Автоматика и телемеханика, № 4, 2019

Линейные системы

© 2019 г. **Б.Г. ГРЕБЕНЩИКОВ, канд. физ.-мат. наук**
(b.g.grebenshchikov@yandex.urfu.ru)
(Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцына, Екатеринбург)

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается задача стабилизации совокупности двух линейных подсистем дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, при этом одна из подсистем имеет в правой части экспоненциальный множитель. Получены достаточные условия устойчивости решения данной системы, на основании которых и производится стабилизация системы.

Ключевые слова: запаздывание, управляемая система, устойчивость, стабилизация.

DOI: 10.1134/S0005231019040020

1. Введение

1. Рассмотрим управляемую линейную систему $2m$-го порядка с запаздыванием

$$dx(t)/dt = A_1(t)x(t) + B_1(t)x(t-\tau) + A_2(t)y(t) + B_2(t)y(t-\tau) + D_1u_1(t),$$
$$dy(t)/dt = t_0e^t(A_3(t)x(t) + B_3(t)x(t-\tau) + A_4(t)y(t) + D_2u_2(t)),$$
$$t \geqslant 0, \quad t_0 = \mathrm{const}, \quad t_0 > 0, \quad \tau = \mathrm{const}, \quad \tau > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $A_i(t), i = 1, \ldots, 4$; $B_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ — периодические (периода τ) непрерывно дифференцируемые матрицы размерности $m \times m$ ($B_4 \equiv 0$), при этом считаем, что существует матрица $A_4^{-1}(t)$; $x(t), y(t)$ — m-мерные вектор-функции времени t, определенные на интервале $\eta \in [-\tau, 0]$ начальными вектор-функциями соответственно $\phi_1(\eta), \phi_2(\eta)$. Отметим, что к системе (1.1) заменой аргумента $t = ln(\frac{\theta}{t_0})$ сводится система с линейным запаздыванием $(1-\mu)\theta$, $\mu = e^{-\tau}$ [1, с. 99]. Более простые системы с линейным запаздыванием встречаются в теории радиоактивного распада [1, с. 96], в проблемах биологии, механики. В частности, данная система может встречаться в случае исследования процесса колебаний контактного провода при взаимодействии с двумя движущимися токоприемниками локомотива; один из токоприемников находится впереди (и в непосредственной близости) от эластической опоры, второй токоприемник (не обязательно такой же конструкции) находится сзади (в достаточном удалении) от этой же опоры. Колебания первого токоприемника описываются однородной подсистемой, аналогичной второй из подсистем (1.1) [2], колебания второго токоприемника при некоторой достаточно большой стреле провеса контактного провода в простейшем случае описываются неоднородной системой (подобной системе уравнений — аналогу уравнениям Эйлера [4, с. 95]), модели приведены в [2, 3]. При этом на колебания второго токоприемника накладываются колебания провода, вызванного колебаниями полоза первого токоприемника, а также колебания, вызванные отраженными от опоры волнами ввиду собственных колебаний второго токоприемника. Очевидно, что в случае устойчивости процесса колебаний и при достаточно одинаковых начальных условиях (а именно, расстояние между опорами, одна и та же стрела провеса контактного провода, достаточно большая эластичность в точке закрепления контактного провода) устойчивый процесс колебаний будет периодическим. В случае неустойчивости, в частности, при достаточно больших скоростях движения локомотива возможен большой отрыв полоза токоприемника от контактного провода. Поскольку на железных дорогах нашей страны (ввиду большого перепада температуры в течение года) применяется так называемая "рессорная" (тяжелая и легкая) подвеска (более подробно в [5]), в случае легкой подвески при достаточно больших скоростях движения локомотива возникают большие колебания второго токоприемника при воздействии волн, отраженных от "струн", которые поддерживают контактный провод в промежутке между опорами. Все это приводит к тому, что следующим этапом более точной математической модели этого процесса должны быть аналогичные уравнения уже с периодическими матрицами $A_i(t), B_k(t)$ $i,k = 1,2,3,4$. Следуя методике исследования свойств решений более простых систем с постоянным запаздыванием [4, с. 169], полагаем периодичность матриц $A_i(t), B_k(t)$ (периода τ). Кроме того, система, рассматриваемая здесь, имеет асимптотические свойства, подобно системам, имеющим подсистему с постоянным положительным малым параметром при производной [6].

Поскольку здесь будем интересоваться возможностью стабилизации неустойчивого решения системы (1.1), то в ней присутствуют управляющие воздействия $u_1(t), u_2(t)$ — r-мерные вектор-функции времени t; D_j $(j = 1,2)$ — постоянные матрицы размерности $m \times r$, $1 \leqslant r \leqslant m$. Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} e^t = \infty$, без ограничения общности считаем, что число t_0 достаточно большое (в дальнейшем эта особенность будет существенно использоваться при стабилизации некоторых подсистем).

Норму вектора $w = \{w_j\}^\top$ (здесь w_j — компоненты вектора w, $\top$ — знак транспонирования) определим равенством $\|w\| = \sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|$. Очевидно, $\|\{x,y\}^\top\| = \|x\| + \|y\|$. (Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$ $(i,j = 1,\dots,m)$ определим в соответствии с нормой вектора [7, с. 12], именно, $\|D\| = \max\limits_j \sum\limits_i |d_{ij}|$).

Наряду с данной нормой будем рассматривать норму вектор-функции на отрезке

$$\|x\|_\tau = \max_{t\in[0,\tau]} \|x(t)\|. \tag{1.2}$$

Отметим, что если учесть равенство (1.2), то при такой нормировке получаем банахово пространство [7, с. 148] (пространство $\mathbb{C}_{2m}$). Определение устойчивости, асимптотической устойчивости в этом пространстве приведены, например, в [1, с. 360]. Их будем использовать в дальнейшем. Системы с постоянными матрицами $A_i; B_j$, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 4$ изучались ранее автором в работах [8, 9].

Пусть $u_1 = u_2 \equiv 0$. Чтобы лучше уяснить особенности данной системы, перейдем к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном промежутке времени $[0, \tau]$ [1, с. 103], полагая $x_{n+1}(t) = x(t + n\tau)$, $y_{n+1}(t) = y(t + n\tau)$, $t \in [0, \tau]$, $n = -1, 0, +1, \ldots$. В результате получаем следующую краевую задачу для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dx_{n+1}(t)/dt = A_1(t)x_{n+1}(t) + B_1(t)x_n(t) + A_2(t)y_{n+1}(t) + B_2(t)y_n(t), \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt = t_0 e^t \left(A_3(t)x_{n+1}(t) + B_3(t)x_n(t) + A_4(t)y_{n+1}(t)\right), \tag{1.4}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \sigma, \quad \varepsilon_n = e^{-n\sigma}/t_0,$$

с начальными условиями

$$x_{n+1}(0) = x_n(\tau), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\tau), \quad n \geqslant 0.$$

При этом учтена периодичность матриц $A_j(t), B_k(t)$. Дальнейшее исследование (в частности, применение аппарата теории разностных уравнений) позволяет использовать норму вектор-функции, определенную равенством (1.2). Отметим, что наличие малого параметра ε_n существенно влияет на асимптотическое поведение решения систем (1.3), (1.4). Установим некоторые свойства этой системы.

2. Вывод достаточных условий устойчивости изучаемой системы

Поскольку подсистема (1.4) содержит малый параметр при производной (при достаточно больших n или при достаточно большом t_0) то следуя идеям, изложенным для выяснения свойств подобной системы (с постоянным малым параметром ε при производной) [6], сделаем (учитывая вид подсистемы (1.4)) замену переменной

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) = r_{n+1}(t) - A_4^{-1}(t)x_{n+1}(t) - A_4^{-1}(t)B_3(t)x_n(t) = \\ = r_{n+1}(t) + \bar{y}_{n+1}(t); \end{aligned} \tag{2.1}$$

здесь

$$\bar{y}_{n+1}(t) = -A_4^{-1}(t)x_{n+1}(t) - A_4^{-1}(t)B_3(t)x_n(t)$$

— “вырожденное” решение (1.4).

Полагаем, что собственные значения $\lambda_j^4(t)$ матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству

$$Re(\lambda_j^4(t)) < -2\gamma, \quad \gamma = \text{const}, \quad \gamma > 0. \tag{2.2}$$

Известно [10], что при достаточно малом ε_n фундаментальная матрица $Y(t, s, \varepsilon_n)$ решений однородной системы без запаздывания

$$\varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt = e^t A_4(t)y_{n+1}(t) \tag{2.3}$$

удовлетворяет оценке

$$\|Y(t,s,\varepsilon_n)\| \leqslant \bar{M}\cdot \exp\left\{-\frac{\gamma(e^t-e^s)}{\varepsilon_n}\right\},\quad M=\mathrm{const},\quad M>1. \tag{2.4}$$

Учитывая (1.4), (2.3) и записывая теперь $r_{n+1}(t)$ в интегральной форме, получаем равенство

$$r_{n+1}(t) = Y(t,0,\varepsilon_n)r_{n+1}(0) + \int\limits_0^t Y(t,s,\varepsilon_n)\varepsilon_n\,(d\bar{y}_{n+1}(s)/ds)\,ds. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь интегральный член в правой части последнего равенства. Учитывая оценку (2.4) и систему (1.3), получаем для данного интеграла оценку

$$\begin{gathered}\left\|\int\limits_0^t Y(t,s,\varepsilon_n)\varepsilon_n\,(d\bar{y}_{n+1}(s)/ds)\,ds\right\| = \\ = \mathbf{O}(\varepsilon_n)[\|y_{n+1}\|_\tau + \|y_n\|_\tau + \|x_{n+1}\|_\tau + \|x_{n+1}\|_\tau].\end{gathered} \tag{2.6}$$

Первый член в правой части равенства (2.5) ввиду оценки (2.4) имеет интегральную малость [11, с. 259]. Ввиду этих оценок “малости” и подстановки (2.1) получаем из подсистемы (1.3) асимптотическое равенство

$$\begin{gathered}dx_{n+1}(t)/dt = A_1(t)x_{n+1}(t) + B_1(t)x_n(t) - \\ - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)x_{n+1}(t) - \\ - \left[A_2(t)A_4^{-1}(t)B_3(t) + B_2(t)A_4^{-1}(t)B_3(t)\right]x_n(t) - \\ - B_2(t)A_4^{-1}(t)B_3(t)x_{n-1}(t) + f_1(y_{n+1}(t), y_n(t), x_{n+1}(y), x_n(t)) + \\ + f_2(r_{n+1}(t), r_n(t)).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $f_1(y_{n+1}(t), y_n(t), x_{n+1}(t), x_n(t))$ — совокупность членов, обладающих достаточной малостью ввиду оценки (2.6); $f_2(r_{n+1}(t), r_n(t)) = A_2(t)r_{n+1}(t)+$ $+B_2(t)r_n(t)$ — совокупность членов, имеющих интегральную малость. Рассмотрим теперь “укороченную” систему

$$\begin{gathered}dx_{n+1}(t)/dt = A_1(t)x_{n+1}(t) + B_1(t)x_n(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)x_{n+1}(t) - \\ - [A_2(t)A_4^{-1}(t)B_3(t) + B_2(t)A_4^{-1}(t)B_3(t)]x_n(t) - \\ - B_2(t)A_4^{-1}(t)B_3(t)x_{n-1}(t) = \\ = A_1(t)x_{n+1}(t) + \bar{A}_1(t)x_{n+1}(t) + \bar{B}_1(t)x_n(t) + \bar{B}_2(t)x_{n-1}(t).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Поскольку

$$r_{n+1}(0) = y_{n+1}(0) + A_4^{-1}(0)x_{n+1}(0) + A_4^{-1}(0)B_3(0)x_n(0),$$

то имеем асимптотическую оценку

$$\|r_{n+1}(t)\| = \mathbf{O}\left(\exp\left\{-\frac{\gamma(e^t - e^s)}{\varepsilon_n}\right\}\right)[\|y_n\|_\tau + \|x_n\|_\tau + \|x_{n-1}\|_\tau]. \tag{2.9}$$

Следовательно, в подсистеме (2.7) пренебрегли членами, обладающими той или иной малостью.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Подсистемой первого приближения для (2.7) (*при достаточно малых* ε_n) *является дифференциальное равенство вида*

$$dx^0_{n+1}(t)/dt = \frac{1}{2}(A^0_1 + \bar{B}^0_1)x^0_{n+1}(t). \tag{2.10}$$

Здесь матрицы $A^0_1, \bar{B}^0_1$ *имеют постоянные коэффициенты, при этом*

$$A^0_1 = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^\tau A_1(\xi)d\xi,$$

$$\bar{B}^0_1 = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^\tau [\bar{A}_1(\xi) + \bar{B}_1(\xi) + \bar{B}_2(\xi)]d\xi.$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Отсюда следуют достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (1.3), (1.4).

Теорема 2. Для того, чтобы система (1.3), (1.4) *была асимптотически* (*экспоненциально*) *устойчива, достаточно, чтобы собственные значения* $\lambda^4_j(t)$ *матрицы* $A_4(t)$ *удовлетворяли неравенству* (2.2) *и подсистема первого приближения* (*"укороченная" подсистема*) *была экспоненциально устойчива.*

Доказательство. Достаточность данных условий следует из устойчивости по первому приближению для систем, аналогичных системе (1.3), (1.4), доказанных ранее в [9].

3. Построение алгоритма стабилизации

Рассмотрим управляемую систему (1.1). Пусть при $U = \{u_1, u_2\}^\top$ эта система неустойчива или устойчива, но не асимптотически. Следовательно, неустойчива соответствующая ей система (1.3), (1.4). Требуется построить управляющее воздействие $U = f(t, x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau))$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.1) на бесконечном промежутке времени.

Для того, чтобы при стабилизации эффективно использовать результаты предыдущего раздела, рассмотрим вначале поведение собственных значений матрицы $A_4(t)$. Пусть не выполняется неравенство (2.2). Очевидно, найдутся такие положительные постоянные $\sigma_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$, что справедливо неравенство

$$-\sigma_1 \leqslant Re(\lambda_l^4(t)) \leqslant \sigma_2, \quad l = 1, \dots, m. \tag{3.1}$$

Рассмотрим вспомогательные управляемые системы с "замороженными" коэффициентами

$$\begin{gathered} d\hat{y}^j(t)/dt = (A_4(t_j) + \sigma E)\, \hat{y}^j(t) + D_2 \hat{u}_j(t_j), \\ t_{j+1} = t_j + h, \quad h = \frac{\tau}{2k+1}, \quad j = 0, 1, \dots, 2k+1 \end{gathered} \tag{3.2}$$

(здесь константа $\sigma > 0$ выбирается следующим образом: $\sigma_1 > \sigma$). Очевидно, часть этих систем (при условии $Re(A_4(t_j) + \sigma_2 E) \geqslant 0$) неустойчива (или устойчива, но не асимптотически) при некоторых t_j. Будем стабилизировать такие системы (3.2), выбирая управления $\hat{u}_j(t_j)$ по правилу, приведенному в [12, с. 96], именно

$$\hat{u}_j(t_j) = -D_2^\top \Gamma_j \hat{y}^j(t_j), \tag{3.3}$$

где Γ_j удовлетворяют соответственно нелинейным уравнениям [12, с. 97]

$$\Gamma_j [A_4(t_j) + \sigma E] + [A_4(t_j) + \sigma_2 E]^\top \Gamma_j - 2\Gamma_j D_2 D_2^\top \Gamma_j = -\bar{\gamma}\Gamma_j + \delta E. \tag{3.4}$$

Здесь $\bar{\gamma} = \mathrm{const}$, $\bar{\gamma} > 0$ (ее величиной можно распоряжаться); δ — малая положительная постоянная (ее введение обусловлено тем, что нелинейное уравнение (3.4) будет разрешимо, если ранг матрицы

$$\left\{D_2, [A_4(t) + \sigma E] D_2, [A_4(t) + \sigma E]^2 D_2, \dots, [A_4(t) + \sigma E]^{m-1} D_2\right\}, \quad t \in [0, \tau]$$

равен m, т.е. найдется такое положительное $\sigma < \sigma_1$, что системы (3.2) вполне управляемы). Разрешая уравнение (3.4), вычисляя управление $\hat{u}(t_j)$ в соответствии с (3.3), будем далее получать значения периодической стабилизированной матрицы $A_{4s}(t_j) = A_4(t_j) + \sigma E - D_2 D_2^\top \Gamma_j$ в точках $t_j \in [0, \tau]$ (в тех точках $\bar{t}_j$, в которых $Re(\lambda_l^4(\bar{t}_j)) < -\sigma$, считаем $\hat{u}_j(\bar{t}_j) \equiv 0$). Рассмотрим теперь вопрос о приближенном вычислении периодической матрицы $A_{4s}(t)$ при $\forall t \in [0, \tau]$. Очевидно, что в точках множества $t_j \vee \bar{t}_j$ имеем также набор значений периодической вектор-функции $-D_2^\top \Gamma(t)$. Известно [13, с. 478], что всегда можно подобрать совокупность $2k + 1$ коэффициентов $\alpha_0^s, \alpha_1^s, \dots, \alpha_k^s; \beta_1^s, \beta_2^s, \dots, \beta_k^s$ тригонометрического полинома k-го порядка

$$\hat{H}_k(t) = \frac{\alpha_0^s}{2} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^s \cos\left(\frac{2\pi j t}{\tau}\right) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^s \sin\left(\frac{2\pi j t}{\tau}\right),$$

значения которого при $t = t_j$ равны $-D_2^\top \Gamma(t_j)$. При этом справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
\alpha_0^s &= \frac{2}{2k+1} \sum_{j=1}^{2k} \hat{H}_k(jh), \\
\alpha_i^s &= \frac{2}{2k+1} \sum_{j=1}^{2k} \hat{H}_k(jh) \cos(\omega_{ij}), \\
\beta_j^s &= \frac{2}{2k+1} \sum_{j=1}^{2k} \hat{H}_k(jh) \sin(\omega_{ij}), \\
\omega_{ij} &= \frac{2\pi i}{\tau} jh, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Вследствие предположений относительно матрицы $A_4(t)$ (она достаточное число раз дифференцируемая) вектор-функция $A_{4s}(t)$ будет функцией ограниченной вариации, следовательно, справедливы предельные соотношения

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \hat{\alpha}_0^s &= -\frac{2}{\tau} \int_0^\tau D_2^\top \Gamma(\zeta) d\zeta, \\
\lim_{k\to\infty} \hat{\alpha}_i^s &= -\frac{2}{\tau} \int_0^\tau D_2^\top \Gamma(\zeta) \cos\left(\frac{2\pi i}{\tau}\zeta\right) d\zeta, \\
\lim_{k\to\infty} \beta_i^s &= -\frac{2}{\tau} \int_0^\tau D_2^\top \Gamma(\zeta) \sin\left(\frac{2\pi i}{\tau}\zeta\right) d\zeta.
\end{aligned}
$$

Очевидно, для больших k полином $\hat{H}_k(t)$ достаточно хорошо приближает вектор-функцию $-D_2^\top \Gamma(t)$. Критерием этого может быть, в частности, неравенство $\|\hat{H}_k(t) - \hat{H}_{k-1}(t)\| < \bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}$ — достаточно малое положительное число.

Полагаем теперь управление $\hat{u}(t) = \hat{H}_k(t)\hat{y}(t)$. Поскольку вещественные части собственных значений $\lambda_s(t_j)$ полученных матриц $A_{4s}(t_j)$, по крайней мере, удовлетворяют неравенству

$$
Re(\lambda_{ls}(t_j)) \leqslant -\bar{\delta}(\bar{\gamma}), \quad \lim_{\bar{\gamma}\to\infty} \bar{\delta}(\bar{\gamma}) = \infty,
$$

то при достаточно большом k и $\bar{\gamma}$ все собственные значения $\lambda_{ls}^4(t)$ исправленной матрицы $A_{4s}(t) = A_4(t) - D_2\hat{H}_k(t)$ будут удовлетворять оценке

$$
Re(\lambda_{ls}^4(t)) \leqslant -\frac{\sigma}{2}. \tag{3.6}
$$

Следовательно, при достаточно малом ε_n имеем оценку (2.9) ($\gamma = \frac{\sigma}{2}$). При этом существует матрица $A_{4s}^{-1}(t)$.

Рассмотрим теперь управляемую подсистему вида

$$
\begin{aligned}
dx_{n+1}(t)/dt &= A_1(t)x_{n+1}(t) + B_1(t)x_n(t) - A_2(t)A_{4s}^{-1}(t)x_{n+1}(t) - \\
&- [A_2(t)A_{4s}^{-1}(t)B_3(t) + B_2(t)A_{4s}^{-1}(t)]x_n(t) - \\
&- B_2(t)A_{4s}^{-1}(t)B_3(t)x_{n-1}(t) + D_1\bar{u}_n(t) = \\
&= A_1(t)x_{n+1}(t) + \bar{A}_{1s}(t)x_{n+1}(t) + \\
&+ \bar{B}_{1s}(t)x_n(t) + \bar{B}_{2s}(t)x_{n-1}(t) + D_1\bar{u}_n(t).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Если при $\bar{u}_n(t) \equiv 0$ решение данной системы асимптотически (экспоненциально) устойчиво, то асимптотически устойчива и система

$$
dx_{n+1}(t)/dt = A_1(t)x_{n+1}(t) + B_1(t)x_n(t) + A_2(t)y_{n+1}(t) + B_2(t)y_n(t), \tag{3.8}
$$

$$
\varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt = t_0 e^t \left(A_3(t)x_{n+1}(t) + B_3(t)x_n(t) + A_{4s}(t)y_{n+1}(t)\right), \tag{3.9}
$$

$$
0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad \varepsilon_n = e^{-n\tau}/t_0.
$$

Если же решение системы (3.8), (3.9) неустойчиво, то будем стабилизировать систему вида

$$
dx_{n+1}^0(t)/dt = \frac{1}{2}(A_1^0 + \bar{B}_{1s}^0)x_{n+1}^0(t) + D_1\bar{u}_n(t), \tag{3.10}
$$

$$
B_{1s}^0 = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^\tau [\bar{A}_{1s}(\xi) + \bar{B}_{1s}(\xi) + \bar{B}_{2s}(\xi)]d\xi.
$$

Проблема стабилизации системы (3.10) решается алгоритмом, аналогичным примененным при стабилизации системы (3.2), именно, рассматривая нелинейное уравнение [12, с. 97]

$$
\Gamma[A_1^0 + B_{1s}^0] + [(A_1^0 + B_{1s}^0)\Gamma]^\top - 4\Gamma D_2 D_2^\top \Gamma = -2\bar{\gamma}\Gamma + 2\delta E \tag{3.11}
$$

(при условии полной управляемости соответствующей системы), полагая

$$
\bar{u}_n = -D_1^\top \Gamma x_{n+1}(t),
$$

и подставляя данное управление в подсистему (3.10), получаем экспоненциальную устойчивость данной системы — системы первого приближения. В пользу применения такого алгоритма стабилизации говорит такой факт, что можно задаться достаточно большим числом $\bar{\gamma}$, что гарантирует хорошую отделимость от нуля действительной части собственных чисел матрицы $A_1^0 + B_{1s}^0$.

Если теперь в исходной управляемой системе считать $u_2(t) = \hat{H}_k(t)y(t)$; $u_1(t) = -D_1^\top \Gamma x(t)$, то получим ввиду доказанной теоремы 1 (а также результата, полученного в [9]), что исходная управляемая система (1.1) асимптотически устойчива. Отметим, что из результатов, полученных в [9], следует, что данный алгоритм стабилизации применим также и к тем системам, в которых матрица $B_4(t) = \mathbf{O}(\hat{\varepsilon})$: $\hat{\varepsilon}_n$ — достаточно малое положительное число.

4. Пример

Рассмотрим управляемую систему четвертого порядка с единичным запаздыванием, матрицы $A_i(t)$, $B_k(t)$, D_l определены следующим образом:

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 4 & \sin(2\pi t) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) - \sin(4\pi t) & -2\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t) \\ 2\sin(2\pi t) + 2\sin^2(2\pi t) & -\cos(2\pi t) + 4\cos^2(2\pi t), \end{pmatrix},$$

$$A_4(t) = \begin{pmatrix} -1 - 2\cos(2\pi t) & -2 + 2\sin(2\pi t) \\ 2 + 2\sin(2\pi t) & -1 + \cos(2\pi t) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & \cos(2\pi t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3(t) = \begin{pmatrix} -4 + 4\sin(2\pi t) & -1 + 2\cos(2\pi t) \\ -2 + 4\cos(2\pi t) & 2 + 2\sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $A_4(t)$. Ее собственные значения $\lambda_1^4 = \lambda_2^4 = -1$. Таким образом, стабилизация систем (3.2) отпадает ($u_2 \equiv 0$). Далее, имеем следующие равенства:

$$A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(2\pi t) & 0 \\ 0 & \cos(2\pi t) \end{pmatrix},$$

$$A_2(t)A_4^{-1}(t)B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2(t)A_4^{-1}(t)B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3(t)A_4^{-1}(t)B_3(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем (в первом приближении) управляемую подсистему второго порядка

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= 0{,}1x_1(t) - 3x_2(t), \\ dx_2(t)/dt &= -x_1(t) + 3x_2(t) + u(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Пусть $u_1(t) \equiv 0$. Матрица системы первого приближения

$$A_p = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\bar{\lambda}_1 = -1{,}24$, $\bar{\lambda}_2 = 2{,}34$, т.е. подсистема первого приближения неустойчива, следовательно, неустойчива и исходная “возмущенная” подсистема [11, с. 149]. Рассмотрим управляемую систему (4.2). Очевидно, $\det A_p \neq 0$, следовательно, для нахождения искомого управления $u_1(t)$ можно решить более простое (по сравнению с (3.11)) линейное уравнение

$$A_p\Gamma_2^{-1} + \Gamma_2^{-1}A_2^{\top} - 2D_1D_1^{\top} = -\sigma\Gamma_2^{-1}. \tag{4.3}$$

Определив отсюда матрицу Γ_2^{-1}, найдем далее Γ_2 и вычислим искомое управление в соответствии с правилом, аналогичным с (3.3). Пусть в (4.3) $\sigma = 4$. Решим данное уравнение с помощью пакета прикладных программ *MATLAB* 7.1. Получаем следующие результаты:

$$\begin{gathered}\Gamma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2674 & 0{,}1872 \\ 0{,}1872 & 0{,}229 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 8{,}73 & -7{,}14 \\ -7{,}14 & 10{,}2 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1(\Gamma_2) \approx 2{,}29, \quad \lambda_2(\Gamma_2) \approx 16{,}65. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Очевидно, матрица Γ_2 — симметричная, положительно определенная. Управление, получаемое в соответствии с (3.3), имеет вид $u_1(t) = -7{,}14x_1(t) + $ $+10{,}2x_2(t)$. Полученная “исправленная” матрица $A_{2s} = A_p - D_1D_1^{\top}\Gamma_2$ и ее собственные значения численно равны

$$A_{2s} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -3 \\ 6{,}14 & -0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1(A_{2s}) = -2{,}76, \quad \lambda_2(A_{2s}) = -6{,}34.$$

Очевидно, “исправленная” матрица A_{2s} (благодаря константе $\sigma = 4$) имеет собственные значения $\lambda_l(A_{2s})$, расположенные достаточно далеко от начала координат. Следовательно, “возмущенная” подсистема экспоненциально устойчива [9], и асимптотически устойчива и исходная система. Стабилизация завершена.

5. Заключение

Приведенный пример показывает достаточную эффективность разработанных алгоритмов стабилизации. При этом для вычислений используются ранее разработанные методы стабилизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений и разностных систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим систему (2.8). Разлагая матрицы $A_1(t)$, $\bar{A}_1(t)$, $\bar{B}_1(t)$, $\bar{B}_2(t)$ в ряды Фурье, имеем равенства

$$\begin{gathered} A_1(t) = A_1^0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_j^1 \cos\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right)t + \beta_j^k \sin\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right)t\right), \\ \bar{A}_1(t) = \bar{A}_1^0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\bar{\alpha}_j^1 \cos\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right)t + \bar{\beta}_j^1 \sin\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right)t\right), \\ \bar{B}_l(t) = \bar{B}_l^0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\hat{\alpha}_j^l \cos\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right)t + \hat{\beta}_j^l \sin\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right)t\right), \quad l = 1, 2. \end{gathered} \tag{П.1}$$

Вследствие предположений относительно матриц $A_k(t)$, $B_l(t)$ $(k = 1, \ldots, 4;$ $l = 1, 2, 3)$ данные ряды сходятся абсолютно [13, с. 476], следовательно, получаем асимптотические равенства

$$A_1(t) \approx A_1^0 + \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j^1 \cos\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right) t + \beta_j^k \sin\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right) t\right) = A_{1,N}(t),$$

$$\bar{A}_1(t) \approx \bar{A}_1^0 + \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{\alpha}_j^1 \cos\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right) t + \bar{\beta}_j^1 \sin\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right) t\right) = \bar{A}_{1,N}(t), \tag{П.2}$$

$$\bar{B}_l(t) \approx \bar{B}_l^0 + \sum_{j=1}^{N} \left(\hat{\alpha}_j^l \cos\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right) t + \hat{\beta}_j^l \sin\left(\frac{2\pi j}{\tau}\right) t\right) = \bar{B}_{l,N}(t), \quad l = 1, 2$$

(N — достаточно большое натуральное число). Если теперь подставить выражения (П.2) в “укороченную” систему (2.8), то, сделав на каждом шаге замену аргумента $t = \varepsilon_n \vartheta$, получаем систему с ограниченной правой частью

$$\begin{aligned} dx_{n+1}(\vartheta)/d\vartheta = \varepsilon_n[&A_{1,N}(\varepsilon_n\vartheta)x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta) + \bar{A}_{1,N}(\varepsilon_n\vartheta)x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta) + \\ &+ \bar{B}_{1,N}(\varepsilon_n\vartheta)x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - \tau) + \bar{B}_{2,N}(\varepsilon_n\vartheta)x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - 2\tau)]. \end{aligned} \tag{П.3}$$

Рассмотрим, например, асимптотическое поведение величины $x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - \tau)$. Ввиду того, что при достаточно больших t производная $x'(t)$ существует (и непрерывна), имеем асимптотическое равенство, подобное [14, с. 281]:

$$\begin{aligned} &x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - \tau) = x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta) - \\ &- \tau\varepsilon_n[(A_{1,N}(\varepsilon_n\vartheta - \zeta\tau) + \bar{A}_{1,N}(\varepsilon_n\vartheta - \zeta\tau))x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - \zeta\tau) + \\ &+ \bar{B}_1(\varepsilon_n\vartheta - \zeta\tau)x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - \tau - \zeta\tau) + \\ &+ \bar{B}_2(\varepsilon_n\vartheta - \zeta\tau)x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - 2\tau - \zeta\tau)] = \\ &= x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta) + \mathbf{O}(\varepsilon_n)[\|x_n(\varepsilon_n\vartheta)\|_\tau + \|x_{n-1}(\varepsilon_n\vartheta)\|_\tau], \quad \zeta \in (0, 1). \end{aligned} \tag{П.4}$$

Такое же асимптотическое равенство можно получить и для $x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - 2\tau)$. Далее (ввиду произведенной замены аргумента) следует, что все члены в асимптотических равенствах (П.2), содержащие величины $\sin(\frac{2\pi j}{\tau})t$, $\cos(\frac{2\pi j}{\tau})t$, $1 \leqslant j \leqslant \hat{m}$ имеют весьма малые производные. Как следует теперь из результатов, полученных ранее в [9], системой первого приближения для “укороченной” системы при малых ε_n является более простая система (2.10), не содержащая запаздываний при величине $x_{n+1}(t)$. В самом деле, из (П.4) следует, что запаздывание у величин $x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - \tau)$, $x_{n+1}(\varepsilon_n\vartheta - 2\tau)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Известно [15], что в случае экспоненциальной устойчивости системы без запаздывания (с ограниченной правой частью) исходная система с малым запаздыванием также экспоненциально устойчива. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Ockendon J., Tailor A.* The Dinamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive // Proc. Roy. Soc. London. 1971. Ser. A, 322. P. 447–468.
3. *Fox L., Mayers D.F., Ockendon J., Tailor A.* On a Functional Differential Equation // J. Math. Appl. 1971. No. 8. P. 271–307.
4. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
5. *Марквардт И.Г., Власов И.И.* Контактная сеть. М.: Транспорт, 1978.
6. *Климушев А.И.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения и теория упругости. 1973. Сб. № 211. Урал. политехн. инс-т, Свердловск. С. 30–54.
7. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
8. *Гребенщиков Б.Г., Новиков С.И.* О неустойчивости некоторой системы с линейным запаздыванием // Изв. ВУЗОВ. Математика. 2010. №2. С. 1–10.
9. *Гребенщиков Б.Г.* Об устойчивости по первому приближению одной нестационарной системы с запаздыванием // Изв. ВУЗОВ. Математика. 2013. № 8. С. 1–10.
10. *Гребенщиков Б.Г.* Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Межвуз. сб. науч. тр. Свердловск. 1984. С. 18–29.
11. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
12. *Фурасов В.Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов М.: Наука, 1982.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.3. М.: Наука, 2002.
14. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Вища шк., 1971.
15. *Репин Ю.М.* Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом // ПММ. 1957. № 21. Вып. 2. С. 153–161.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.И. Васильевым.

Поступила в редакцию 10.05.2016

После доработки 12.04.2018

Принята к публикации 08.11.2018