

## Управление в технических системах

© 2019 г. В.Н. БУКОВ, д-р техн. наук (v\_bukov@mail.ru)  
(ОАО “Бортовые аэронавигационные системы”, Москва),  
А.М. БРОННИКОВ, д-р техн. наук (bronnikov\_a\_m@mail.ru)  
(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана),  
А.М. АГЕЕВ, канд. техн. наук (ageev\_bbc@mail.ru),  
И.Ф. ГАМАЮНОВ, канд. техн. наук (ilyagama@gmail.com)  
(ВУНЦ ВВС “Военно-воздушная академия  
им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина”, Воронеж)

### ИНТЕГРАЦИЯ КОМПЛЕКСА ОБОРУДОВАНИЯ ВЫБРАННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Ставится и решается задача синтеза динамических, с операторами дискретного сдвига во времени, интеграционных матриц, моделирующих обработку данных в интегрированной вычислительной среде создаваемого комплекса оборудования. Развиваемый подход предусматривает предварительный выбор конфигурации комплекса путем задания пары конфигурационных матриц, моделирующих безынерционные входные и выходные интерфейсы всех его неоднородных и неуниверсальных компонентов. Получены формульные выражения для полного и суженных множеств интеграционных матриц, обеспечивающих при выбранных конфигурационных матрицах неизменность предписанной комплексу целевой функции. Приводится методический пример, демонстрирующий методику и эффективность предлагаемого подхода.

*Ключевые слова:* комплекс оборудования, управление избыточностью, реконфигурация, целевая функция, передаточная матрица, интеграционный базис, канонизация матриц, делители нуля, гипотеза Букова.

DOI: 10.1134/S0005231019040068

#### 1. Введение

Избыточность комплекса оборудования (КО) по определению предполагает наличие компонентов, число и возможности которых превышают минимально необходимые для применения КО по предназначению. При этом для осуществления тех или иных функций, а также в порядке реагирования на внешние вызовы КО может принимать соответствующую конфигурацию (схему или способ объединения компонентов) и изменять цели функционирования.

Так, в [1] с помощью декомпозиционного метода размещения полюсов решается задача сохранения заданных характеристик устойчивости воздушного судна при реконфигурации системы управления полетом в условиях возникновения отказов исполнительной подсистемы. Учет перекрестных связей между каналами управления позволяет полностью компенсировать последствия отказов исполнительной подсистемы в каждом из каналов управления

при соблюдении условий полной управляемости модели движения летательного аппарата как динамической системы.

Статья [2] посвящена вопросам структурно-функциональной реконфигурации сложных объектов на основе формирования гипермультиграфа макросостояний, связывающего текущее и возможные будущие состояния объекта. Решение строится как оптимальное в некотором смысле управление потоками информации и отказов.

В [3] приводится описание отказоустойчивой системы с реконфигурацией, моделируемой в пакете Matlab Simulink + Stateflow. Готовность к работе при любых отказах или сбоях достигается за счет организации двухканальной структуры с поблочным дублированием, перекрестными связями и восстанавливающим органом, выполняющим логическую функцию “И”. Система остается работоспособной до тех пор, пока одновременно не откажет какая-либо из определенных пар блоков.

Авторы [4] для управления реконфигурированием перестраиваемой бортовой вычислительной системы малых космических аппаратов предлагают учитывать такие параметры, как накопленная доза ионизирующего излучения и ее интенсивность, нагрев, частота сбоев и отказов. Устойчивость же работы системы обеспечивается своевременным переводом элементов в пассивное состояние посредством реконфигурирования.

В [5] для прогнозирования структурной устойчивости автоматизированных систем управления космическими аппаратами предлагается методика, включающая три шага: построение схемы функциональной целостности, моделирование различных сценариев, вычисление нечетких значений показателей структурной устойчивости.

Статья [6] содержит основные принципы функционирования мультиагентного диспетчера, используемого в современных и перспективных информационно-управляющих системах атомных электростанций и авиационных комплексов дальнего радиолокационного обнаружения. При этом предусмотрена автоматическая подстройка архитектуры вычислителей под решаемую задачу, обеспечивающая высокую скорость при минимальных аппаратных затратах.

В [7] в качестве базовой подсистемы для соединения всех подсистем авионики рассматривается подсистема цифровой обработки данных, состоящая из избыточных центральных процессорных блоков, а также сопутствующих модулей ввода/вывода, соответствующего программного обеспечения, цифровых шин данных и многочисленных удаленных терминалов.

Статья [8] содержит библиографический обзор активных отказоустойчивых систем управления, существующих подходов к детектированию отказов и диагностике применительно к техническим системам. На основе 376 источников, датированных с 1971 г., осуществлен всесторонний анализ исследований в прошлом, настоящем и сделан прогноз на будущее.

В [9] ставится задача управления избыточностью КО и формулируется решение этой задачи с помощью программно-аппаратных средств, названных супервизорами конфигураций. Затем в [10–13] развивается аналитический подход к формированию множества альтернативных конфигураций избыточ-

ных КО, а также анализируется взаимосвязь аналитических решений с супервизорами конфигураций КО. Статья [14] посвящена проверке (тестированию) выбранной конфигурации неоднородного КО на его реализуемость, т.е. на наличие потенциальной возможности определения такой обработки сигналов в его межкомпонентных связях, при которой комплекс может выполнять предписанные целевые функции. К особенностям развиваемого подхода следует отнести: математическую строгость и логическую непротиворечивость, формализацию описания процессов информационного обмена в КО, а также получение решений в аналитическом виде.

## 2. Модель избыточного комплекса

Предметом исследований является система, называемая в дальнейшем “объект + КО” и включающая:

объект, для которого создается комплекс оборудования и который может непосредственно взаимодействовать, причем не единственным образом, с некоторыми из компонентов этого комплекса (с датчиками и актуаторами);

избыточную совокупность разрозненных<sup>1</sup>, не обязательно однородных (совместимость всех интерфейсов) и универсальных (применимость для любых функций) компонентов, предназначенных для исполнения разнообразных частных функций;

интегрированную вычислительную среду (ИВС), на которую возлагается интеграция (объединение) разрозненных компонентов в комплекс с единой целью функционирования, что предполагает сбор данных с выходов используемых компонентов реализуемой конфигурации, обработку этих данных в соответствии с некоторыми правилами и распределение результатов обработки по входам используемых компонентов.

Поведение избыточной совокупности разрозненных компонентов и объекта в терминах систем с дискретным временем  $\tau = 0, 1, 2, \dots$  в линейном приближении описывается моделью [10, 12–14]

$$(1) \quad y_\tau = Dx_\tau, \quad x_{\tau+1} = Ax_\tau + Bu_\tau + Gv_\tau, \quad x_{\tau=0} = x_0,$$

где  $y_\tau$  – метавектор (составной вектор) выходов всех компонентов на такте  $\tau$  размерности  $m$ ,  $x_\tau$  – метавектор состояния компонентов и объекта размерности  $n$ ,  $u_\tau$  – метавектор входов компонентов для межкомпонентных связей размерности  $l$ ,  $v_\tau$  – метавектор входов компонентов и объекта для внешних воздействий (внешних входов) размерности  $k$ ,  $D$  – блочная числовая матрица формирования выходов всех компонентов размеров  $m \times n$ ,  $A$  – блочная числовая матрица собственной динамики компонентов и объекта размеров  $n \times n$ ,  $B$  – блочная числовая матрица эффективности межкомпонентных связей размеров  $n \times l$ ,  $G$  – блочная числовая матрица эффективности внешних воздействий размеров  $n \times k$ .

Линеаризованная модель функционирования ИВС может быть представлена в форме передаточной матрицы (при нулевых начальных условиях<sup>2</sup> для

<sup>1</sup> Обособленных или необособленных как в функциональном, так и конструктивном аспектах.

<sup>2</sup> Отказ от этого предположения требует дополнительных исследований.

всех внутренних переменных ИВС)

$$(2) \quad u_\tau = Q(z)y_\tau,$$

где  $z$  – оператор сдвига во времени на один такт вперед,  $Q(z)$  – в общем случае дробно-рациональная полиномиальная (по оператору  $z$ ) матрица размеров  $l \times m$  передаточных функций (передаточная матрица) от метавектора выходов компонентов  $y_\tau$  к метавектору их входов для межкомпонентных связей  $u_\tau$ , названная конфигурационной матрицей [13].

В свою очередь, конфигурационная матрица имеет структуру:

$$(3) \quad Q(z) = C_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}},$$

где  $C_{\text{вх}}$  и  $C_{\text{вых}}$  – распределительные матрицы размеров  $l \times p$  и  $q \times m$ , т.е. матрицы, содержащие бинарные элементы и не более одного единичного элемента в строке, названные интерфейсными матрицами [10], поскольку моделируют без учета задержек функционирование входных и выходных интерфейсов всех компонентов за исключением объекта,  $E(z)$  – в общем случае дробно-рациональная полиномиальная матрица размеров  $p \times q$ , моделирующая обработку вычислительными средствами ИВС и задержек всех поступающих данных и названная интеграционной матрицей [10].

В силу избыточности состава и функциональности компонентов конфигурационная матрица  $Q(z)$  допускает варьирование, обусловленное:

выбором различных пар интерфейсных матриц  $C_{\text{вх}}$  и  $C_{\text{вых}}$  в интересах адаптации системы в целом к изменяющимся условиям, включая корректировку возлагаемых на нее задач и парирование отказов или неправильного функционирования различных компонентов, изменяться могут размеры ( $p$  и  $q$ ) и значения элементов этих матриц;

изменением настроек (значений элементов) интеграционной матрицы  $E(z)$  в силу либо учета ресурсов, возможностей и особенностей вычислительных средств ИВС, либо удовлетворения дополнительных требований к системе.

При этом в возможностях и ограничениях выбора  $C_{\text{вх}}$  и  $C_{\text{вых}}$  проявляется неоднородность компонентов, а настроек  $E(z)$  – их неуниверсальность.

Термины “конфигурирование избыточного КО” и “интеграция избыточного КО” будем преимущественно связывать с отдельным определением пары интерфейсных матриц  $C_{\text{вх}}$ ,  $C_{\text{вых}}$  в первом случае и интеграционной матрицы  $E(z)$  во втором, хотя указанная грань не всегда обладает достаточной четкостью. Так, тождественное обнуление элементов  $E(z)$  приводит к изменению конфигурации КО.

### 3. Постановка задачи и используемый аппарат

В качестве формальной функции, отражающей основное содержание функционирования системы в целом, предложено [10] использовать выборочную часть ее передаточной матрицы от внешних входов  $v_\tau$  к выходам  $y_\tau$

$$W_y^v(z) = \left[ w_{y_j}^{v_i}(z) \right]_{m \times k} = D(zI_n - A - BQ(z)D)^{-1}G,$$

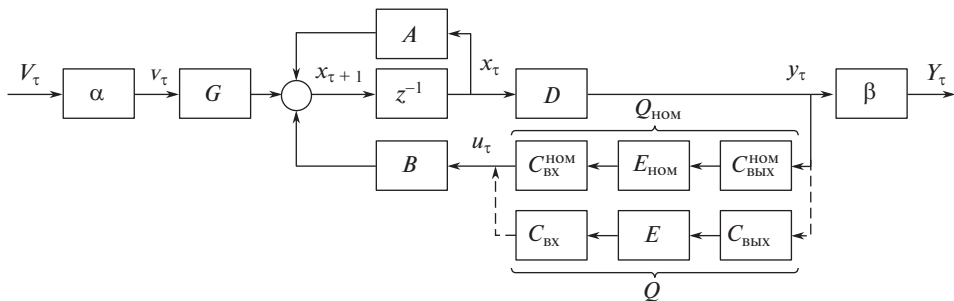


Рис. 1. Структура системы “объект + КО” с учетом тестовых входа и выхода.

полученной объединением (1)–(3), где  $w_{y_j}^{v_i}(z)$  – передаточная функция от  $i$ -го входа  $v_{i,\tau}$  к  $j$ -му выходу  $y_{j,\tau}$ ,  $I_n$  – единичная матрица размеров  $n \times n$ . Матрицу, формируемую из передаточной матрицы  $W_y^v(z)$  посредством весовых матриц  $\alpha$  размеров  $k \times g$  и  $\beta$  размеров  $f \times m$  на ее входе и выходе,

$$(4) \quad \Phi(z) = W_Y^V(z) = \beta W_y^v(z) \alpha = \beta D(zI_n - A - BQ(z)D)^{-1} G \alpha$$

предложено [10] называть целевой функцией КО.

Векторы  $V_\tau$  и  $Y_\tau$ , связанные с метавекторами входов  $v_\tau$  и выходов  $y_\tau$  компонентов в соответствии с формулами  $v_\tau = \alpha V_\tau$  и  $Y_\tau = \beta y_\tau$ , будем называть тестовыми входом и выходом системы. Таким образом, целевая функция (4) представляет собой передаточную матрицу  $W_Y^V(z)$  от тестового входа  $V_\tau$  к тестовому выходу  $Y_\tau$ .

Целевую функцию удобно связывать с так называемой номинальной конфигурацией КО, когда выполняется равенство

$$Q_{\text{НОМ}}(z) = C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}} E_{\text{НОМ}}(z) C_{\text{ВЫХ}}^{\text{НОМ}},$$

где все указанные матрицы имеют номинальные значения, при которых функция (4) принимает значение  $\Phi_{\text{Треб}}(z)$ , удовлетворяющее разработчика. Для знаменателя матричной дроби (4) при номинальной конфигурации комплекса далее используется обозначение

$$\Omega(z) = zI_n - A - BQ_{\text{НОМ}}(z)D.$$

Рисунок 1 иллюстрирует структуру системы “объект + КО”, в которой помимо номинальной конфигурации КО, формализуемой матрицей  $Q_{\text{НОМ}}$ , показана одна из его альтернативных конфигураций, представленная матрицей  $Q$ . С целью упрощения указания на зависимость матриц  $E$ ,  $E_{\text{НОМ}}$ ,  $Q$  и  $Q_{\text{НОМ}}$  от оператора  $z$  опущены.

Для обеспечения компактности формул введены [14] определения двух передаточных матриц для системы “объект + КО” в номинальной конфигурации:

номинальная передаточная матрица по внешнему воздействию

$$W_{y.\text{НОМ}}^v(z) = D\Omega^{-1}(z)G$$

и номинальная передаточная матрица по межкомпонентным связям

$$W_{y,\text{ном}}^u(z) = D\Omega^{-1}(z)B.$$

С понятием “управление избыточностью технической системы” тесно связаны методы решения задач варьирования ее конфигурации. В частности, это относится к возможностям и ограничениям такого изменения конфигурации КО, при котором целевая функция остается неизменной. В [14] все матрицы  $C_{\text{вх}}$  и  $C_{\text{вых}}$ , обеспечивающие потенциальную возможность интеграции комплекса (т.е. определение такой интеграционной матрицы  $E(z)$ , при которой указанное требование выполняется), относятся к допустимым. Соответствующая конфигурация КО тоже называется допустимой.

Там же сформулированы как необходимые и достаточные, так и только достаточные условия отнесения матриц  $C_{\text{вх}}$  и  $C_{\text{вых}}$  к допустимым.

В данной статье ставится задача получения формульных выражений для множеств интеграционных матриц  $E(z)$ , соответствующих выбранной паре допустимых альтернативных интерфейсных матриц  $C_{\text{вх}}$ ,  $C_{\text{вых}}$ . Решение получено как для исходной (полной), так и для редуцированной (упрощенной) постановок задачи [14].

Такая формулировка задачи отличается от предложенной ранее в [10], где осуществлялся синтез интеграционной матрицы без независимого предварительного выбора интерфейсных матриц. Введенная здесь корректировка позволяет разработчику-интегратору КО задавать направление поиска альтернативных конфигураций с учетом различных дополнительных требований и обстоятельств.

При решении поставленной задачи используется аппарат канонизации матриц [15], в основе которого лежит модификация алгоритма Гаусса, позволяющая любую матрицу  $S$  размеров  $n \times m$  и ранга  $r$  преобразовать в совокупность соответствующих ей левого  $\bar{S}^L$  и правого  $\bar{S}^R$  делителей нуля максимального ранга, а также левого  $\tilde{S}^L$ , правого  $\tilde{S}^R$  и сводного  $\tilde{S}$  канонизаторов, удовлетворяющих равенствам

$$(5) \quad \bar{S}^L S = 0, \quad S \bar{S}^R = 0, \quad \tilde{S}^L S \tilde{S}^R = I_r, \quad \tilde{S} = (S)^\sim = \tilde{S}^R \tilde{S}^L \quad \text{и} \quad S \tilde{S} S = S.$$

В случае отсутствия (равенства нулю) делителей нуля сводный канонизатор  $\tilde{S}$  уступает место односторонним делителям единицы<sup>3</sup> или обратной матрице [15]:

при отсутствии  $\bar{S}^L$  – правому делителю единицы  $\tilde{S} = \tilde{S}^R = S^R$ , удовлетворяющему равенству

$$S S^R = I_n,$$

---

<sup>3</sup> Канонизация матрицы  $S$ , у которой  $n < m$  и  $r = n$ , может быть выполнена комбинированием только столбцов и дает  $[ S^R \quad \bar{S}^R ]$ . При этом возможное комбинирование строк, формализуемое в этом случае обратимой матрицей  $\tilde{S}^L = P$ , компенсируется комбинированием столбцов, приводящим к  $[ S^R P^{-1} \quad \bar{S}^R ]$ . В результате сводный канонизатор принимает значение  $\tilde{S} = S^R P^{-1} P = S^R$ .

при отсутствии  $\overline{S}^R$  – левому делителю единицы  $\tilde{S} = \tilde{S}^L = S^L$ , удовлетворяющему равенству

$$S^L S = I_m,$$

при отсутствии  $\overline{S}^L$  и  $\overline{S}^R$  – обратной матрице  $\tilde{S} = S^{-1}$ .

Существующая неединственность результатов канонизации не создает трудностей для их использования. Преимущество данного аппарата поясняется в [14].

#### 4. Интеграционный базис

Введем в рассмотрение вспомогательную виртуальную систему, которую будем называть базисной. Ее структура показана на рис. 2. Система представляет собой последовательность (цепочку) трех динамических блоков (для отличия от реальной системы метавекторы помечены штрихами и градусом) с передаточными матрицами:

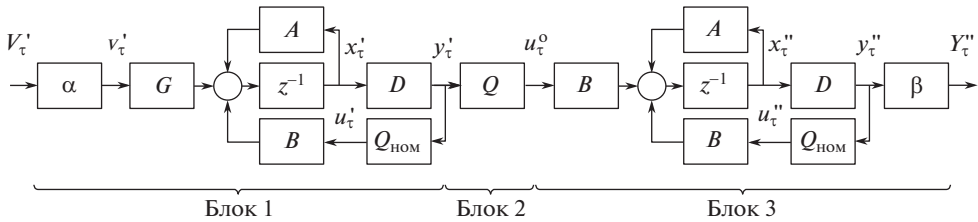


Рис. 2. Структура базисной системы.

блок 1, от тестового входа  $V'_\tau$  к выходам компонентов  $y'_\tau$  при номинальной конфигурации КО:

$$W_{y'_\tau}^{V'_\tau}(z) = W_{y_{\text{ном}}^v}(z)\alpha,$$

блок 2, от выходов компонентов  $y'_\tau$  к их входам для межкомпонентных связей  $u^\circ_\tau$  (соответствует передаточной матрице ИВС по формуле (2)) при конфигурации КО, для которой определяется интеграционная матрица:

$$W_{u^\circ_\tau}^{y'_\tau}(z) = Q(z),$$

блок 3, от входов компонентов для межкомпонентных связей  $u^\circ_\tau$  к тестовому выходу  $Y''_\tau$  при номинальной конфигурации КО:

$$W_{Y''_\tau}^{u^\circ_\tau}(z) = \beta W_{y_{\text{ном}}^u}(z).$$

Таким образом, передаточная матрица базисной системы при любых значениях интерфейсных  $C_{\text{вх}}$ ,  $C_{\text{вых}}$  и интеграционной  $E(z)$  матриц определяется формулой

$$(6) \quad \Theta(z) = \underbrace{\beta W_{y_{\text{ном}}^u}(z)}_{\text{блок 3}} \underbrace{Q(z)}_{\text{блок 2}} \underbrace{W_{y_{\text{ном}}^v}(z)\alpha}_{\text{блок 1}}$$

а в случае номинальной конфигурации  $C_{\text{вх}}^{\text{НОМ}}$ ,  $C_{\text{вых}}^{\text{НОМ}}$  и  $E_{\text{НОМ}}(z)$  принимает значение

$$(7) \quad \Theta_{\text{баз}}(z) = \underbrace{\beta W_{y,\text{НОМ}}^u(z)}_{\text{блок 3}} \underbrace{Q_{\text{НОМ}}(z)}_{\text{блок 2}} \underbrace{W_{y,\text{НОМ}}^v(z)}_{\text{блок 1}} \alpha,$$

которое будем называть *интеграционным базисом*.

Принципиальной особенностью базисной системы является присутствие двух в общем случае различных конфигурационных матриц  $Q_{\text{НОМ}}(z)$  и  $Q(z)$ , первая из которых (в блоках 1 и 3) зафиксирована выбором номинальной конфигурации, а вторая (в блоке 2) варьируется при поиске альтернативной конфигурации, эквивалентной номинальной по значению целевой функции. Выбор такой структуры обусловлен последующим использованием базисной системы.

В отличие от реальной системы, показанной на рис. 1, с ее целевой функцией (4) в базисной системе с соответствующей передаточной матрицей (6) тестовый вход  $V_{\tau}'$  при формировании тестового выхода  $Y_{\tau}''$  дважды проходит контур  $D\Omega^{-1}(z)$ .

В решаемой задаче формула (7), где номинальное значение  $Q_{\text{НОМ}}(z)$  фигурирует трижды (в каждом из блоков), играет ключевую роль. Все решения задачи интеграции КО (в полной постановке), включая полученные ранее условия допустимости конфигурации [14], формируются из интеграционного базиса (7).

## 5. Исчерпывающее решение

Результаты по условиям допустимости интерфейсных матриц [14] получены на основе последовательности решений, представленных в [10, 12, 13]. Однако в отличие от условий допустимости, имеющих вполне лаконичный вид, получить таким путем формулы для интеграционной матрицы не представилось возможным в силу громоздкости промежуточных матричных конструкций. Интуитивно ожидаемые возможности строгих сокращений этих конструкций пока не проявились.

Поэтому, преследуя, главным образом, прагматические цели, авторы выносят на суд формулировку соответствующей гипотезы и результаты исследования обеспеченных ею результатов.

*Гипотеза Букова.* Множество интеграционных матриц  $E(z)$ , обеспечивающих значение  $\Phi_{\text{треб}}(z)$  целевой функции КО, зафиксированное в его номинальной конфигурации  $Q_{\text{НОМ}}(z)$  и весовых матрицах  $\alpha$ ,  $\beta$ , а также множество интеграционных матриц  $E(z)$ , при которых передаточная матрица базисной системы  $\Theta(z)$  тождественно равна интеграционному базису  $\Theta_{\text{баз}}(z)$ , совпадают.

На формальном языке сказанное эквивалентно предположению, что нелинейное матричное основное уравнение интеграции системы “объект + КО” [14]

$$(8) \quad \beta D(zI_n - A - BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D)^{-1}G\alpha = \beta W_{y,\text{НОМ}}^v(z)\alpha$$



и линейное двустороннее матричное уравнение

$$(9) \quad \beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}} E(z) C_{\text{ВЫХ}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha = \Theta_{\text{баз}}(z),$$

получаемое приравниванием формул (6) и (7) базисной системы, имеют идентичные решения относительно матрицы  $E(z)$ , т.е. эквивалентны при любых фиксированных значениях остальных матриц.

Обоснование гипотезы дано в Приложении.

На основе этой гипотезы сформулируем теорему 1, дающую решение задачи в ее исходной постановке. Доказательство приведено в Приложении.

*Теорема 1. Если справедлива гипотеза Букова и выполнены условия теоремы 1 из [14] для интерфейсной матрицы  $C_{\text{ВХ}}$*

$$(10) \quad \overline{\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^L} \Theta_{\text{баз}}(z) = 0$$

*и интерфейсной матрицы  $C_{\text{ВЫХ}}$*

$$(11) \quad \Theta_{\text{баз}}(z) \overline{C_{\text{ВЫХ}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha^R} = 0,$$

*то множество всех возможных интеграционных матриц  $E(z)$ , соответствующих выбранной паре интерфейсных матриц  $C_{\text{ВХ}}$ ,  $C_{\text{ВЫХ}}$  и обеспечивающих значение целевой функции КО, зафиксированное в его номинальной конфигурации  $Q_{\text{НОМ}}(z)$  и весовых матрицах  $\alpha$  и  $\beta$ , определяется формулой*

$$(12) \quad \{E(z)\}_{\theta, \vartheta} = (\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}})^{\sim} \Theta_{\text{баз}}(z) (C_{\text{ВЫХ}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha)^{\sim} + \overline{\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^R} \theta + \vartheta \overline{C_{\text{ВЫХ}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha^L},$$

*где  $\theta$  и  $\vartheta$  – произвольные матрицы подходящих размеров.*

При использовании результата теоремы 1 удобно пользоваться следующими определениями:

$$\underbrace{\{E(z)\}_{\theta, \vartheta}}_{\text{Общее решение}} = \underbrace{(\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}})^{\sim} \Theta_{\text{баз}}(z) (C_{\text{ВЫХ}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha)^{\sim}}_{\text{Базовое решение}} + \underbrace{\overline{\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^R} \theta}_{\text{Вариация столбцов решения}} + \underbrace{\vartheta \overline{C_{\text{ВЫХ}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha^L}}_{\text{Вариация строк решения}}.$$

Если в частном случае номинальные и альтернативные интерфейсные матрицы совпадают, имея значения  $C_{\text{ВХ}}$  и  $C_{\text{ВЫХ}}$  соответственно, то с учетом подстановки решения в (9) и регулярности по Нейману сводного канонизатора (выполнение последнего из равенств (5)) формула (12) приводится к виду

$$\{E(z)\}_{\theta, \vartheta} = E_{\text{НОМ}}(z) + \overline{\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^R} \theta + \vartheta \overline{C_{\text{ВЫХ}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha^L},$$

совпадающему с результатом [12] с точностью до обозначений.

## 6. Решения при упрощенных условиях

Выполнение упрощенных условий [14] допустимости интерфейсных матриц  $C_{\text{ВХ}}$  и  $C_{\text{ВЫХ}}$  позволяет получить решения в виде множеств, отличающихся от (12).

*Следствие.* Если справедлива гипотеза Букова и выполнены условия следствия 1 из [14]:

$$\overline{\beta W_{y,\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^L} = 0, \quad \overline{C_{\text{ВЫХ}} W_{y,\text{НОМ}}^v(z) \alpha^R} = 0,$$

то множество возможных интеграционных матриц, соответствующих этим условиям и обеспечивающих значение целевой функции КО, зафиксированное в его номинальной конфигурации  $Q_{\text{НОМ}}(z)$  и весовых матрицах  $\alpha$  и  $\beta$ , определяется формулой

$$(13) \quad \{E(z)\}_{\theta, \vartheta} = (\beta W_{y,\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}})^R \Theta_{\text{баз}}(z) (C_{\text{ВЫХ}} W_{y,\text{НОМ}}^v(z) \alpha)^L + \\ + \overline{\beta W_{y,\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^R} \theta + \overline{\vartheta C_{\text{ВЫХ}} W_{y,\text{НОМ}}^v(z) \alpha^L},$$

где  $\theta$  и  $\vartheta$  – произвольные матрицы подходящих размеров.

Если же матричные произведения под знаками канонизации обратимы (отсутствуют левые и правые делители нуля), то формулы (12) и (13) уступают место формуле для единственного решения

$$E(z) = (\beta W_{y,\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}})^{-1} \Theta_{\text{баз}}(z) (C_{\text{ВЫХ}} W_{y,\text{НОМ}}^v(z) \alpha)^{-1}.$$

При этом равенство  $E(z) = E_{\text{НОМ}}(z)$  соответствует случаю, когда обе матрицы  $C_{\text{ВХ}}$  и  $C_{\text{ВЫХ}}$  имеют номинальные значения.

Аналогично формулируется следствие, связанное с выполнением условий следствия 2 из [14]. Справедливость таких следствий обусловлена указанным в разделе 3 свойством канонизаторов и не требует специального доказательства.

Следующая теорема 2 позволяет использовать достаточные условия теоремы 2 из [14] без опоры на сформулированную выше гипотезу. Однако получаемые при этом решения задачи являются редуцированными, т.е. упрощенными, в которых только частично учитывается структура целевой функции (4). Строгое сопоставление полных и редуцированных решений выходит за рамки данной статьи.

*Теорема 2.* Если выполнены условия теоремы 2 из [14]

$$(14) \quad \overline{BC_{\text{ВХ}}^L} BQ_{\text{НОМ}}(z)D = 0, \quad BQ_{\text{НОМ}}(z)D \overline{C_{\text{ВЫХ}}^R D} = 0,$$

то множество интеграционных матриц КО, соответствующих выбранной паре интерфейсных матриц  $C_{\text{ВХ}}$ ,  $C_{\text{ВЫХ}}$  и обеспечивающих значение целевой функции КО, зафиксированное в его номинальной конфигурации  $Q_{\text{НОМ}}(z)$  вне зависимости от весовых матриц  $\alpha$  и  $\beta$ , определяется формулой

$$(15) \quad \{E(z)\}_{\theta, \vartheta} = (BC_{\text{ВХ}})^{\sim} BQ_{\text{НОМ}}(z)D(C_{\text{ВЫХ}}D)^{\sim} + \overline{BC_{\text{ВХ}}^R} \theta + \vartheta \overline{C_{\text{ВЫХ}}^L D},$$

где  $\theta$  и  $\vartheta$  – произвольные матрицы подходящих размеров.

Доказательство теоремы и пояснение редукции приведены в Приложении. При использовании результата теоремы 2 можно пользоваться определениями

$$\underbrace{\{E(z)\}_{\theta, \vartheta}}_{\text{Общее решение}} = \underbrace{(BC_{\text{ВХ}})^{\sim} BQ_{\text{НОМ}}(z) D(C_{\text{ВЫХ}} D)^{\sim}}_{\text{Базовое решение}} +$$

$$+ \underbrace{\overline{BC_{\text{ВХ}}^R \theta}}_{\text{Вариация столбцов}} + \underbrace{\overline{\vartheta C_{\text{ВЫХ}} D^L}}_{\text{Вариация строк}}$$

по аналогии с теоремой 1. Здесь интеграционный базис (7) уступил место матрице  $BQ_{\text{НОМ}}(z)D$ . Сравнение этой матрицы с (7) показывает потерю (результат редукции) в теореме 2 учета внутренних связей интегрируемого КО как на входе, так и на выходе передаточной матрицы (3), моделирующей функционирование ИВС.

Базовое решение и структура вариаций в (12), (13) и (15) зависят от реализуемых процедур канонизации [15], но это не влияет на получаемые множества решений.

## 7. Пример

В качестве объекта для методического примера рассмотрим описанную в [14] упрощенную модель продольного движения самолета

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,\tau+1} \\ x_{2,\tau+1} \\ x_{3,\tau+1} \end{bmatrix}}_{x_{\tau+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,\tau} \\ x_{2,\tau} \\ x_{3,\tau} \end{bmatrix}}_{x_\tau} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,\tau} \\ u_{2,\tau} \end{bmatrix}}_{u_\tau} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & 0 & g_2 \\ 0 & g_3 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} v_{1,\tau} \\ v_{2,\tau} \\ v_{3,\tau} \end{bmatrix}}_{v_\tau},$$

где  $x_1$  – приращение угла атаки,  $x_2$  – угловая скорость тангажа,  $x_3$  – приращение угла тангажа,  $u_1$  – приращение угла отклонения стабилизатора,  $u_2$  – приращение угла отклонения переднего горизонтального оперения,  $v_1, v_2, v_3$  – внешние воздействия (различные комбинации возмущений нормальной силы, продольного момента и сдвига ветра),  $a_i, b_i$  и  $g_i$  – известные параметры модели, отличные от нуля.

Выходом объекта является вектор  $y_\tau$ , определяемый формулой

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1,\tau} \\ y_{2,\tau} \\ y_{3,\tau} \\ y_{4,\tau} \\ y_{5,\tau} \end{bmatrix}}_{y_\tau} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,\tau} \\ x_{2,\tau} \\ x_{3,\tau} \end{bmatrix}}_{x_\tau} = \begin{bmatrix} x_{1,\tau} \\ x_{2,\tau} \\ x_{2,\tau} \\ x_{3,\tau} \\ x_{3,\tau} - x_{1,\tau} \end{bmatrix},$$

где  $y_1$  – сигнал датчика угла атаки,  $y_2$  – сигнал датчика угловой скорости тангажа,  $y_3$  – сигнал угловой скорости тангажа комплексной навигационной

**Таблица 1.** Синтез интеграционной матрицы  $E(z)$  по формуле (12) теоремы 1

№	Интерфейсная матрица $C_{\text{ВЫХ}}$	Базовое решение	Вариация строк	
			матричный коэффициент	значение $\vartheta$ для совпадения с решением [14]
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} \end{bmatrix}$	0	0
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$	$[0 \quad -1 \quad 1]$	$\frac{a^{*k}-a_4}{-2b_1}$
3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{a_2b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{z-1}{-a_2} & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{a^{*k}-a_4}{b_1}$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{a_2b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{z-1}{-a_2} & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{a^{*k}-a_4}{b_1}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{b_1(z-1)} & 0 & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_2}{z-1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{*k}-a_4}{2b_1} \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{b_1(z-1)} & 0 & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	0	0
7	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{a_2b_1} & \frac{(a^{*k}-a_4)(z-1)}{a_2b_1} \end{bmatrix}$	0	0
8	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{b_1(z-1)} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	0	0
9	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{b_1(z-1)} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	0	0
10	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{(a^{*k}-a_4)z-a_\Sigma}{b_1(z-1)} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$[1 \quad -1 \quad 0]$	0
Ошибочное решение			Значение целевой функции	
11*	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{(a^{*k}-a_4)(z-a_1)+a_2a_3}{b_1(z-a_1)} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a_3g_1}{(z-a_4)(z-a^{*k})} & \frac{g_3}{z-a^{*k}} \end{bmatrix}$	
12*	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{(a^{*k}-a_4)(z-a_1)+a_2a_3}{b_1(z-a_1)} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a_3g_1}{(z-a_4)(z-a^{*k})} & \frac{g_3}{z-a^{*k}} \end{bmatrix}$	
13*	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{(a^{*k}-a_4)(z-a_1)+a_2a_3}{b_1(z-a_1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a_3g_1}{(z-a_1)(z-a^{*k})} & \frac{g_3}{z-a^{*k}} \end{bmatrix}$	
14*	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{g_3}{z-a_4} \end{bmatrix}$	

\*В соответствии с [14] условия допустимости конфигурации не выполнены.

**Таблица 2.** Синтез интеграционной матрицы  $E(z)$  по формуле (15) теоремы 2

№	Интерфейсная матрица $C_{\text{вых}}$	Базовое решение	Вариация строк	
			матричный коэффициент	значение $\vartheta$ для совпадения с решением [14]
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} \end{bmatrix}$	0	0
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$	$[0 \quad -1 \quad 1]$	$\frac{a^{*k}-a_4}{-2b_1}$
3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	0	0
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	0	0
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$[1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$	$\frac{a^{*k}-a_4}{2b_1}$
Ошибочное решение			Значение целевой функции	
6*	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$	$[0 \quad \frac{g_3}{z-a_4}]$	
7*	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$	$[0 \quad \frac{g_3}{z-a_4}]$	
8*	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$[0 \quad \frac{g_3(z-1)}{(z-a^{*k})(z-1)+a_2a_3}]$	
9*	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$[0 \quad \frac{g_3(z-1)}{(z-a^{*k})(z-1)+a_2a_3}]$	
10*	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	$[0 \quad \frac{g_3(z-1)}{(z-a^{*k})(z-1)+a_2a_3}]$	
11*	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$	$[\frac{a_3g_1}{(z-a_1)(z-a^{*k})-a_2a_3} \quad \frac{g_1(z-a_1)}{(z-a_1)(z-a^{*k})-a_2a_3}]$	
12*	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$	$[\frac{a_3g_1}{(z-a_1)(z-a^{*k})-a_2a_3} \quad \frac{g_1(z-a_1)}{(z-a_1)(z-a^{*k})-a_2a_3}]$	
13*	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{*k}-a_4}{b_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[\frac{a_3g_1}{(z-a_1)(z-a^{*k})-a_2a_3} \quad \frac{g_3(z-a_1)}{(z-a_1)(z-a^{*k})-a_2a_3}]$	
14*	$[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$	$[\frac{-a_3}{b_1}]$	$[0 \quad \frac{g_3}{z-a_4}]$	

\*В соответствии с [14] достаточные условия допустимости конфигурации не выполнены.

системы (КНС),  $y_4$  – сигнал угла тангажа КНС и  $y_5$  – сигнал угла наклона траектории КНС.

Задачей управления является обеспечение целевой функции, т.е. желаемой передаточной матрицы от воздействий  $v_1$  и  $v_2$  к угловой скорости тангажа  $x_2 = y_2$ :

$$(16) \quad \Phi_{\text{треб}}(z) = [w_{y_2}^{v_1}(z) \quad w_{y_2}^{v_2}(z)] = \left[ 0 \quad \frac{g_3}{z - a^{\text{ж}}} \right],$$

где  $a^{\text{ж}}$  – параметр, характеризующий желаемые динамические свойства самолета. При этом матрицы  $\alpha$  и  $\beta$  имеют значения

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Варианты номинальной конфигурации КО определяются значениями матрицы  $Q_{\text{ном}}(z)$ , выбор которой осуществляется разработчиком (интегратором) КО. Как показано в [14], такая матрица, обеспечивающая значение (16) целевой функции при указанных  $\alpha$  и  $\beta$ , может быть, но не обязательно, статической (без оператора  $z$ ):

$$(17) \quad Q_{\text{ном}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{C_{\text{ном}}^{\text{вх}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{\text{ж}} - a_4}{b_1} \end{bmatrix}}_{E_{\text{ном}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\text{ном}}^{\text{вых}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{\text{ж}} - a_4}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом примере имеют место матричные конструкции:

$$BQ_{\text{ном}}D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{\text{ж}} - a_4}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & a^{\text{ж}} - a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega(z) = zI_3 - A - BQ_{\text{ном}}D = \begin{bmatrix} z - a_1 & -a_2 & 0 \\ 0 & z - a^{\text{ж}} & 0 \\ 0 & -a_2 & z - 1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z - a_1} & \frac{a_2}{(z - a_1)(z - a^{жк})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - a^{жк}} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{(z - a^{жк})(z - 1)} & \frac{1}{z - 1} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с развиваемым подходом альтернативные конфигурации КО порождаются выбором альтернативных значений интерфейсных матриц  $C_{\text{вх}}$  и  $C_{\text{вых}}$ .

Поскольку множество возможных (допустимых) матриц  $C_{\text{вх}}$  ограничено тремя вариантами, не приводящими к интересному разнообразию решений [14], ограничимся рассмотрением только номинального значения  $C_{\text{вх}}^{\text{ном}}$  в соответствии с (17).

По аналогии с [14] все решения по теореме 1 для фиксированной интерфейсной матрицы  $C_{\text{вх}}^{\text{ном}}$  и различных интерфейсных матриц  $C_{\text{вых}}$  (помимо  $C_{\text{вых}}^{\text{ном}}$ ) сведены в табл. 1, где использовано дополнительное обозначение  $a_{\Sigma} = a^{жк} + a_2 a_3 - a_4$ . В правом столбце таблицы указано значение произвольного сомножителя  $\vartheta$ , подстановка которого в слагаемое “Вариация строк решения” формулы (12) дает решение, совпадающее с показанным в [14] решением, полученным ранее путем подбора.

В табл. 2 аналогично представлены решения по теореме 2.

В обеих таблицах для вариантов, которым соответствует выполнение условий допустимости конфигурации, решение дает желаемый результат в смысле значения целевой функции (16). В то же время для вариантов с невыполнением условий допустимости формулы (12) и (15) дают решения, которые не обеспечивают  $\Phi_{\text{треб}}(z)$  (варианты 11–14 табл. 1, а также варианты 6–14 табл. 2).

Рассмотрим детально использование только теоремы 1 и только для одного из варьируемых значений матрицы  $C_{\text{вых}}$ .

Матричные конструкции, входящие в (12), имеют вид

$$\underbrace{\beta W_{y,\text{ном}}^u(z)}_{\text{Блок 3}} = \underbrace{[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]}_{\beta} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \times \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{z - a_1} & \frac{a_2}{(z - a_1)(z - a^{жк})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - a^{жк}} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{(z - a^{жк})(z - 1)} & \frac{1}{z - 1} \end{bmatrix}}_{\Omega^{-1}(z)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{z - a^{жк}} & \frac{b_2}{z - a^{жк}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{W_{y.\text{НОМ}}^v(z)\alpha}_{\text{Блок 1}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{z-a_1} & \frac{a_2}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-a^{\text{ж}}} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{(z-a^{\text{ж}})(z-1)} & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix}}_{\Omega^{-1}(z)} \times \\
&\times \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & 0 & g_2 \\ 0 & g_3 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{z-a_1} & \frac{a_2 g_3}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})} \\ 0 & \frac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \frac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \frac{a_2 g_3}{(z-a^{\text{ж}})(z-1)} \\ \frac{-g_1}{z-a_1} & \frac{a_2 g_3(1-a_1)}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})(z-1)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Интеграционный базис (7) не зависит от выбора интерфейсных матриц  $C_{\text{ВХ}}$ ,  $C_{\text{ВЫХ}}$  и имеет значение

$$\begin{aligned}
\Theta_{\text{баз}}(z) &= \underbrace{\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z)}_{\text{блок 3}} \underbrace{Q_{\text{НОМ}}(z)}_{\text{блок 2}} \underbrace{W_{y.\text{НОМ}}^v(z)\alpha}_{\text{блок 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_1}{z-a^{\text{ж}}} & \frac{b_2}{z-a^{\text{ж}}} \end{bmatrix}}_{\text{блок 3}} \times \\
&\times \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{\text{ж}}-a_4}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{блок 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{g_1}{z-a_1} & \frac{a_2 g_3}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})} \\ 0 & \frac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \frac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \frac{a_2 g_3}{(z-a^{\text{ж}})(z-1)} \\ \frac{-g_1}{z-a_1} & \frac{a_2 g_3(1-a_1)}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})(z-1)} \end{bmatrix}}_{\text{блок 1}} = \\
&= \left[ \frac{-a_3 g_1}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})} \quad \frac{g_3((a^{\text{ж}}-a_4)z-a_\Sigma)}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})^2} \right].
\end{aligned}$$

Использование результатов примера из [14] избавляет от необходимости проверять здесь допустимость конфигурации КО и позволяет сразу перейти к синтезу решения.

Номинальное значение интерфейсной матрицы  $C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}}$ , допустимое по определению, с учетом свойств сводного канонизатора, приведенных в разделе 3,



используется при вычислении одного из канонизаторов формулы (12):

$$(18) \quad \begin{aligned} \beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ z - a^{\text{ж}} & z - a^{\text{ж}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{b_1}{z - a^{\text{ж}}}, \\ (\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}})^{\sim} &= (\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}})^{-1} = \frac{z - a^{\text{ж}}}{b_1}. \end{aligned}$$

Здесь в частном случае канонизатор, получаемый обращением скаляра, имеет единственное значение.

В случае выбора из числа допустимых конфигураций, имеющих в [14], варианта интерфейсной матрицы  $C_{\text{ВЫХ}}$ , представленной как

$$C_{\text{ВЫХ3}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

вычисление другого канонизатора приводит к результату (возможны другие значения, но на общее решение это не влияет, см. комментарий в конце раздела 6):

$$(19) \quad \begin{aligned} C_{\text{ВЫХ3}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{g_3}{z - a^{\text{ж}}} \\ 0 & \frac{a_2 g_3}{(z - a^{\text{ж}})(z - 1)} \\ \frac{-g_1}{z - a_1} & \frac{a_2 g_3 (1 - a_1)}{(z - a_1)(z - a^{\text{ж}})(z - 1)} \end{bmatrix}, \\ (C_{\text{ВЫХ3}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha)^{\sim} &= (C_{\text{ВЫХ3}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha)^L = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 - a_1}{g_1} & \frac{z - a_1}{-g_1} \\ 0 & \frac{(z - a^{\text{ж}})(z - 1)}{a_2 g_3} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Базовое решение, относящееся к данной паре интерфейсных матриц  $C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}}$ ,  $C_{\text{ВЫХ3}}$  и обусловленное результатами канонизации (18) и (19), принимает значение

$$\begin{aligned} &\underbrace{(\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}})^{\sim} \Theta_{\text{баз}}(z) (C_{\text{ВЫХ3}} W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha)^{\sim}}_{\text{Базовое решение}} = \\ &= \frac{z - a^{\text{ж}}}{b_1} \left[ \frac{-a_3 g_1}{(z - a_1)(z - a^{\text{ж}})} \quad \frac{g_3 ((a^{\text{ж}} - a_4)z - a_{\Sigma})}{(z - a_1)(z - a^{\text{ж}})^2} \right] \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 - a_1}{g_1} & \frac{z - a_1}{-g_1} \\ 0 & \frac{(z - a^{\text{ж}})(z - 1)}{a_2 g_3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(a^{\text{ж}} - a_4)z - a_{\Sigma}}{b_1(z - 1)} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Выражения для вариаций столбцов и строк общего решения (12) определяются формулами

$$\underbrace{\vartheta \overline{W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}}}}^R \theta = 0, \quad \text{поскольку} \quad \overline{\beta W_{y.\text{НОМ}}^u(z) C_{\text{ВХ}}^{\text{НОМ}}}^R = \frac{\overline{b_1}}{z - a^{\text{ж}}} = 0,$$

Вариация столбцов решения

$$\underbrace{\vartheta \overline{C_{\text{ВЫХ}}^v W_{y.\text{НОМ}}^v(z) \alpha}}^L = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & \frac{g_3}{z - a^{\text{ж}}} \\ 0 & \frac{a_2 g_3}{(z - a^{\text{ж}})(z - 1)} \\ \frac{-g_1}{z - a_1} & \frac{a_2 g_3 (1 - a_1)}{(z - a_1)(z - a^{\text{ж}})(z - 1)} \end{bmatrix}^L = \vartheta \begin{bmatrix} 1 & \frac{z - 1}{-a_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Вариация строк решения

Анализ таблиц демонстрирует существование двух семейств решений задачи интеграции КО: единственное решение и множество эквивалентных решений.

Кратко физический смысл различных решений можно пояснить следующим образом. Размеры и структура матрицы  $C_{\text{ВЫХ}}$  задают используемые выходы датчиков (столбцы) и каналы обработки информации в ИВС (строки). Из анализа таблиц следует, что для существования решения в полной и редуцированной постановках необходимо использовать как минимум два канала обработки, а также:

либо сигналы угла атаки  $y_{1,\tau}$  и угловой скорости тангажа  $y_{2,\tau}$  и/или  $y_{3,\tau}$ ,

либо сигналы угловой скорости тангажа  $y_{2,\tau}$  и/или  $y_{3,\tau}$ , угла тангажа  $y_{4,\tau}$  и угла наклона траектории  $y_{5,\tau}$ .

Это согласуется с опытом построения контуров управления движением самолетов.

При этом в полной постановке (табл. 1) существуют дополнительные решения при использовании

либо сигналов угла атаки  $y_{1,\tau}$  с сигналом угла тангажа  $y_{4,\tau}$  или угла наклона траектории  $y_{5,\tau}$ ,

либо сигнала угловой скорости тангажа  $y_{2,\tau}$  или  $y_{3,\tau}$  с сигналом угла наклона траектории  $y_{5,\tau}$ .

Такое положение объясняется возможностями дополнительной функциональной обработки сигналов датчиков со сдвигом вперед (аналог дифференцирования) в вариантах 3, 4 и со сдвигом назад (аналог интегрирования) в варианте 5.

Множества эквивалентных решений возникают при возможности простого комбинирования сигналов измерителей (варианты 2 и 10 табл. 1, варианты 2 и 5 табл. 2) либо комбинирования в сочетании с функциональной обработкой (варианты 3–5 табл. 1).

Другие из рассмотренных комбинаций датчиков не приводят к достижению цели.

## 8. Заключение

Для практически важной ситуации, когда конфигурация КО, формализуемая интерфейсными матрицами  $C_{\text{вх}}$  и  $C_{\text{вых}}$ , изменяется по каким-либо соображениям и удовлетворены условия допустимости этих матриц [14], получены формульные выражения для полного и усеченных множеств интеграционных матриц (правил обработки сигналов межкомпонентных связей)  $\{E(z)\}_{\theta, \vartheta}$ , при которых целевая функция КО принимает предварительно заданное значение  $\Phi_{\text{треб}}(z)$ , зафиксированное номинальной конфигурацией КО и весовыми матрицами  $\alpha, \beta$ . При этом варьирование  $E(z)$  путем выбора входящих в решение матриц  $\theta$  и  $\vartheta$  не влияет на значение целевой функции и позволяет удовлетворять дополнительные требования к КО.

Основной результат базируется на принятой гипотезе об эквивалентности относительно искомой интеграционной матрицы  $E(z)$  синтезируемой системы “объект + КО” и специально введенной базисной системы.

Методический пример на представительном множестве возможных конфигураций подтверждает эффективность полученного решения и иллюстрирует его разнообразность. В том числе показано, что при невыполнении условий допустимости конфигурации результат использования соответствующих формул ошибочен.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Обоснование гипотезы.* В соответствии с [14] необходимым и достаточным условием разрешимости основного уравнения (8) избыточного КО относительно матрицы  $E(z)$  является выполнение двух равенств (10) и (11), которые по своей структуре аналогичны условиям разрешимости двустороннего линейного матричного уравнения для неизвестной матрицы  $E(z)$  (теорема 1.6 из [15]) при условии, что это уравнение имеет вид (9).

Строгое совпадение условий разрешимости основного уравнения интеграции (8) для синтезируемой системы и уравнения (9) для базисной системы явилось поводом для отождествления и их решений.

Важным обстоятельством в базисной системе (6) в контексте решаемой задачи является то, что блок 2 с линейно входящей передаточной матрицей  $Q(z)$  справа и слева взаимодействует с блоками, представляющими выходы и входы компонентов КО, функционирующих в замкнутой системе “объект + КО” при номинальной конфигурации под действием тестовых входов. Это сулит полноту учета влияния на конфигурационную матрицу в блоке 2 внутренних связей замкнутой системы, моделируемых блоками 1 и 3 в тестовых условиях и номинальной конфигурации.

Сказанное соответствует выполнению равенства (9) и заключено в сформулированной гипотезе.

*Доказательство теоремы 1.* Опираясь на гипотезу, вместо решения основного уравнения интеграции системы (8), которое должно было бы дать решение сформулированной задачи, будем решать уравнение (9). В соответствии с теоремой 1.7 из [15] все множество решений линейного двустороннего

уравнения (9) при выполнении условий его разрешимости (10) и (11) определяется формулой (12). Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Доказательство базируется на редукции (упрощении) решения поставленной задачи, заключающейся в том, что вместо целевой функции (4) с присущими ей структурными особенностями [14] рассматривается только ее знаменатель. Очевидно, что при справедливости равенства

$$BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D = BQ_{\text{ном}}(z)D$$

этот знаменатель остается неизменным при варьировании  $E(z)$  и, как следствие, значение целевой функции заведомо сохраняется при любых фиксированных сомножителях (числителях)  $\beta D$  слева и  $G\alpha$  справа.

При удовлетворении условий (14) записанное линейное двустороннее уравнение разрешимо (теорема 1.6 из [15]) относительно матрицы  $E(z)$ , а все множество решений (теорема 1.7 из [15]) определяется формулой (15). Теорема 2 доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефанов Д.Е.* Аналитическая реконфигурация системы управления полетом воздушного судна с сохранением заданных характеристик устойчивости // *Машиностроение: сетевой электрон. научн. журн.* 2017. Т. 5. № 1. С. 23–34.
2. *Павлов А.Н.* Постановка и возможные пути решения задач структурно-функциональной реконфигурации сложных объектов // XII Всеросс. сов. по проблемам управления ВСПУ-2014. М.: Изд-во ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 7648–7655.
3. *Федухин А.В., Муха А.А.* Имитационное моделирование отказоустойчивой резервированной двухканальной системы в интегрированной инструментальной среде MatLAB Simulink // *Математические машины и системы.* 2011. Т. 1. № 2. С. 178–181.
4. *Лысенко А.В., Кремез Г.В.* Многопроцессорная перестраиваемая бортовая вычислительная система с блоком управления реконфигурацией // *Современные проблемы науки и образования.* 2012. № 4. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6787>
5. *Мануйлов Ю.С., Павлов А.Н., Павлов Д.А.* Методика прогнозирования структурной устойчивости функционирования автоматизированных систем управления космическими аппаратами // *Тр. Военно-косм. акад. им. А.Ф. Можайского.* 2013. № 640. С. 123–128.
6. *Каляев И.А., Мельник Э.В.* Реконфигурируемые информационно-управляющие системы // *Матер. пленар. засед. 5-й Российской мультikonф. по проблемам управления.* СПб.: Изд. ЦНИИ «Электроприбор», 2012. С. 36–37.
7. *Sollock P.* Reconfigurable Redundancy – The Novel Concept Behind the World’s First Two-Fault-Tolerant Integrated Avionics System // *Avionics, Navigation and Instrumentation.* P. 243–246. URL: [https://www.nasa.gov/centres/johnson/pdf/584731main\\_Wings-ch4e-pgs242-255.pdf](https://www.nasa.gov/centres/johnson/pdf/584731main_Wings-ch4e-pgs242-255.pdf)
8. *Zhang Y., Jiang J.* Bibliographical Review on Reconfigurable Fault-tolerant Control Systems // *Ann. Rev. Control.* 2008. No. 32. P. 229–252.

9. *Агеев А.М., Бронников А.М., Буков В.Н., Гамаюнов И.Ф.* Супервизорный метод управления технических систем с избыточностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 72–82.  
*Ageev A.M., Bronnikov A.M., Bukov V.N., Gamaunov I.F.* Supervisory Control Method for Redundant Technical Systems // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. V. 56. No. 3. P. 410–419.
10. *Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф.* Аналитический подход к формированию конфигураций технических систем // АиТ. 2017. № 9. С. 67–83.  
*Bukov V.N., Bronnikov A.M., Ageev A.M., Gamaunov I.F.* An Analytic Approach to Constructing Configurations of Technical Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1600–1613.
11. *Буков В.Н., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф., Шурман В.А.* Архитектурный облик комплексов бортового оборудования воздушных судов с позиции реализации функции необслуживаемости // Мехатроника, автоматика и робототехника: Матер. междунар. науч.-практ. конф. 2018. № 2. С. 206–210.
12. *Гамаюнов И.Ф.* Генерирование альтернативных решений в задаче управления избыточностью технических комплексов // АиТ. 2018. № 4. С. 92–104.  
*Gamaunov I.F.* Generation of Alternative Solutions in the Redundancy Management Problem for Hardware Complexes // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 4. P. 655–664.
13. *Агеев А.М.* Конфигурирование избыточных комплексов бортового оборудования на основе аппарата передаточных матриц // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 175–192.  
*Ageev A.M.* Configuring of Excessive Onboard Equipment Sets // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2018. V. 57. No. 4. P. 640–654.
14. *Буков В.Н., Бронников А.М.* Тестирование конфигураций избыточных интегрированных комплексов оборудования // АиТ. 2019. № 2. С. 81–100.  
*Bukov V.N., Bronnikov A.M.* Testing the Configurations of Redundant Integrated Equipment Complexes // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 262–277.
15. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит-ры. Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.*

Поступила в редакцию 10.09.2017

После доработки 15.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018