этого направления, и библиографию [9]), введенная в контекст сетевого консенсуса в [70], одной из наиболее популярных ранних статей по децентрализованному сетевому управлению (подробнее см. [71, раздел 3.3]).

Относительно задач дискретной сетевой коррекции курса стоит отметить следующее. Пусть агенты совместно движутся и каждый из них время от времени обновляет направление своего движения, причем моменты обновления определяет самостоятельно, что и приводит к асинхронности. Если в модели постулируется, что между моментами обновления направление движения не меняется, то, вообще говоря, это допущение исключает буквальную физическую реализуемость системы, требуя бесконечно больших ускорений физических агентов, имеющих массу. Таким образом, в отношении механических систем такая модель неизбежно приблизительна. В контексте распределенных вычислений, рассмотренных в [8, 11, 61], этой проблемы не возникает. Среди сравнительно недавних работ, выполненных в парадигме параллельных вычислений, отметим [72], где агенты вместе решают задачу кластеризации, используя алгоритм k-средних и асинхронный протокол консенсуса с коммуникациями типа “сплетен” (такие алгоритмы упоминались в разделе 3).

В [12] рассматривалась следующая простая асинхронная дискретная модель консенсуса со взаимодействием типа ANS:

$$x_i(k+1) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) x_j\left(k - d(i,j,k)\right), & i \in V(k), \\ x_i(k), & i \notin V(k), \end{cases} \tag{8}$$

где $P(k) = (p_{ij}(k))$ – стохастическая матрица, задающая переменную структуру взаимодействия агентов, $d(i,j,k)$ – функция запаздывания последнего опорного измерения состояния агента j по отношению к текущему дискретному моменту k, $V(k)$ – множество агентов, чьи состояния обновляются в момент k.

Особенность функции запаздывания $d(i,j,k)$ – зависимость от i, позволяющая разным агентам i использовать разные измерения их соседей.

Авторы получают следующую теорему, используя при доказательстве результаты [73].

Теорема 1. Пусть асинхронный протокол (8) с постоянной матрицей $P(k) = P = (p_{ij})$ обладает следующими свойствами:

1. $p_{ii} > 0$, $i \in V$.

2. *Существует агент $i \in V$ такой, что $\forall k \in \mathbb{N}$ $d(i, i, k) = 0$ и $x_i(0) > 0$.*

3. *Орграф влияний, соответствующий P, имеет остовное исходящее дерево.*

Тогда состояния агентов асимптотически сходятся к консенсусу.

В [12] показано, что данная асинхронная система может быть представлена синхронной системой с переменной топологией. Действительно, можно считать, в частности, что каждый агент корректирует свое состояние на всех тактах, но на некоторых тактах никакие другие агенты на него не влияют. Легко видеть, что этот прием позволяет представить любую асинхронную систему как синхронную с переменным графом взаимодействий. Разумеется, тем самым специфика асинхронности, сосредоточенная в основном в механизмах определения моментов измерений, взаимодействия агентов и переключений управления, не устраняется, а лишь транслируется в графовый язык, что для некоторых целей может быть весьма удобно. Так, в данном случае это позволяет, адаптировав результат [74], получить следующую теорему, аналогичную результату [75].

Теорема 2. Пусть $\Gamma(k)$ – взвешенный орграф влияний в момент k с положительными весами дуг, выбранными из фиксированного конечного множества. Тогда состояния агентов, подчиняющиеся протоколу (8), асимптотически сходятся к консенсусу, если и только если существуют $T > 0$ и неограниченная последовательность временны́х полуинтервалов $[k_0 = 0, k_1)$, $[k_1, k_2), \ldots$ таких, что

1) *для каждого $l \in \mathbb{N}$ имеет место $0 < k_l - k_{l-1} < T$ и*

2) $\bigcup_{k=k_{l-1}}^{k_l - 1} \Gamma_k$ *содержит остовное исходящее дерево.*

Далее в работе обсуждаются проблемы, связанные с нахождением величины асимптотического консенсуса при асинхронном протоколе согласования и с построением алгоритмов управления, приводящих агентов к заданному значению согласуемого параметра.

Отметим, что условие наличия в орграфе влияний остовного исходящего дерева, т.е. наличия хотя бы одного агента, прямо или косвенно влияющего на всех остальных, в случае синхронных непрерывных МАС первого порядка является не только необходимым, но и достаточным условием реализации асимптотического консенсуса при всевозможных начальных условиях [76]. Это следует из того факта, что данное условие эквивалентно [77–79] однократности нуля как собственного значения лапласовской матрицы орграфа зависимостей. Для дискретных систем ситуация чуть сложнее: дополнительно требуется апериодичность стохастической матрицы системы [80, 81]. Условие наличия остовного исходящего дерева в том или ином виде присутствует в большинстве критериев консенсуса – для МАС разных порядков, с разными типами динамики, синхронных и асинхронных, непрерывных и дискретных. О взаимосвязях между свойствами МАС, с одной стороны, и свойствами их орграфов влияний/зависимостей и соответствующих лапласовских матриц – с другой см. [80, 82, 83].

В [84] для исследования асинхронных протоколов консенсуса предлагалось использовать технику нахождения общих неподвижных точек множества нелинейных обобщенно-сжимающих (paracontracting) операторов и были даны примеры такого использования.

В [85] изучалась задача консенсуса для дискретизированной асинхронной системы второго порядка с ориентированной переменной топологией:

$$x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) = \tau_k v_i(t_k), \tag{9}$$

$$v_i(t_{k+1}) - v_i(t_k) = \tau_k u_i(t_k), \quad i \in V, \tag{10}$$

где

$$u_i(t_k) = -\gamma v_i(t_k) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t_k)} a_{ij}(t_k) \left(x_j(t_s^i) - x_i(t_k) \right),$$

$$\underline{a} \leqslant a_{ij}(t_k) \leqslant \bar{a}, \quad 0 < \underline{a} < \bar{a},$$

$\{t_k^i\}$ – моменты, когда агент i получает информацию о состояниях всех своих соседей[2], причем интервалы между моментами обновления информации ограничены: $T_u \leqslant t_{k+1}^i - t_k^i \leqslant \bar{T}_u$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in V$. Здесь используется объединенная последовательность моментов времени $\{t_k\} = \bigcup_{i \in V} \{t_k^i\}$, и в (9)–(10) имеет место $t_s^i \leqslant t_k < t_{k+1} \leqslant t_{s+1}^i$.

Показано, что при $\sqrt{(n-1)\bar{a}} \leqslant \frac{\gamma}{2} < (\bar{T}_u)^{-1}$ система (9)–(10) сходится к асимптотическому консенсусу, если бесконечная последовательность орграфов $\Gamma(t_1), \Gamma(t_2), \ldots$ может быть разбита на равномерно ограниченные по длине интервалы, для каждого из которых объединение орграфов влияний имеет остовное исходящее дерево.

Авторы отмечают, что этот результат практически совпадает с достаточным условием консенсуса, полученным в [86] для синхронных систем.

В [87] достаточное условие консенсуса получено для дискретных систем, для которых в отличие от абсолютного большинства работ по данной теме предполагается, что состояние каждого агента i всегда остается в индивидуальном замкнутом выпуклом множестве $\mathcal{X}_i$. При этом протокол консенсуса имеет вид

$$x_i(t_{k+1}^i) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i(t_k^i)} a_{ij}(t_k^i)\, x_j(t_k^i) \right], \tag{11}$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{X}_i}$ – оператор ортогональной проекции на $\mathcal{X}_i$. Задача поиска такого ограниченного консенсуса возникает в теории коалиционных игр с трансферабельной полезностью, где распределенный протокол торгов имеет вид (11).

[2] Отметим отличие этих моментов от моментов $\{s_k^i\}$, входящих в ряд рассмотренных выше моделей.

Матрицы $A(t_k^i) = [a_{ij}(t_k^i)]$ полагаются стохастическими. Достаточное условие консенсуса сводится к равномерной отделенности от нуля диагональных и ненулевых недиагональных коэффициентов влияния $a_{ij}(t_k^i)$ и представимости всего упорядоченного по времени набора орграфов влияния в виде последовательности равномерно ограниченных интервалов, объединения орграфов по которым сильно свя́зны.

Следует отметить, что протокол (11) в синхронном варианте впервые был рассмотрен в [88] как применение и развитие метода последовательных проекций Губина – Поляка – Райка [89] для нахождения общей точки нескольких выпуклых множеств. Цель алгоритма – нахождение точки, лежащей в пересечении множеств (без необходимости обмениваться информацией о самих множествах). В [88] показано, что алгоритм тесно связан с выпуклой распределенной оптимизацией.

В последние годы расширение класса исследуемых асинхронных систем привело к рассмотрению гетерогенных систем, т.е. МАС, состоящих из агентов разных типов. В [90] рассматривалась задача вхождения состояний агентов в ограниченную область (containment control) для асинхронных систем с дискретным временем, переменными временны́ми задержками, постоянной ориентированной топологией, несколькими стационарными лидерами и агентами-последователями первого и второго порядков.

В работе получен критерий попадания состояний агентов в выпуклую оболочку состояний лидеров и удерживания в ней. Его доказательство опирается на свойства произведений регулярных[3] стохастических матриц (см. часть II настоящего обзора). Необходимым условием здесь является наличие в орграфе влияний исходящего леса с корнями в вершинах, соответствующих лидерам.

В [91] исследован еще один класс гетерогенных дискретных систем, состоящих из агентов первого и второго порядка. Здесь топология меняется, и для разных типов агентов предложены два асинхронных консенсусных протокола, определяющих локальное управление. Получено достаточное условие асимптотического консенсуса, сводящееся к набору неравенств и знакомому по предыдущим работам требованию наличия исходящего дерева в объединениях орграфов влияния по равномерно ограниченным отрезкам последовательности таких орграфов, реализующихся во всевозможные моменты времени.

6.2. Консенсус в непрерывных моделях с неравномерным асинхронным механизмом

Неравномерный механизм ANS рассматривался в [92], где изучалась проблема консенсуса с интеграторами первого порядка и меняющейся ориентированной топологией. Интервалы между выборками предполагались произвольными, но принадлежащими заданному интервалу. Коэффициенты влия-

[3] Стохастическая матрица регулярна, если она не имеет собственных значений с модулем 1, кроме однократного собственного значения 1. Синонимичное понятие в англоязычной терминологии – SIA (Stochastic, Indecomposable, Aperiodic) matrix.

ния агентов полагались заключенными в интервале с положительными границами.

Система преобразовывалась в систему с дискретным временем, для которой далее анализировалась сходимость состояний. При получении результатов использовалась следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ – строчно стохастическая матрица. Тогда A регулярна, если в орграфе влияний есть исходящее дерево, корень которого имеет петлю.

Далее использовалась теорема Вольфовица [69], согласно которой для любого конечного множества $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ регулярных матриц такого, что любая конечная последовательность его элементов дает в произведении регулярную матрицу, произведения по бесконечным последовательностям его элементов сходятся к матрицам, строки которых равны.

Показано, что при сделанных предположениях и наличии остовного исходящего дерева в объединении орграфов влияний для всех временны́х интервалов некоторой ширины $T \geqslant 0$ реализуется асимптотический консенсус. Если же топология не меняется, то наличие такого дерева, кроме того, и необходимо. Некоторые другие работы такого рода обсуждались в [71].

Этот подход был развит в [93], где рассматривалась система первого порядка с переменной ориентированной топологией и временны́ми задержками и вводились дополнительные переменные состояния, которые в отличие от основных переменных претерпевали разрывы.

В [94] был разработан синхронный протокол консенсуса для случая двойных интеграторов, который примени́м и к механизму ANS с произвольными интервалами между выборками и фиксированной неориентированной топологией информационных связей.

В [29] рассмотрен механизм ANS второго порядка с фиксированной ориентированной топологией и независимыми моментами выборочных измерений. Асимптотика анализировалась сведе́нием системы к системе с дискретным временем и задержками. Для получения достаточного условия асинхронного консенсуса использовался прямой метод Ляпунова. Среди условий консенсуса – наличие остовного исходящего дерева в орграфе влияний, ограниченность задержек наблюдения, отделенность от 0 и ограниченность сверху интервалов между наблюдениями и, кроме того, набор матричных неравенств, связывающих параметры модели.

Эта линия исследований была продолжена в [95], где изучалась задача достижения консенсуса с механизмом ANS для интеграторов второго порядка с меняющейся топологией связей. Интервалы между выборками и задержки предполагались ограниченными, но верхняя граница при этом не ограничивалась. Последнее приводит к несколько более слабым условиям асимптотического консенсуса, чем те, что были получены в [85] для систем с дискретным временем. В предлагаемом протоколе консенсуса каждому агенту доступна непрерывная информация о его состоянии и выборочная информация о состояниях его соседей. Используя алгебраическую теорию графов, авторы доказывают, что асимптотический консенсус реализуется при переменных задержках связи, если объединение орграфов влияний агентов содержит остовное дерево на любом временном интервале некоторой длины.

Асинхронный консенсус в импульсных системах второго порядка с ориентированной топологией исследовался в [96]. Рассматривался протокол импульсного управления, отличающийся от предложенного в [27, 29]:

$$u_i(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[-c_1 v_i(t) - c_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \big(x_i(t - \tau_{ij}) - x_j(t - \tau_{ij}) \big) \right] \delta(t - s_k^i), \tag{12}$$

где $c_1, c_2 > 0$, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Протокол (12) обобщает алгоритм, предложенный в [97], введением задержек τ_{ij} и моментов измерения s_k^i, вообще говоря, различных для разных агентов. Интервалы между измерениями полагаются ограниченными сверху и снизу:

$$0 < T_m \leqslant s_{k+1}^i - s_k^i \leqslant T_M, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где T_m и T_M – соответственно нижняя и верхняя границы.

Результатом импульсного управления вида (12) является следующее изменение скорости:

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \big(v_i(s_k^i + \sigma) - v_i(s_k^i - \sigma) \big) =$$
$$= -c_1 v_i(s_k^i) - c_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_i(s_k^i - \tau_{ij}) - x_j(s_k^i - \tau_{ij}) \right), \quad i \in V, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Главный результат работы – теорема, согласно которой при выполнении определенного матричного неравенства система $\dot{x}_i(t) = u_i(t)$ $(i \in V)$ с управлением $u_i(t)$, задаваемым (12)–(13), и ориентированной топологией, содержащей остовное исходящее дерево, приходит к асимптотическому консенсусу.

В [23] асинхронность трактуется иначе, чем в [27, 28, 85, 92], и в некотором отношении более радикально, а именно, каждому агенту в его выборочные моменты (отличные от моментов других агентов) доступна лишь его собственная актуальная информация. Тем самым результаты, полученные в перечисленных работах, в данном случае неприменимы. Другое отличие в том, что вместо однородной простой динамики первого или второго порядка рассматривается случай гетерогенной нелинейной динамики высокого порядка. А именно, динамика N агентов определяется уравнением

$$\dot{x}_i(t) = B_i x_i(t) + C_i f_i(x_i, t) + u_i(t), \quad i \in V,$$

где $x_i(t),\, u_i(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, B_i, C_i — квадратные матрицы, функции $f_i : \mathbb{R}^{n_x} \times \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n_x}$, вообще говоря, нелинейны и есть лидер с динамикой

$$\dot{x}_0(t) = A x_0(t) + B f_0\big(x_0(t), t\big).$$

Асинхронный протокол консенсуса имеет вид

$$u_i(t) = -K_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_i(s_k^i) - x_j(s^j_{k_j(t)}) \right) + a_i \left(x_i(s_k^i) - x_0(s^0_{k_0(t)}) \right) \right],$$
$$s_k^i \leqslant t < s_{k+1}^i, \quad i \in V.$$

С использованием подхода Ляпунова – Красовского показано, что ограниченное консенсусное следование за лидером реализуется с экспоненциальной сходимостью, если матрицы и функции, входящие в модель, удовлетворяют определенным неравенствам, лидер прямо или косвенно влияет на других агентов и его траектория ограничена. Кроме того, указана область сходимости в пространстве состояний и предложен вид матриц K_i, обеспечивающих указанное следование.

7. Исследования асинхронных протоколов, определяемых событиями

7.1. Условия реализации событий

Механизмы взаимодействия, *определяемые событиями*, в том числе асинхронные механизмы AES, имеют "расписание" [26], определяемое условиями вида

$$s^i_{k+1} = \inf\left\{t > s^i_k \mid \mathcal{F}_i(e_i) \geqslant \mathcal{T}_i(X_i, \sigma_i)\right\}, \tag{14}$$

где $\{s^i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность моментов времени, удовлетворяющая (2), e_i – "дефект" (ошибка) выборки – расхождение между данными последней выборки и данными в текущий момент t; $\mathcal{F}_i(e_i)$ – применяемая трансформация ошибки e_i; $\mathcal{T}_i(X_i, \sigma_i)$ – пороговая функция, задающая условие реализации события, выполнение которого влечет немедленное проведение агентом i очередного измерения; X_i может в разных моделях зависеть как от измерений состояния в текущий момент, так и от данных в предыдущий опорный момент s^i_k; σ_i – параметр пороговой функции. Таким образом, согласно (14) агент i проводит очередное опорное измерение тогда и только тогда, когда выполняется условие реализации события $\mathcal{F}_i(e_i) \geqslant \mathcal{T}_i(X_i, \sigma_i)$. Тщательным подбором этого условия интервалы между взаимодействиями агентов можно настроить таким образом, чтобы экономились ограниченные вычислительные и коммуникационные ресурсы. "Ошибка выборки" и порог являются ключевыми параметрами механизмов взаимодействия, определяемых событиями.

Предложен целый ряд подходов к заданию "дефекта выборки" e_i и пороговой функции $\mathcal{T}_i(\cdot)$ в механизмах взаимодействия, определяемых событиями. Так, $X_i = X_i(t)$ может представлять состояние агента, его оценку или косвенный результат измерения; порог $\mathcal{T}_i(\cdot)$ может быть постоянным, а также зависеть от времени и/или состояния. Следует также отметить, что в случае непрерывных МАС некоторые протоколы управления по событиям могут приводить к ситуациям *апорий Зенона*, что нужно исключить еще на стадии разработки выборочного механизма. Под *поведением Зенона* в теории мультиагентных систем понимают построение бесконечной ограниченной последовательности моментов переключения. Такие последовательности дефектны в силу своей физической нереализуемости. Для их исключения часто требуют выполнения более сильного условия, а именно, чтобы разница по времени между двумя последовательными выборками не стремилась к нулю ($s^i_{k+1} - s^i_k \not\to 0$). В действительности имеет смысл использовать еще более сильное требование: чтобы временны́е интервалы между последовательными выборками имели строго положительную нижнюю границу.

Далее рассмотрим некоторые механизмы определения моментов выборки для моделей консенсуса без лидера, представленные в недавних работах и систематизированные в [26].

Коррекция по событиям с постоянным порогом. Пусть условие реализации "события" в (14) имеет вид

$$\|e_i(t)\| \geqslant \delta_i, \tag{15}$$

где порог $\delta_i > 0$, вообще говоря, зависит от агента и может варьироваться. Основанный на этом механизме выборки асинхронный протокол консенсуса

$$u_i(k_s^i) = K\chi_i(k_s^i) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}\big(y_j(k_{\tilde{s}}^j) - y_i(k_s^i)\big),$$

где $\{k_s^i\}_{s\in\mathbb{N}}^{i\in V}$ – последовательность моментов опорных наблюдений, $y_i(k)$ – результат измерения функции y от состояния агента i, для стохастических МАС с дискретным временем исследовался в [98, 99]. Более конкретно: в текущий дискретный момент k вычисляется дефект выборки

$$e_i(k) = \chi_i(k_s^i) - \chi_i(k),$$

и делать ли переключение на основе новых наблюдений определяется проверкой неравенства $\|e_i(k)\| > \delta_i$ (в [98]) либо $e_i^{\mathrm{T}}(k)\,\Omega_i^{-1}(k)\,e_i(k) > 1$ (в [99], где $\Omega_i(k) > 0$ – матрица весов, сопоставленная агенту i). Идея событийного управления состоит в использовании последнего опорного измерения до тех пор, пока расхождение текущего состояния с ним не превысит порога. Естественно предположить, что такой алгоритм работоспособен при робастности системы управления к погрешностям в измерении состояний. В связи с этим в [98] задача о поиске консенсуса с событийным механизмом взаимодействия была заменена задачей устойчивости *от входа к состоянию* (input-to-state stability, ISS) [100] в вероятностной постановке и были получены – в форме матричных неравенств – достаточные условия достижения консенсуса по вероятности.

В [99] получено – в виде системы рекурсивных линейных матричных неравенств – достаточное условие среднеквадратичного консенсуса с выборкой по событиям в случае сенсорных насыщений. Получен явный вид соответствующих регуляторов. Рассмотрены также две оптимизационные задачи, решение которых направлено на повышение скорости приближения к консенсусу и снижение частоты переключений. Насыщение сенсоров – явление, вызванное физическими ограничениями компонентов системы: датчиков и коммуникационных каналов по мощности, точности и надежности. Учет сенсорных насыщений приближает теоретическую постановку задачи к реальной.

В [101] исследовалась задача консенсусного управления с выборкой по событиям для подверженной кибератакам стохастической МАС с неориентированной топологией и потерями в измерениях. Условие реализации события имеет здесь вид, аналогичный (15) при

$$e_i(k) = \hat{x}_i(k_s^i) - \hat{x}_i(k),$$

где $\hat{x}_i(k)$ – *оценка* состояния агента i. В терминах собственных значений и собственных векторов лапласовской матрицы графа коммуникаций агентов сформулировано и доказано достаточное условие обеспечения среднеквадратичного ограниченного консенсуса и указан вид матриц, задающих регулятор.

Коррекция по событиям с порогом, зависящим от времени. Одним из факторов, побуждающих обновить данные, на основании которых проводится коррекция, является существенное время, прошедшее с предыдущего опорного наблюдения. Для реализации этой идеи через механизм AES в правую часть условия появления события включают слагаемое, убывающее по времени, т.е. со временем делающее условие менее жестким. Так, условие появления события, используемое в (14), может иметь вид

$$\|e_i(t)\| \geqslant c_0 + c_1 e^{-\mu_i(t)t}, \tag{16}$$

где

$$e_i(t) = x_i(s_k^i) - x_i(t),$$

$c_0 \geqslant 0$, $c_1 \geqslant 0$, $c_0 + c_1 > 0$ и $\mu_i(t) > 0$. В [102] этот механизм взаимодействия с постоянным $\mu_i(t)$ использовался для обеспечения попадания состояний агентов в шар с центром в среднем значении всех состояний – для интеграторов первого и второго порядков с задержками связи и без них.

Частный случай условия (16) с $c_0 = 0$ использовался в [18] при решении задачи адаптивного консенсуса в МАС с общей линейной динамикой и постоянной неориентированной топологией. В этой работе построен адаптивный протокол управления и доказаны асимптотическая сходимость к среднему консенсусу и существование положительной нижней границы интервалов между событиями. Установлена зависимость динамики системы от спектрального радиуса лапласовской матрицы графа влияний агентов. Показано, что оценка спектрального радиуса позволяет повысить скорость сходимости к консенсусу. Планируется распространить данный подход на случай наличия возмущений и переменной топологии.

В [17] условие реализации события (16) применялось в форме условия с однородным по агентам "дисконтированием" $\|e_i(t)\| \geqslant c_1 e^{-\mu t}$, причем в выражении $e_i(t)$ использовалась матричная экспонента:

$$e_i(t) = e^{A(t-s_k^i)} x_i(s_k^i) - x_i(t), \tag{17}$$

где A – матрица общей линейной динамики агента $\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t)$. Консенсус группы агентов с ориентированной топологией обеспечивался настройкой (за счет выбора матрицы обратной связи K и коэффициента усиления $\alpha > 0$) протокола

$$u_i(t) = \alpha K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(e^{A(t-s_k^i)} x_i(s_k^i) - e^{A(t-s_{\tilde{k}}^j)} x_i(s_{\tilde{k}}^j) \right),$$

основанного на взаимодействии типа AES. Отметим, что проверка выполнения условия появления события с ошибкой (17) требует от агента лишь непрерывного отслеживания его собственного состояния; в непрерывном обмене информацией с агентами-соседями нет необходимости. В этой работе результаты, полученные ранее для систем одинарных и двойных интеграторов, перенесены на случай систем с произвольной линейной динамикой. Ключевыми условиями достижения асимптотического консенсуса независимо от начального состояния являются наличие остовного исходящего дерева в орграфе влияний, стабилизируемость пары матриц (A, B) и гурвицевость матриц $A + \alpha\lambda_i BK$, где λ_i – ненулевые собственные значения лапласовской матрицы орграфа зависимостей. Показано, что поведение Зенона при предложенном протоколе не реализуется.

Коррекция по событиям с порогом, непрерывно зависящим от состояния. Пусть условие реализации события в (14) имеет вид

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|X_i(t)\|, \tag{18}$$

где $\sigma_i \|X_i(t)\|$ – порог, непрерывно зависящий от состояния. Так, в [103] протокол консенсуса на основе AES

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j(s^j_{\tilde{k}}) - x_i(s^i_k) \right)$$

рассматривался в комбинации с $X_i(t)$, определенным как терм относительных измерений агента i, $X_i(t) = \chi_i(t)$, и ошибкой $e_i(t)$, равной отличию текущего состояния $x_i(t)$ от данных последней опорной выборки $x_i(s^i_k)$. Показано, что в синхронном случае для фиксированного связного неориентированного графа взаимодействий G при $\sigma_i = \sigma / \|L\|$ (где L – лапласовская матрица G) и $0 < \sigma < 1$ асимптотический консенсус реализуется и интервалы между "событиями" ограничены снизу. Асимптотический консенсус равен при этом среднему арифметическому начальных состояний агентов. Аналоги этих результатов получены и для асинхронных систем.

В условии реализации события, использованном в [15], $X_i(t)$ имел тот же вид, что в [103], но дефект выборки задавался как $e_i(t) = \chi_i(s^i_k) - \chi_i(t)$. Рассматривался протокол консенсуса на основе AES

$$u_i(t) = K\chi_i(s^i_k)$$

для МАС с общей линейной динамикой. В случае стабилизируемости линейной динамики системы и связности *фиксированного неориентированного* графа влияний указан вид матрицы управления K, обеспечивающей асимптотический консенсус. Показано, что при этом последовательность моментов переключения не обрывается и не реализуется поведение Зенона.

Механизмы взаимодействия, аналогичные [15], изучались также в [104]. Для случая *постоянной ориентированной топологии* получены достаточные условия консенсуса, включающие сильную связность орграфа влияний либо наличие в нем остовного исходящего дерева. Как и в других работах этого направления, показано, что предлагаемые алгоритмы выбора моментов переключения позволяют исключить поведение Зенона.

В [105] $X_i(t)$ определялось как среднее отличие состояния агента i от состояний его соседей $X_i(t) = q_i(t) = 1/(n_i + 1)\chi_i(t)$, а дефект выборки задавался формулой $e_i(t) = q_i(s_k^i) - q_i(t)$, где $n_i = |\mathcal{N}_i|$ – число соседей агента i. На основе этого механизма взаимодействия, определяемого событиями, исследовался протокол $u_i(t) = \alpha_i q_i(s_k^i)$ решения задачи встречи (rendezvous) агентов первого порядка в евклидовом пространстве. Показано, что при постоянном связном неориентированном графе влияний встреча асимптотически реализуется при выполнении дополнительного условия, что ни один агент исходно не находится в центре тяжести положений своих соседей.

Коррекция на основе порога, зависящего от выборочного состояния. В соответствии с этим механизмом условие реализации события (14) задается как

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|X_i(s_k^i)\|, \tag{19}$$

где $\sigma_i \|X_i(s_k^i)\|$ – выборочный порог, зависящий от состояния, а $X_i(s_k^i)$ обозначает либо дискретизированные данные, либо терм их относительных измерений. В [106, 107] дефект выборки определялся как $e_i(t) = x_i(s_k^i) - x_i(t)$, а в качестве $X_i(s_k^i)$ был использован терм относительных измерений агента i: $X_i(s_k^i) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(s_k^j) - x_i(s_k^i))$. Исходя из несколько разных условий реализации событий, зависящих от выборки, в этих работах решалась задача консенсуса для МАС первого порядка с использованием протокола на основе AES $u_i(t) = X_i(s_k^i)$. В [106] рассматривался *постоянный неориентированный граф* влияний и условием сходимости к среднему начальных состояний являлась его связность. Аналогичный приближенный результат был доказан и для квантифицированных данных, т.е. данных, измеренных с конечной точностью. В [107] граф влияний также неориентированный, но переменный и условием асимптотического консенсуса является его “объединенная связность” (ограничение, встречавшееся в целом ряде упомянутых выше работ) по наборам последовательных интервалов постоянства связей. Показано, что предлагаемое условие реализации событий исключает поведение Зенона.

В [16] условие реализации события (19) использовалось с термом относительных измерений вида $X_i(s_k^i) = \chi_i(s_k^i) = \sum_{i \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(s_k^i) - x_i(s_k^i))$ и с дефектом выборки $e_i(t) = \chi_i(s_k^i) - \chi_i(t)$. На этой основе посредством протокола управления с динамической обратной связью по выходу решалась задача консенсуса для гетерогенных линейных МАС с фиксированной неориентированной топологией. К стандартным условиям связности графа влияний и стабилизируемости пар матриц (A_i, B_i), задающих гетерогенную линейную динамику $\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$, добавляется условие детектируемости пар матриц (A_i, C_i), где C_i задает выход $y_i = C_i x_i$, и условие разрешимости указанных в статье матричных уравнений. Как и в большинстве работ этого направления, показано, что предложенный алгоритм управления позволяет исключить поведение Зенона.

Коррекция с порогом, непрерывно зависящим от состояния, и положительным сдвигом. В соответствии с (14) переключения происходят тогда, когда выполняется условие реализации события $\mathcal{F}_i(e_i) \geqslant \mathcal{T}_i(\chi_i, \sigma_i)$. Имеет практическое значение вопрос: “Как усилить это условие, чтобы коррекция состояний происходила как можно реже?” Один из вариантов ответа на него – добавить положительную константу или функцию времени в правую часть (18), что приводит к следующим двум вариантам условия:

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|X_i(t)\| + \delta_i \tag{20}$$

и

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|X_i(t)\| + c_1 e^{-\mu t}. \tag{21}$$

Эти условия сильнее, чем (18) и, следовательно, позволяют уменьшить количество коррекций. Задача консенсуса с условием реализации события (20) для линейных МАС с ориентированными взаимодействиями исследовалась в [13]. Установлено, что достаточное условие реализуемости асимптотического консенсуса с любой заданной точностью сводится к стабилизируемости пары матриц (A, B), задающих линейную динамику $\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i$, и наличию в орграфе влияний остовного исходящего дерева; указан вид соответствующего регулятора. Показано, что поведение Зенона исключено.

В [108] применялось условие переключения (21) для поиска консенсуса в общих линейных МАС, характеризующихся насыщениями по входам, при начальных состояниях из заданной ограниченной области пространства. Показано, что при неориентированной связной топологии, стабилизируемости пары матриц (A, B), задающей линейную динамику агентов, липшицевости матрицы A и μ, удовлетворяющем предложенному ограничению, указанный консенсус реализуется, причем поведение Зенона исключено.

Коррекция с порогом, зависящим от выборочного состояния, и положительным смещением. Аналогично (20) и (21) можно добавить положительное смещение в правую часть условия реализации событий (19), использующего данные последней опорной выборки. В частности, рассматривались следующие два условия:

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|X_i(s_k^i)\| + c(t), \tag{22}$$

где $c(t)$ – убывающая функция с нижней границей $c_0 > 0$, и

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|X_i(s_k^i)\| + \delta_i \mu^t, \tag{23}$$

где $\sigma_i, \delta_i > 0$ и $\mu \in (0, 1)$. В [109] задача консенсуса для линейных МАС решалась с помощью условия реализации события (22), куда вводилась временна́я задержка $\tau > 0$:

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left\| x_j \left(s_{\tilde{k}}^j - \tau \right) - x_i \left(s_k^i - \tau \right) \right\| + c(t),$$

при $e_i(t) = x_i(s_k^i - \tau) - x_i(t - \tau)$. Показано, что при стабилизируемости пары матриц, задающих линейную динамику, наличии в орграфе влияний остовного дерева, исходящего из выделенной вершины, и параметрах, удовлетворяющих введенным ограничениям, в рассмотренной модели с задержкой реализуется (без поведения Зенона) асимптотический консенсус.

Задача консенсуса с условием реализации события (23), где $X_i(s_k^i) = \chi_i(s_k^i)$ и $e_i(t) = \chi_i(s_k^i) - \chi_i(t)$, для МАС второго порядка с дискретным временем решалась в [110]. Показано, что консенсус реализуется, если орграф влияний содержит остовное исходящее дерево и квант времени не превосходит указанной в работе границы.

В [111] рассматривалась модель, в которой каждый агент узнает о внешнем для него событии лишь при очередном своем контакте с информационным "облаком". После этого он автономно определяет время следующего контакта. Таким образом, агенты взаимодействуют не напрямую, а через своего рода доску объявлений. Строится алгоритм координации агентов, направленный на сведе́ние к минимуму числа контактов и при этом гарантирующий достижение системой множества желаемых состояний. В качестве времени следующего контакта каждый агент выбирает самый ранний момент, когда его прогнозируемый терм относительных измерений, характеризующий рассогласование с другими агентами, превысит выбранный порог.

Вопрос о робастности алгоритмов управления асинхронными мультиагентными сетями исследовался в [25]. Авторы анализировали одновременную устойчивость локально взаимодействующих линейных подсистем с симметричной топологией связей, механизмами взаимодействия ANS и AES, ограниченными временны́ми задержками и ошибками измерения. С использованием метода Ляпунова было получено условие устойчивости таких систем с децентрализованным управлением. Для организации выборки данных использовались логарифмические квантователи и интервалы между измерениями, исключающие поведение Зенона при задействовании AES-механизмов. Полученные результаты позволяют оценить максимально допустимые задержки и промежутки между выборками в случае асинхронных протоколов консенсуса с относительными и абсолютными измерениями.

7.2. Достоинства и недостатки основных условий реализации событий

Предложенные в литературе условия реализации событий, основанные на различных определениях дефекта выборки и его пороговой величины и предназначенные для решения задач консенсуса без лидера, приведены выше в формулах (15)–(23). Каждый из этих механизмов имеет свои достоинства и недостатки. Обсуждению их в последние годы уделяется большое внимание, поскольку выбрать конкретный механизм необходимо в любой практической работе.

При сравнении этих механизмов будем в основном следовать [26]. Сначала рассмотрим определения дефекта выборки в обсуждаемых моделях. Дефект выборки $e_i(t)$ имеет две основные формы.

Форма 1. $e_i(t) = x_i(s_k^i) - x_i(t)$: расхождение между последним опорным измерением состояния и измерением его в текущий момент t.

Форма 2. $e_i(t) = \chi_i(s_k^i) - \chi_i(t)$: расхождение между значениями терма относительных измерений в последний опорный момент и в текущий момент.

– В отличие от формы 2 форма 1 не требует постоянной связи между соседними агентами, которая необходима для отслеживания в реальном времени терма относительных измерений $\chi_i(t)$, входящего в форму 2.

– Коррекция с дефектом выборки, определяемым формой 1, по существу, эффективна лишь для решения задачи консенсуса с устойчивым равновесием в точке консенсуса. Так, рассмотрим группу агентов, следующих за лидером, чья траектория осциллирует, и пусть траектории всех агентов асимптотически приближаются к траектории лидера. Тогда рассогласование будет приближаться к нулю, в то время как дефект выборки $e_i(t) = x_i(s_k^i) - x_i(t)$ может далеко отклоняться от нуля. В этом случае коррекция по рассмотренному протоколу будет выполняться почти непрерывно, что может приводить к поведению Зенона. Таким образом, механизм коррекции с дефектом выборки, определяемым формой 1, вообще говоря, не исключает поведения Зенона, если консенсусная траектория подвержена значительным колебаниям. Напротив, дефект выборки $e_i(t)$, определяемый формой 2, подходит как для моделей консенсуса с устойчивым консенсусным равновесием, так и для моделей с осциллирующей консенсусной траекторией, поскольку эта величина будет приближаться к нулю всегда, когда конечные состояния всех агентов сближаются. Однако если принимается механизм взаимодействия с дефектом выборки формы 2, то необходимо обеспечить всем агентам возможность вычислять термы относительных измерений как в моменты выборки, так и в текущие моменты.

Теперь сравним функции, задающие пороговые значения в условиях реализации событий.

– Условия (15) и (16) могут снизить по сравнению с (18)–(23) интенсивность взаимодействий между агентом i и его соседями, поскольку порог в них не зависит от текущего состояния соседей i, времени и выборочных измерений. Однако в отношении (15) и (16) (особенно при $c_0 > 0$) следует иметь ввиду, что 1) из-за использования положительного порога МАС может достигать лишь приблизительного консенсуса, а не точного или асимптотического консенсуса; 2) коррекция в результате взаимодействия не учитывает изменений, происходящих в системе с обратной связью, поскольку порог не зависит от измерений состояний агентов.

– Порог в (18) (а также в (20) и (21)) предполагает непрерывную связь между агентами, поскольку каждый агент использует текущее состояние $X_i(t)$ для определения своих моментов событий. В отличие от этого условие реализации события (19) (как и (22), (23)) допускает *выборочный* зависящий от состояния порог $X_i(s_k^i)$, что предполагает меньшую интенсивность взаимодействий между агентами-соседями.

– По сравнению с (18) и (19) условия реализации событий (20) и (21) (и, соответственно, (22) и (23)) содержат пороги, предполагающие положительные смещения, что имеет два преимущества: 1) это может обеспечить бо́льшую экономию затрат ресурсов на адаптивную коррекцию состояний агентов; 2) при этом исключено поведение Зенона [13, 109]. Однако, как и в случае (15), (16), эти преимущества реализуются за счет снижения эффективности достижения консенсуса. Так, посредством (20) может быть достигнут лишь приблизительный консенсус вместо точного или асимптотического консенсуса. Результаты [13] демонстрируют также, что общая ошибка достижения консенсуса зависит от выбора смещения. А именно, более высокое δ_i приводит к меньшему объему корректирующих действий, но к более высокому значению ошибки. Таким образом, при разработке протоколов консенсуса с взаимодействием, зависящим от событий, может быть поставлена и решена задача поиска оптимального (в смысле выбранного критерия) компромисса между частотой корректирующих воздействий и эффективностью достижения консенсуса.

7.3. Особенности рассмотренных моделей

Выше обсуждались типичные механизмы взаимодействия агентов при решении задач консенсуса *без лидера*. Эти механизмы имеют две общие особенности.

1. Для каждого агента моменты опорных измерений совпадают с моментами передачи данных.

2. Каждый агент должен постоянно получать сведения о своем состоянии $x_i(t)$ (а в ряде протоколов и о состояниях своих соседей $x_j(t)$ для всех $j \in \mathcal{N}_i$), чтобы определять моменты переключения режимов коррекции. Действительно, дефект выборки, входящий в условия (форм 1 и 2) реализации событий зависит от состояния $x_i(t)$ либо терма относительных измерений $\chi_i(t)$ как функций непрерывного времени t.

Отметим, что это требование может быть трудновыполнимым, поскольку постоянное отслеживание состояний агентов предполагает задействование аппаратных средств, требующих затрат, существенно превышающих расходы на реализацию механических и других функций МАС. Альтернатива, позволяющая отказаться от этих затрат, состоит в том, чтобы определять дефект выборки через *выборочные* измерения, для чего нужно обратиться к механизмам кооперативного управления МАС на основе дискретизированных данных.

При этом измерения и их передача, вообще говоря, разделены и происходят в разные моменты времени. Измерения могут выполняться синхронно или асинхронно, периодически, апериодически или в случайные моменты, тогда как передача их обуславливается реализацией событий определенного вида. Такие механизмы передачи информации использовались для решения задач управления сетевыми системами, в частности, в [54, 112, 113].

Работа [112] посвящена построению H_∞-регулятора для сетевых МАС. Характер управления кусочно-постоянный с задержками. Исследуется влияние задержек и строятся (в виде линейных матричных неравенств и в терминах H_∞-нормы) критерии устойчивости и совместного выбора характеристик обратной связи и переключений.

В [113] моделировалась возможность потери данных. Предложена схема переключения на основании информации о собственном состоянии агента с учетом потерь данных и задержек связи. Асимптотическая устойчивость оценивалась по H_∞-норме. В [114] для нелинейных сетевых систем H_∞-управления с дискретным временем потеря данных исследовалась посредством процесса Бернулли и полиномиальной нечеткой модели.

При подобных выборочных схемах следующий момент выборки определяется не столько проверкой в реальном времени условия реализации события, зависящего от состояния, сколько коммуникационными характеристиками, такими как задержки связи и число последовательных потерь данных при передаче пакетов, а также характеристиками управления. При этом интервал между выборками может адаптивно регулироваться в целях снижения коммуникационной нагрузки и улучшения энергоэффективности при сохранении границы H_∞-нормы.

В [54] рассматривалось “событийное” H_∞-управление для класса нелинейных сетевых систем. Авторами предложена схема выбора “необходимых” пакетов данных для передачи, обеспечивающая значительную экономию ресурсов связи. Эта схема строится посредством исследования модели с переменными временными задержками, для которой в работе получены новые эффективные оценки производной функционала Ляпунова – Красовского и новое достаточное условие существования H_∞-регуляторов с переключениями по событиям. Полученные регуляторы не требуют настройки внутренних параметров. Разработанный метод применяется для робастной стабилизации специального класса нелинейных сетевых систем управления.

Более подробные сведения об управлении и фильтрации в линейных сетевых системах с взаимодействиями, определяемыми событиями, могут быть получены из аналитических обзоров [53, 115, 116].

7.4. Некоторые асинхронные модели следования за лидером

В задачах о консенсусе без лидера для моделей первого порядка агентам требуется прийти к общему значению определенной характеристики, которое в детерминированном случае является функцией начальных состояний агентов. Однако во многих приложениях имеется лидер (физический или виртуальный, статический или динамический), указывающий цель группе агентов. Например, перед командой беспилотных подводных или летательных аппаратов может быть поставлена задача синхронно отслеживать траекторию движущейся цели или ведущего аппарата. Такие содержательные постановки приводят к задачам о консенсусе при следовании за лидером. При этом движение лидера не зависит от последователей и лишь часть последователей имеет доступ к информации, непосредственно исходящей от лидера. В данном подразделе обсуждаются некоторые недавние результаты по распределенному консенсусу в задачах следования за лидером в случае протоколов с выборочными данными.

Рассмотрим несколько механизмов взаимодействия, определяемых событиями (см. [26]).

– *Коррекция с порогом, непрерывно зависящим от состояния.* В этом случае условие реализации события имеет вид

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|\tilde{\chi}_i(t)\|, \tag{24}$$

где $e_i(t) = \tilde{\chi}_i(s_k^i) - \tilde{\chi}_i(t)$,

$$\tilde{\chi}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}\big(x_j(t) - x_i(t)\big) + \lambda_i\big(x^*(t) - x_i(t)\big),$$

λ_i – усиление, соответствующее агенту i, $x^*(t)$ – состояние лидера. В [20] в условие реализации события (24) включается дополнительная весовая матрица Φ:

$$\|e_i(t)\Phi\| \geqslant \sigma_i \|\tilde{\chi}_i(t)\Phi\|,$$

где $e_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$, $\hat{x}_i(t) = e^{A(t-s_k^i)} x_i(s_k^i)$.

В данной работе проблема консенсуса при следовании за лидером изучается для МАС с общей линейной динамикой. Схемы взаимодействия агентов, определяемые событиями, классифицируются на распределенные, централизованные и кластерные и исследуются на различных топологиях. В распределенных схемах агенты детектируют события независимо. В централизованных схемах события являются общими для всех агентов и последние переключают управление одновременно. В предложенных в статье кластерных схемах все последователи лидера разбиваются на несколько кластеров и схема взаимодействия строится как распределенная в отношении кластеров и централизованная внутри каждого из них. Показано, что рассмотренные схемы взаимодействия можно выстроить эффективно в смысле минимизации частоты взаимодействий и переключений управления при сохранении возможности следования за лидером. Кроме того, для схем этих типов можно исключить поведение Зенона. Соответствующие алгоритмы обнаружения событий выстраиваются таким образом, чтобы избежать непрерывной связи между агентами.

– *Коррекция с порогом, непрерывно зависящим от состояния, и положительным смещением.* При использовании смещения условие реализации события (24) может быть заменено на

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|\tilde{\chi}_i(t)\| + \delta_i$$

или

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|\tilde{\chi}_i(t)\| + c_1 e^{-\mu t} + \delta_i, \tag{25}$$

где $e_i(t) = \tilde{\chi}_i(s_k^i) - \tilde{\chi}_i(t)$; σ_i, δ_i, c_1 и μ – положительные константы.

В [117] с применением условия (25) был разработан AES-протокол поиска консенсуса вида $u_i(t) = -K\tilde{\chi}_i(s_k^i)$ для линейных МАС с неориентированными и ориентированными графами влияния агентов. Для него получены достаточные условия того, что ошибки следования за лидером не превысят заданной границы. Граница ошибок может быть снижена за счет настройки параметров протокола, приводящей к увеличению частоты взаимодействий между агентами на начальном этапе отслеживания. Показано, что предлагаемая схема взаимодействия не приводит к поведению Зенона даже при параметрах протокола, обеспечивающих высокую точность следования за лидером. Высокие требования к точности слабо влияют на интервалы между событиями начиная с достаточно большого времени. Алгоритм генерации состояний агентов сконструирован так, что не возникает необходимости в непрерывном отслеживании состояний соседей.

– *Коррекция с порогом, зависящим от выборочного состояния, и положительным смещением.* Здесь условие реализации события может иметь вид

$$\|e_i(t)\| \geqslant \sigma_i \|\tilde{\chi}_i(s_k^i)\| + c_1 e^{-\mu(t-t_0)}, \tag{26}$$

где $e_i(t) = \tilde{\chi}_i(s_k^i) - \tilde{\chi}_i(t)$. Условие (26) использовалось, в частности, в [14, 118] для решения задачи консенсуса в МАС с входными задержками.

В [14] рассматривались системы МАС с общей линейной динамикой, ориентированной топологией и временны́ми задержками. Для случая кусочно-постоянного управления с переключениями по событиям получены необходимое и два достаточных условия достижения консенсуса в задаче следования за лидером. Условия включают стабилизируемость пары матриц (A, B), задающей линейную динамику, и наличие остовного дерева, исходящего из вершины-лидера, в орграфе влияний. Схема взаимодействия не требует непрерывной коммуникации агентов-соседей и исключает поведение Зенона.

Работа [118] посвящена консенсусу при следовании за лидером в МАС второго порядка с задержками передачи данных. Рассматриваемый протокол, основанный на измерениях состояний агентов-соседей в дискретные моменты времени, рассчитан на агентов с ограниченными коммуникационными и вычислительными ресурсами. Представлено необходимое и достаточное условие достижения глобального консенсуса в случае ориентированной топологии. Основной результат сформулирован не совсем аккуратно, но основа полученного условия – наличие остовного дерева, исходящего их вершины, соответствующей лидеру, в орграфе влияний.

– *Коррекция на основе адаптивного порога.* В [24] условие реализации события имело общий вид

$$e_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i e_i(t) \geqslant \sigma_i(t) y_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i y_i(t), \tag{27}$$

$$\dot{\sigma}_i(t) = -\rho_i \sigma_i^2(t) e_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i e_i(t), \tag{28}$$

где Φ_i – положительно определенные матрицы весов; $e_i(t) = y_i(t) - \tilde{y}_i(t)$; $y_i(t) = x_i(t) - x^*(t)$ и $\tilde{y}_i(t) = x_i(s_k^i) - x^*(t)$, если агент i получает прямую информацию от лидера (его состояние, как и ранее, обозначено через $x^*(t)$); в противном случае $y_i(t) = x_i(t) - x_j(s_{\tilde{k}}^j)$ и $\tilde{y}_i(t) = x_i(s_k^i) - x_j(s_{\tilde{k}}^j)$. В (27) пороговый параметр $\sigma_i(t)$ не фиксирован, а меняется в соответствии с (28) в зависимости от дефекта выборки и начального условия $\sigma_i(0)$.

При условии (27)–(28) в [24] рассматривалась задача консенсуса для нелинейных МАС с условием Липшица и ориентированной топологией в предположении, что агенты-преследователи характеризуются насыщением по входу. Задачу авторы, как и в случае многих других работ по асинхронному управлению, видят в снижении нагрузки на коммуникационные ресурсы мультиагентной сети. Рассмотрены два типа адаптивных схем управления с переключениями, определяемыми событиями. Один из них основан на непрерывном взаимодействии агентов, другой – на обмене выборочными данными. С использованием модели секторной нелинейности [119] для описания насыщений по входу и метода Ляпунова получены достаточные условия локального консенсуса, имеющие форму линейных матричных неравенств.

7.5. Дискретизация непрерывных моделей следования за лидером

Условие реализации события (27)–(28), вообще говоря, требует постоянного мониторинга состояний агентов. В [24] был предложен его аналог, являющийся периодическим выборочным условием коррекции, не требующим непрерывных измерений и постоянной коммуникации агентов. А именно, условие (27)–(28) было заменено на

$$e_i^{\mathrm{T}}\left((t_k^i+\omega_i)T\right)\Phi_i e_i\left((t_k^i+\omega_i)T\right)\geqslant\sigma_i\left((t_k^i+\omega_i)T\right)y_i^{\mathrm{T}}\left((t_k^i+\omega_i)T\right)\Phi_i y_i\left((t_k^i+\omega_i)T\right),$$

$$\sigma_i\left((t_k^i+\omega_i)T\right)=\sigma_i\left((t_k^i+\omega_i-1)T\right)-\rho_i T\sigma_i\left((t_k^i+\omega_i)T\right)\times \tag{29}$$

$$\times\sigma_i\left((t_k^i+\omega_i-1)T\right)e_i^{\mathrm{T}}\left((t_k^i+\omega_i)T\right)\Phi_i e_i\left((t_k^i+\omega_i)T\right),$$

где $e_i((t_k^i+\omega_i)T)=x_i((t_k^i+\omega_i)T)-x_i(t_k^iT)$; $y_i((t_k^i+\omega_i)T)=x_i((t_k^i+\omega_i)T)-$ $-x^*((t_k^i+\omega_i)T)$, если агент i получает прямую информацию от лидера ($x^*(t)$ – его состояние); в противном случае $y_i((t_k^i+\omega_i)T)=x_i((t_k^i+\omega_i)T)-x_j(t_{\tilde{k}}^jT)$. Условие реализации события (29) проверяется в дискретные моменты выборки $(t_k^i+\omega_i)T$. Другим похожим способом избежать постоянного мониторинга и проверки условия реализации событий является решение задачи консенсуса в дискретном времени, как предложено в [19]. Содержательно последнее абсолютно реалистично, поскольку управление большинством реальных мультиагентных систем осуществляется посредством цифровых регуляторов. Кроме того, поведение Зенона, исключение которого в непрерывных моделях порой требует специальных усилий, в дискретном времени невозможно. Ключевым, однако, является вопрос о шаге дискретности, поскольку очевидно, что при малом шаге частота требуемых измерений и сеансов связи легко может превысить возможности оборудования. Проблеме выбора шага дискретизации посвящена работа [120].

В [19] применялось условие реализации события

$$e_i^{\mathrm{T}}(k)\Phi_i e_i(k)\geqslant\sigma_i(k)\tilde{y}_i^{\mathrm{T}}(k)\Phi_i y_i(k),$$

где $e_i(k)=\tilde{y}_i(k)-\tilde{y}_i(t_k^i)$; $\sigma_i(k)\in[0,1)$ может меняться в зависимости от k; $\tilde{y}_i(k)$ представляет собой зависящий от дискретного времени выходной сигнал.

В этой работе предложен распределенный протокол консенсуса при следовании за лидером для систем с ориентированной топологией, меняющейся в дискретном времени, общей линейной динамикой, "неизвестным, но ограниченным" (unknown-but-bounded, UBB) шумом, ошибками измерения и ограниченными коммуникационными ресурсами. Показано, что в результате применения разработанного протокола состояния агентов, следующих за лидером, попадают в границы заданного эллипсоидального множества, "окружающего" состояние лидера. Для описания этого результата введено понятие множественного консенсуса при следовании за лидером (set-membership leader-following consensus). Оценивание параметров протокола и механизма связи агентов производится посредством алгоритма выпуклой оптимизации, рекурсивно вычисляющего эллипсоиды, содержащие состояния лидера и его последователей.

8. Консенсус в системах со случайными интервалами между переключениями

Асинхронный случайный механизм ARS применялся в [121] в контексте управления системами с общей линейной инвариантной по времени (LTI:

linear time-invariant) динамикой

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \quad t \in [s_k, s_{k+1}), \quad i \in V,$$

где $s_k = kT$, A и B – постоянные действительные матрицы.

Связь этой модели с консенсусом в МАС состоит в следующем. В соответствии с асинхронным случайным механизмом ARS каждый агент имеет свою последовательность моментов наблюдения $\{s_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую (2). Пусть промежутки между наблюдениями для каждого агента могут меняться, принимая значения из конечного множества $\mathcal{S} = \{T_1, T_2, \ldots, T_S\}$ (где $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_S$), каждое – со своей вероятностью $\mathsf{P}\{T_k^i = T_m\} = p_m^i$ ($m = 1, \ldots, S$), зависящей также от агента i, при выполнении условия $\sum_{m=1}^S p_m^i = 1$ для каждого $i \in V$. Введем кусочно-линейную функцию задержки $d^i(t) = t - s_k^i$, $t \in [s_k^i, s_{k+1}^i)$. Тогда вероятности принадлежности $d^i(t)$ каждому подынтервалу выражаются формулами

$$\mathsf{P}\{0 \leqslant d^i(t) < T_1\} = p_1^i + p_2^i\frac{T_1}{T_2} + \cdots + p_S^i\frac{T_1}{T_S} = q_1^i,$$

$$\mathsf{P}\{T_1 \leqslant d^i(t) < T_2\} = p_2^i\frac{T_2 - T_1}{T_2} + \cdots + p_S^i\frac{T_2 - T_1}{T_S} = q_2^i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathsf{P}\{T_{S-1} \leqslant d^i(t) < T_S\} = p_S^i\frac{T_S - T_{S-1}}{T_S} = q_S^i.$$

При этом, как и требуется, $\sum_{m=1}^S q_m^i = 1$ для всех $i \in V$. Используя функции-индикаторы

$$\psi_m^i = \psi_{d^i(t)\in[T_{m-1},T_m)}^i = \begin{cases} 1, & d^i(t) \in [T_{m-1}, T_m), \\ 0, & d^i(t) \notin [T_{m-1}, T_m), \end{cases}$$

где $T_0 = 0$, имеем

$$\mathrm{E}\{\psi_m^i\} = \mathsf{P}\{d^i(t) \in [T_{m-1}, T_m)\} = q_m^i, \quad m = 1, \ldots, S.$$

Поэтому протокол консенсуса типа ARS вида $u_i(s_k^i) = K_{\chi_i}(s_k^i)$ (см. (7)) допускает [121, формула (15)] представление

$$u_i(s_k^i) = K\chi_i(t - d^i(t)) = K\sum_{m=1}^{s}\psi_m^i\chi_i(t - \tau_m^i(t)), \quad \text{где} \quad \tau_m^i(t) \in [T_{m-1}, T_m).$$

В свою очередь, это представление позволяет рассмотреть исходную систему с обратной связью, вероятностной выборкой и асинхронным случайным механизмом как стохастическую систему со случайными переменными ψ_m^i и произвольными задержками $\tau_m^i(t)$ и использовать результаты, полученные для стохастических систем и систем с задержками [122, 123] при решении задач о консенсусе (и, более широко, для задач о децентрализованном управлении мультиагентными системами). В [121] получены достаточные условия робастной среднеквадратичной экспоненциальной устойчивости систем, характеризующихся меняющейся во времени, но ограниченной по норме вероятностной неопределенностью параметров – как состояний, так и входных матриц. В парадигме робастного H_∞-управления разработана процедура проектирования стабилизирующих регуляторов для таких систем, описываемая посредством линейных матричных неравенств.

В [21] рассмотрена задача консенсуса в мультиагентной стохастической системе с нелинейной динамикой, переключающейся ориентированной топологией, помехами и задержками в измерениях. Для ее решения предложен алгоритм стохастической аппроксимации с отделенным от нуля размером шага. Для исследования системы применен метод усредненных непрерывных моделей (называемый также Derevitskii-Fradkov-Ljung (DFL)-схемой). Основным результатом работы являются условия достижения приближенного среднеквадратичного консенсуса при использовании протокола локального голосования. Для их вывода получены условия среднеквадратической близости траекторий исходной динамической сети и ее усредненной модели. В качестве практического примера исследована модель децентрализованной балансировки загрузки узлов распределенной вычислительной сети при неполной информации о состояниях узлов и переменной топологии. В такой сети информация о длине очереди и производительности соседей, поступающая в каждый узел, подвержена действию шума и может поступать с задержками. Поскольку задержки являются случайными, данный механизм взаимодействия агентов относится к типу ARS.

Данный подход развит в [22]. В частности, допущение об ограниченности весов, входящих в протокол управления, заменено на более слабое предположение об ограниченности их дисперсий. Кроме того, добавлен численный эксперимент большого объема.

В [124] рассматривается задача консенсуса для стохастической мультиагентной системы с нелинейной динамикой, симметричной топологией и асинхронными переключениями режима работы. Каждый агент переключает режим с индивидуальной задержкой. Получены условия существования распределенного контроллера с асинхронной коммутацией, обеспечивающего достижение экспоненциального консенсуса. Критерии ограничивают сверху долю времени, когда система управляется рассогласованно. Для стохастических систем разработан “принцип сравнения”, обобщающий принцип, предложенный в [125] для детерминированных систем с задержками и импульсным управлением.

9. Заключение

В представленном обзоре отмечено, что мультиагентная система с асинхронным взаимодействием агентов может быть представлена синхронной системой с переменным графом взаимодействий. В каждый момент в граф включаются те и только те дуги, которые соответствуют парам взаимодействующих в этот момент агентов. Тем самым внутренние и внешние по отношению к агентам механизмы, продуцирующие асинхронность, “упаковываются” в алгоритм генерации графа взаимодействий. Как показывают многочисленные рассмотренные модели, механизмы эти могут быть сложны и разнообразны: моменты взаимодействий могут определяться “по расписанию”, случайно либо в зависимости от значений определенных функционалов (по “событиям”). События, в свою очередь, могут состоять в существенном расхождении результатов наблюдений с предыдущими наблюдениями или прогнозными значениями, в достижении заданных пороговых значений расстояния или иных характеристик, в нарушениях нормального сценария взаимодействия агентов (таких, как потеря данных) и т.д.

Английский термин "sampling", используемый при описании асинхронных систем, часто переводят как "дискретизация данных". Рассмотрение конкретных моделей убеждает, что это понятие имеет сложную структуру. Действительно, необходимо различать дискретные моменты наблюдений/измерений, передачи данных другим агентам, отправки запросов "соседям" на получение данных, получения данных от них, а также моменты переключений управления. Для каждого агента моменты этих типов, вообще говоря, не совпадают, причем наступление их может регулироваться специфической комбинацией внешних и внутренних условий. Легко представить, какое разнообразие моделей порождается такими комбинациями. Вся эта сложность на текущем этапе развития теории мультиагентных систем связана с переходом от умозрительных моделей к разработке систем, решающих практические задачи при необходимости экономии энергетических, информационных и временны́х ресурсов: экономия почти всегда приводит к усложнению алгоритмов решения задач.

Критерии достижимости консенсуса для рассмотренных моделей включают наличие исходящего дерева в орграфе влияний агентов (в случае ориентированной топологии) или связность графа коммуникаций (при неориентированной топологии). В случае переменной топологии эти условия часто применяются к объединениям соответствующих графов на ограниченных временных отрезках. Как правило, за исключением простейших моделей первого порядка достаточные условия консенсуса включают также и дополнительные требования, определяемые спецификой моделей. Само же достижение консенсуса необходимо для того, чтобы мультиагентная система могла решать поставленные перед ней задачи как единое целое. Именно по этой причине протоколы консенсуса составляют ядро алгоритмов децентрализованного управления сетевыми мультиагентными системами.

В следующей части обзора будут рассмотрены интересные математические задачи, решение которых необходимо при анализе и синтезе мультиагентных систем с нестационарной динамикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bhaya A., Kaszkurewicz E., Kozyakin V.S.* Existence and Stability of a Unique Equilibrium in Continuous-Valued Discrete-Time Asynchronous Hopfield Neural Networks // Proc. 1995 IEEE Int. Sympos. Circuits Syst. ISCAS'95. 1995. V. 2. P. 1140–1143.
2. *Kozyakin V.S., Bhaya A., Kaszkurewicz E.* A Global Asymptotic Stability Result for a Class of Totally Asynchronous Discrete Nonlinear Systems // Math. Control Signals Syst. 1999. V. 12. No. 2. P. 143–166.
3. *MacKay D.J.C.* Information Theory, Inference and Learning Algorithms. New York: Cambridge University Press, 2003. P. xii+628.
4. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических системю М.: Наука, 1971.
5. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3–39.

Proskurnikov A.V., Fradkov A.L. Problems and Methods of Network Control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740.

6. *Szyld D.B.* The Mistery of Asynchronous Iterations Convergence when the Spectral Radius is One: Report 98–102. Temple University: College of Science and Technology, 1998. URL: https://math.temple.edu/ szyld/reports/mystery.pdf
7. *Асарин Е.А., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Анализ устойчивости рассинхронизированных дискретных систем. М.: Наука, 1992.
8. *Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N.* Parallel and Distributed Computation. Numerical Methods. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice Hall, 1989.
9. *Kozyakin V.* An Annotated Bibliography on Convergence of Matrix Products and the Theory of Joint/Generalized Spectral Radius: Preprint. Moscow: Institute for Information Transmission Problems, 2013. URL: https://drive.google.com/uc?export=download&id=0Bxw63g5l4P7pLXgwcWxVZ3RoTVk
10. *Sridharan G., Srisailam M.C., Rao V.S.* A Note on the Effect of Asynchronous Sampling on Estimation Accuracy // Automatica. 1985. V. 21. No. 4. P. 491–493.
11. *Tsitsiklis J.N., Bertsekas D.P., Athans M.* Distributed Asynchronous Deterministic and Stochastic Gradient Optimization Algorithms // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. No. 9. P. 803–812.
12. *Fang L., Antsaklis P.J.* Information Consensus of Asynchronous Discrete-Time Multi-Agent Systems / Proc. 2005 Amer. Control Conf. (ACC). IEEE, 2005. P. 1883–1888.
13. *Zhu W., Jiang Z.P., Feng G.* Event-Based Consensus of Multi-Agent Systems with General Linear Models // Automatica. 2014. V. 50. No. 2. P. 552–558.
14. *Zhu W., Jiang Z.P.* Event-Based Leader-Following Consensus of Multi-Agent Systems with Input Time Delay // IEEE Trans. Automat. Control. 2015. V. 60. No. 5. P. 1362–1367.
15. *Hu W., Liu L., Feng G.* Consensus of Linear Multi-Agent Systems by Distributed Event-Triggered Strategy // IEEE Trans. Cybernet. 2016. V. 46. No. 1. P. 148–157.
16. *Hu W., Liu L., Feng G.* Output Consensus of Heterogeneous Linear Multi-Agent Systems by Distributed Event-Triggered/Self-Triggered Strategy // IEEE Trans. Cybernet. 2017. V. 47. No. 8. P. 1914–1924.
17. *Yang D., Ren W., Liu X., Chen W.* Decentralized Event-Triggered Consensus for Linear Multi-Agent Systems under General Directed Graphs // Automatica. 2016. V. 69. P. 242–249.
18. *Guinaldo M., Sánchez J., Dormido S.* Distributed Adaptive Control of Linear Multi-Agent Systems with Event-Triggered Communications // App. Math. Comput. 2016. V. 274. P. 195–207.
19. *Ge X., Han Q.L., Yang F.* Event-Based Set-Membership Leader-Following Consensus of Networked Multi-Agent Systems Subject to Limited Communication Resources and Unknown-but-Bounded Noise // IEEE Trans. Industrial Electron. 2017. V. 64. No. 6. P. 5045–5054.
20. *Xu W., Ho D.W., Li L., Cao J.* Event-Triggered Schemes on Leader-Following Consensus of General Linear Multiagent Systems under Different Topologies // IEEE Trans. Cybernet. 2017. V. 47. No. 1. P. 212–223.
21. *Амелина Н.О., Фрадков А.Л.* Приближенный консенсус в стохастической динамической сети с неполной информацией и задержками в измерениях // 2012. № 11. С. 6–29.

    Amelina N.O., Fradkov A.L. Approximate Consensus in the Dynamic Stochastic Network with Incomplete Information and Measurement Delays // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1765–1783.

22. *Amelina N., Fradkov A., Jiang Y., Vergados D.J.* Approximate Consensus in Stochastic Networks with Application to Load Balancing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. V. 61. No. 4. P. 1739–1752.
23. *Ding L., Zheng W.X.* Consensus Tracking in Heterogeneous Nonlinear Multi-Agent Networks with Asynchronous Sampled-Data Communication // Syst. Control Lett. 2016. V. 96. P. 151–157.
24. *Yin X., Yue D., Hu S.* Adaptive Periodic Event-Triggered Consensus for Multi-Agent Systems Subject to Input Saturation // Int. J. Control. 2016. V. 89. No. 4. P. 653–667.
25. *Xiao F., Shi Y., Ren W.* Robustness Analysis of Asynchronous Sampled-Data Multiagent Networks with Time-Varying Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 2018. V. 63. No. 7.
26. *Ge X., Han Q.L., Ding D., Zhang X.M., Ning B.* A Survey on Recent Advances in Distributed Sampled-Data Cooperative Control of Multi-Agent Systems // Neurocomput. 2018. V. 275. P. 1684–1701.
27. *Gao Y., Wang L.* Sampled-Data Based Consensus of Continuous-Time Multi-Agent Systems with Time-Varying Topology // IEEE Trans. Automat. Control. 2011. V. 56. No. 5. P. 1226–1231.
28. *Cao M., Morse A.S., Anderson B.D.O.* Agreeing Asynchronously // IEEE Trans. Autom. Control. V. 53. No. 8. P. 1826–1838.
29. *Gao Y., Wang L.* Asynchronous Consensus of Continuous-Time Multi-Agent Systems with Intermittent Measurements // Int. J. Control. 2010. V. 83. No. 3. P. 552–562.
30. *Meng X., Chen T.* Optimal Sampling and Performance Comparison of Periodic and Event Based Impulse Control // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. V. 57. No. 12. P. 3252–3259.
31. *Ge X., Han Q.L., Jiang X.* Sampled-Data H_∞ Filtering of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Interval Time-Varying Delays // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. No. 5. P. 2515–2542.
32. *Ge X., Han Q.L.* Distributed Sampled-Data Asynchronous H_∞ Filtering of Markovian Jump Linear Systems over Sensor Networks // Signal Proc. 2016. V. 127. P. 86–99.
33. *Marvasti F.* Nonuniform Sampling: Theory and Practice. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
34. *Boyd S., Ghosh A., Prabhakar B., Shah D.* Randomized Gossip Algorithms // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. No. 6. P. 2508–2530.
35. *Proskurnikov A.V., Tempo R.* A Tutorial on Modeling and Analysis of Dynamic Social Networks. Part II // Annual Rev. Control. 2018. V. 45. P. 166–190.
36. *Ellis P.* Extension of Phase Plane Analysis to Quantized Systems // IRE Trans. Automat. Control. 1959. V. 4. No. 2. P. 43–54.
37. *Pavlidis T., Jury E.* Analysis of a New Class of Pulse-Frequency Modulated Feedback Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1965. V. 10. No. 1. P. 35–43.
38. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПб ун-ва, 1993.
39. *Åström K.J., Bernhardsson B.* Comparison of Periodic and Event Based Sampling for First-Order Stochastic Systems // IFAC Proc. Vol. 1999. V. 32. No. 2. P. 5006–5011.
40. *Åström K.J., Bernhardsson B.M.* Comparison of Riemann and Lebesgue Sampling for First Order Stochastic Systems // Proc. 41st IEEE Conf. Decision Control (CDC), 2002. IEEE, 2002. V. 2. P. 2011–2016.

41. *Tabuada P.* Event-Triggered Real-Time Scheduling of Stabilizing Control Tasks // IEEE Trans. Autom. Control. 2007. V. 52. No. 9. P. 1680–1685.
42. *Anta A., Tabuada P.* To Sample or not to Sample: Self-Triggered Control for Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2010. V. 55. No. 9. P. 2030–2042.
43. *Zhang D., Han Q.-L., Jia X.* Network-Based Output Tracking Control for TCS Fuzzy Systems Using an Event-Triggered Communication Scheme // Fuzzy Sets Syst. 2015. V. 273. P. 26–48.
44. *Zhang X.M., Han Q.L.* A Decentralized Event-Triggered Dissipative Control Scheme for Systems with Multiple Sensors to Sample the System Outputs // IEEE Trans. Cybernet. 2016. V. 46. No. 12. P. 2745–2757.
45. *Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50. No. 6. P. 1645–1662.
46. *Proskurnikov A.V., Cao M.* Synchronization of Pulse-Coupled Oscillators and Clocks Under Minimal Connectivity Assumptions // IEEE Trans. Automat. Control. 2017. V. 62. No. 11. P. 5873–5879.
47. *Heemels W.P.M.H., Donkers M.C.F., Teel A.R.* Periodic Event-Triggered Control for Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2013. V. 58. No. 4. P. 847–861.
48. *Xiao F., Chen T.* Sampled-Data Consensus in Multi-Agent Systems with Asynchronous Hybrid Event-Time Driven Interactions // Syst. Control Lett. 2016. V. 89. P. 24–34.
49. *Михеев Ю.В., Соболев В.А., Фридман Э.М.* Асимптотический анализ цифровых систем управления // АиТ. 1988. № 9. С. 83–88.
50. *Fridman E.* New Lyapunov-Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems // Syst. Control Lett. 2001. V. 43. No. 4. P. 309–319.
51. *Fridman E., Shaked U.* Delay-Dependent Stability and H_∞ Control: Constant and Time-Varying Delays // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 1. P. 48–60.
52. *Liu K., Fridman E.* Stability Analysis of Networked Control Systems: A Discontiuous Lyapunov Functional Approach / Proc. 48th IEEE Conf. Decision Control held jointly with the 28th Chinese Control Conf. CDC/CCC 2009. IEEE, 2009. P. 1330–1335.
53. *Hetel L., Fiter C., Omran H., Seuret A., Fridman E., Richard J.P., Niculescu S.I.* Recent Developments on the Stability of Systems with Aperiodic Sampling: An Overview // Automatica. 2017. V. 76. P. 309–335.
54. *Zhang X.M., Han Q.L.* Event-Triggered H_∞ Control for a Class of Nonlinear Networked Control Systems Using Novel Integral Inequalities // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2017. V. 27. No. 4. P. 679–700.
55. *Ugrinovskii V., Fridman E.* A Round-Robin Type Protocol for Distributed Estimation with H_∞ Consensus // Syst. Control Lett. 2014. V. 69. P. 103–110.
56. *Zareh M., Dimarogonas D.V., Franceschelli M., Johansson K.H., Seatzu C.* Consensus in Multi-Agent Systems with Non-Periodic Sampled-Data Exchange and Uncertain Network Topology / Int. Conf. Control, Decision and Inform. Technol. (CoDIT-2014). IEEE, 2014. P. 411–416.
57. *Song Q., Liu F., Wen G., Cao J., Yang X.* Distributed Position-Based Consensus of Second-Order Multiagent Systems with Continuous/Intermittent Communication// IEEE Trans. Cybernet. 2017. V. 47. No. 8. P. 1860–1871.
58. *Wang X., Wang H., Li C., Huang T., Kurths J.* Consensus Seeking in Multiagent Systems with Markovian Switching Topology under Aperiodic Sampled Data // IEEE Trans. Syst., Man, Cybernet.: Syst. 2018 (Early Access).

59. *Lin J., Morse A.S., Anderson B.D.O.* The Multi-Agent Rendezvous Problem – the Asynchronous Case // 43rd IEEE Conf. Decision Control (CDC), 2004. IEEE, 2004. V. 2. P. 1926–1931.
60. *Lin J., Morse A.S., Anderson B.D.O.* The Multi-Agent Rendezvous Problem. Part 2: The Asynchronous Case // SIAM J. Control Optim. 2007. V. 46. No. 6. P. 2120–2147.
61. *Tsitsiklis J.N.* Problems in Decentralized Decision Making and Computation, Ph.D. dissertation, MIT, Cambridge, MA, 1984.
62. *Blondel V.D., Hendrickx J.M., Olshevsky A., Tsitsiklis J.N.* Convergence in Multiagent Coordination, Consensus, and Flocking // 44th IEEE Conf. Decision Control (CDC-ECC'05). IEEE, 2005. P. 2996–3000.
63. *Cao M., Morse A.S., Anderson B.D.O.* Coordination of an Asynchronous Multi-Agent System via Averaging // IFAC Proc. Vol. 2005. V. 38. No. 1. P. 17–22.
64. *Сарымсаков Т.А.* Об эргодическом принципе для неоднородных цепей Маркова // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. № 1. С. 25–28.
65. *Сарымсаков Т.А.* О неоднородных цепях Маркова // Докл. АН СССР 1958. Т. 120. № 3. С. 465–467.
66. *Сарымсаков Т.А.* Неоднородные цепи Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6. № 2. С. 194–201.
67. *Hajnal J., Bartlett M.S.* The Ergodic Properties of Non-Homogeneous Finite Markov Chains // Math. Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 1956. V. 52. No. 1. P. 67–77.
68. *Hajnal J., Bartlett M.S.* Weak Ergodicity in Non-Homogeneous Markov Chains // Math. Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 1958. V. 54. No. 2. P. 233–246.
69. *Wolfowitz J.* Products of Indecomposable, Aperiodic, Stochastic Matrices // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 15. P. 733–736.
70. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. V. 48. No. 6. P. 988–1001.
71. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) // Управление большими системами. 2010. Т. 30. № 1. С. 470–505.
72. *Di Fatta G., Blasa F., Cafiero S., Fortino G.* Fault Tolerant Decentralised k-Means Clustering for Asynchronous Large-Scale Networks // J. Parallel Distributed Comput. 2013. V. 73. No. 3. P. 317–329.
73. *Lubachevsky B., Mitra D.* A Chaotic Asynchronous Algorithm for Computing the Fixed Point of a Nonnegative Matrix of Unit Spectral Radius // J. ACM (JACM). 1986. V. 33. No. 1. P. 130–150.
74. *Moreau L.* Leaderless Coordination via Bidirectional and Unidirectional Time-Dependent Communication // Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control (CDC), 2003. IEEE, 2003. V. 3. P. 3070–3075.
75. *Ren W., Beard R.W.* Consensus of Information under Dynamically Changing Interaction Topologies // Proc. 2004 ACC, Boston, MA, 2004. P. 4939–4944.
76. *Olfati-Saber R., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.
77. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // АиТ. 2000. № 9. С. 15–43.

    Agaev R.P., Chebotarev P.Yu. The Matrix of Maximum Out Forests of a Digraph and Its Applications // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 9. P. 1424–1450.

78. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Остовные леса орграфа и их применение // АиТ. 2001. № 3. С. 108–133.

Agaev R.P., Chebotarev P.Yu. Spanning Forests of a Digraph and Their Applications // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 3. P. 443–466.

79. *Chebotarev P., Agaev R.* Forest Matrices around the Laplacian Matrix // Linear Algebra Appl. 2002. V. 356. P. 253–274.

80. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Trans. Automat. Control. 2014. V. 59. No. 9. P. 2475–2479.

81. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Об асимптотике в моделях консенсуса // Управление большими системами. 2013. Т. 43. С. 55–77.

82. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // АиТ. 2009. № 3. С. 136–151.

Chebotarev P.Yu., Agaev R.P. Coordination in Multiagent Systems and Laplacian Spectra of Digraphs // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 469–483.

83. *Chebotarev P.* Comments on "Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems" // Proc. IEEE. 2010. V. 98. No. 7. P. 1353–1354.

84. *Fang L., Antsaklis P.J.* Asynchronous Consensus Protocols Using Nonlinear Paracontractions Theory // IEEE Trans. Automat. Control. 2008. V. 53. No. 10. P. 2351–2355.

85. *Qin J., Yu C., Hirche S.* Stationary Consensus of Asynchronous Discrete-Time Second-Order Multi-Agent Systems under Switching Topology // IEEE Trans. Industr. Inform. 2012. V. 8. No. 4. P. 986–994.

86. *Qin J., Gao H., Zheng W.X.* Consensus Strategy for a Class of Multi-Agents with Discrete Second-Order Dynamics // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2012. V. 22. No. 4. P. 437–452.

87. *Zhou B., Liao X., Huang T., Wang H., Chen G.* Constrained Consensus of Asynchronous Discrete-Time Multi-Agent Systems with Time-Varying Topology // Inform. Sci. 2015. V. 320. P. 223–234.

88. *Nedic A., Ozdaglar A., Parrilo P.A.* Constrained Consensus and Optimization in Multi-Agent Networks // IEEE Trans. Automat. Control. 2010. V. 55. No. 4. P. 922–938.

89. *Губин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Е.В.* Метод проекций для нахождения общих точек выпуклых множеств // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1967. № 7. С. 1–24.

90. *Shao J., Shi L., Zheng W.X., Huang T.Z.* Containment Control for Heterogeneous Multi-Agent Systems with Asynchronous Updates // Inform. Sci. 2018. V. 436. P. 74–88.

91. *Shi L., Shao J., Cao M., Xia H.* Asynchronous Group Consensus for Discrete-Time Heterogeneous Multi-Agent Systems under Dynamically Changing Interaction Topologies // Inform. Sci. 2018. V. 463-464. P. 282–293.

92. *Xiao F., Wang L.* Asynchronous Consensus in Continuous-Time Multi-Agent Systems with Switching Topology and Time-Varying Delays // IEEE Trans. Autom. Control. 2008. V. 53. No. 8. P. 1804–1816.

93. *Almeida J., Silvestre C., Pascoal A.M.* Continuous-Time Consensus with Discrete-Time Communications // Syst. Control Lett. 2012. V. 61. No. 7. P. 788–796.

94. *Xiao F., Chen T.* Sampled-Data Consensus for Multiple Double Integrators with Arbitrary Sampling // IEEE Trans. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 12. P. 3230–3235.

95. *Zhan J., Li X.* Asynchronous Consensus of Multiple Double-Integrator Agents with Arbitrary Sampling Intervals and Communication Delays // IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regular Papers. 2015. V. 62. No. 9. P. 2301–2311.
96. *Jiang F., Liu B., Wu Y., Zhu Y.* Asynchronous Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems with Impulsive Control and Measurement Time-Delays // Neurocomput. 2018. V. 275. P. 932–939.
97. *Liu Z.W., Guan Z.H., Shen X., Feng G.* Consensus of Multi-Agent Networks with Aperiodic Sampled Communication via Impulsive Algorithms Using Position-Only Measurements // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. V. 57. No. 10. P. 2639–2643.
98. *Ding D., Wang Z., Shen B., Wei G.* Event-Triggered Consensus Control for Discrete-Time Stochastic Multi-Agent Systems: The Input-to-State Stability in Probability // Automatica. 2015. V. 62. P. 284–291.
99. *Ma L., Wang Z., Lam H.K.* Event-Triggered Mean-Square Consensus Control for Time-Varying Stochastic Multi-Agent System with Sensor Saturations // IEEE Trans. Automat. Control. 2017. V. 62. No. 7. P. 3524–3531.
100. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // АиТ. 2011. № 8. С. 3–40.

   Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to State Stability and Allied System Properties // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1579–1614.
101. *Ding D., Wang Z., Ho D.W., Wei G.* Observer-Based Event-Triggering Consensus Control for Multiagent Systems with Lossy Sensors and Cyber-Attacks // IEEE Trans. Cybernet. 2017. V. 47. No. 8. P. 1936–1947.
102. *Seyboth G.S., Dimarogonas D.V., Johansson K.H.* Event-Based Broadcasting for Multi-Agent Average Consensus // Automatica. 2013. V. 49. No. 1. P. 245–252.
103. *Dimarogonas D.V., Frazzoli E., Johansson K.H.* Distributed Event-Triggered Control for Multi-Agent Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. V. 57. No. 5. P. 1291–1297.
104. *Yi X., Lu W., Chen T.* Pull-Based Distributed Event-Triggered Consensus for Multiagent Systems with Directed Topologies // IEEE Trans. Neural Netw. Learning Syst. 2017. V. 28. No. 1. P. 71–79.
105. *Fan Y., Feng G., Wang Y., Song C.* Distributed Event-Triggered Control of Multi-Agent Systems with Combinational Measurements // Automatica. 2013. V. 49. No. 2. P. 671–675.
106. *Garcia E., Cao Y., Yu H., Antsaklis P., Casbeer D.* Decentralised Event-Triggered Cooperative Control with Limited Communication // Int. J. Control. 2013. V. 86. No. 9. P. 1479–1488.
107. *Chen X., Hao F., Shao M.* Event-Triggered Consensus of Multi-Agent Systems under Jointly Connected Topology // IMA J. Math. Control Inform. 2015. V. 32. No. 3. P. 537–556.
108. *Wang X., Su H., Wang X., Chen G.* Fully Distributed Event-Triggered Semiglobal Consensus of Multi-Agent Systems with Input Saturation // IEEE Trans. Ind. Electron. 2017. V. 64. No 6. P. 5055–5064.
109. *Mu N., Liao X., Huang T.* Event-Based Consensus Control for a Linear Directed Multiagent System with Time Delay // IEEE Trans. Circuits Syst. II: Express Briefs. 2015. V. 62. No. 3. P. 281–285.
110. *Zhu W., Pu H., Wang D., Li H.* Event-Based Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems with Discrete Time // Automatica. 2017. V. 79. P. 78–83.
111. *Nowzari C., Pappas G.J.* Multi-Agent Coordination with Asynchronous Cloud Access // Amer. Control Conf. (ACC), 2016. IEEE, 2016. P. 4649–4654.

112. *Yue D., Tian E., Han Q.L.* A Delay System Method for Designing Event-Triggered Controllers of Networked Control Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2013. V. 58. No. 2. P. 475–481.

113. *Peng C., Han Q.-L.* On Designing a Novel Self-Triggered Sampling Scheme for Networked Control Systems with Data Losses and Communication Delays // IEEE Trans. Industrial Electron. 2016. V. 63. No. 2. P. 1239–1248.

114. *Li H., Chen Z., Wu L., Lam H.K.* Event-Triggered Control for Nonlinear Systems under Unreliable Communication Links // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 2017. V. 25. No. 4. P. 813–824.

115. *Zhang X.M., Han Q.L., Yu X.* Survey on Recent Advances in Networked Control Systems // IEEE Trans. Industr. Inform. 2016. V. 12. No. 5. P. 1740–1752.

116. *Zhang X.M., Han Q.L., Zhang B.L.* An Overview and Deep Investigation on Sampled-Data-Based Event-Triggered Control and Filtering for Networked Systems // IEEE Trans. Industr. Inform. 2017. V. 13. No. 1. P. 4–16.

117. *Cheng Y., Ugrinovskii V.* Event-Triggered Leader-Following Tracking Control for Multivariable Multi-Agent Systems // Automatica. 2016. V. 70. P. 204–210.

118. *Xie T., Liao X., Li H.* Leader-Following Consensus in Second-Order Multi-Agent Systems with Input Time Delay: An Event-Triggered Sampling Approach // Neurocomput. 2016. V. 177. P. 130–135.

119. *Cook P.A.* Describing Function for a Sector Nonlinearity // Proc. Institut. Electrical Engineers. 1973. V. 120. No. 1. P. 143–144.

120. *Фрадков А.Л., Сейфуллаев Р.Э.* Дискретизация систем управления // Аналитическая механика, устойчивость и управление: тр. XI Междунар. Четаевской конф.: пленарные доклады. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. С. 186–193.

121. *Gao H., Wu J., Shi P.* Robust Sampled-Data H_∞ Control with Stochastic Sampling // Automatica. 2009. V. 45. No. 7. P. 1729–1736.

122. *Zhang X.M., Han Q.L.* New Lyapunov-Krasovskii Functionals for Global Asymptotic Stability of Delayed Neural Networks // IEEE Trans. Neural networks. 2009. V. 20. No. 3. P. 533–539.

123. *Zhang X.M., Han Q.L.* Global Asymptotic Stability Analysis for Delayed Neural Networks Using a Matrix-Based Quadratic Convex Approach // Neural networks. 2014. V. 54. P. 57–69.

124. *Wu X., Tang Y., Cao J., Zhang W.* Distributed Consensus of Stochastic Delayed Multi-Agent Systems under Asynchronous Switching // IEEE Trans. Cybernet. 2016. V. 46. No. 8. P. 1817–1827.

125. *Yang Z., Xu D.* Stability Analysis and Design of Impulsive Control Systems with Time Delay // IEEE Trans. Automat. Control. 2007. V. 52. No. 8. P. 1448–1454.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 17.09.2018

После доработки 22.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018