Автоматика и телемеханика, № 4, 2019

© 2019 г. **А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (e-mail agolubin@hse.ru)**
(Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва;
Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово Московской обл.),
В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (e-mail info@ditc.ras.ru)
(Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово Московской обл.)

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ СТРАХОВАНИЯ В МОДЕЛИ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА ПРИ ВЕРОЯТНОСТНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА ВЕЛИЧИНУ ФИНАЛЬНОГО КАПИТАЛА[1]

Решена задача оптимального управления риском в статической модели выбором стратегии страхования рисков клиентов, где целевым функционалом является так называемый функционал полезности Марковица, т.е. функционал, зависящий только от среднего значения и стандартного отклонения финального капитала страховщика после заключения страховой сделки. Интересы страховщика учтены введением вероятностного или, точнее, квантильного ограничения (value at risk constraint) на финальный капитал страховщика, где использовано нормальное распределение для моделирования распределения суммарного ущерба. Дополнительно наложено ограничение с вероятностью единица на принимаемый им риск от отдельного страхователя. Оптимальным с точки зрения страховщика оказывается так называемое stop loss страхование. В явной форме найдены условия отказа от страховой сделки. Приведен пример, иллюстрирующий доказанные результаты в случае экспоненциального распределения страховой выплаты.

Ключевые слова: оптимальное страхование, квантильное ограничение, функционал полезности типа Марковица.

DOI: 10.1134/S0005231019040081

1. Введение

Объектом исследования в данной статье является так называемая модель индивидуального риска (или статическая модель страхования), описанная, например, в [1], где предусмотрена возможность выбора страховщиком функции дележа риска между ним и каждым страхователем. Критерием оптимальности страховщика служит широко известный в финансовой математике функционал полезности Марковица, а ограничения на допустимые функции дележа (стратегии страхования) выражаются в следующем: желание иметь превышение капитала выше заданного уровня отражено в установлении нижней границы на вероятность этого события (так называемое квантильное или

[1] Работа поддержана Госзаданием 0071-2019-0001 и Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 18-07-00085а).

VaR ограничение); желание страховщика не иметь “больших” значений риска с вероятностью единица в сделке с отдельным клиентом отражено введением дополнительного ограничения сверху на его ущерб после сделки.

Публикацией, заложившей основы теории дележа риска в страховании, была статья Эрроу [2], где было показано, что при использовании принципа среднего значения для начисления премии оптимальным с точки зрения страхователя является дележ формы франшиза. В [3] были найдены Парето-оптимальные дележи между страховщиком и единственным страхователем и показано, в частности, что максимизация полезности приводит к stop loss дележу, если решение о выборе функции дележа принимает страховщик, и к страхованию с франшизой, если выбирающей стороной является страхователь. В близкой постановке эти результаты были модифицированы на случай принципа среднего значения для вычисления премии в [4].

В [5] были представлены условия на стоимость страхования, при которых оптимальными оказывались различные типы дележей страхования, такие как франшиза, сострахование и др. Исследование влияния различных типов функции полезности на уровень франшизы при ограничении сверху на риск страховщика проведено в [6]. Одновременный выбор стратегий страхования и перестрахования изучен в [7], где целевым функционалом была ожидаемая полезность финального капитала страховщика. Популярным направлением исследований в последние годы в статических моделях стал поиск оптимальных дележей риска при так называемом “Value at Risk” ограничении, которое означает установление нижней границы на вероятность падения капитала ниже заданного уровня (см.. например, [8]). Но, как было показано, например, в [9], учет этого ограничения ведет к тому, что оптимальные стратегии страхования оказываются разрывными функциями. Это означает наличие стимула к искажению действительного значения ущерба (moral hazard), что неприемлемо в страховой практике на развитых рынках. В [10] было предложено использовать в качестве допустимых функций дележа только неубывающие функции. В [11] авторы усилили это ограничение и дополнительно предположили выпуклость функций, что исключило из рассмотрения часто используемые в страховой практике stop loss дележи (см., например, [6, 7]). Чтобы преодолеть эту трудность, в [12] было рассмотрено другое множество допустимых дележей, где функции предполагаются возрастающими и вогнутыми. Однако такое ограничение игнорирует дележи с франшизой, которые также широко распространены в страховании.

В отличие от упомянутых исследований, в настоящей статье с наложенным VaR ограничением нет apriori предположений на вид функций дележа (возрастание, вогнутость/выпуклость). Такой анализ стал возможным при использовании нормальной модели суммарного риска страховщика. С точки зрения выбора целевого функционала близкая по постановке задача была исследована в [13] при различных способах начисления премии, основанных на среднем значении и дисперсии передаваемого риска. Но там инструментом управления риском было перестрахование суммарного риска страховщика, а не страхование индивидуальных ущербов клиентов и не было введено VaR ограничение на финальный капитал страховщика. Аналогичные по формулировке задачи изучались в рамках теории формирования оптимальных инвестиционных портфелей (см., например, [14]), но в качестве инструмента управления риском использовались пропорции начального капитала, вкладываемые в различные активы или, другими словами, – лишь линейные функции дележа риска. Отметим также, что в настоящей статье, в отличие от задач с целевым функционалом типа ожидаемой полезности капитала страховщика [6, 7, 9], впервые детально исследована ситуация полного отказа страховщика от сделки. Необходимые и достаточные условия наличия этого эффекта найдены в явном виде именно в данной статье.

2. Формальное описание модели

Рассматривается модель страхового рынка, состоящего из страховщика и n клиентов. Потенциальные ущербы (риски) клиентов – независимые неотрицательные случайные величины X_j, $j = 1\ldots,n$, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. В дальнейшем эта группа клиентов предполагается однородной: все X_j имеют одинаковое распределение $F_1(x) \overset{def}{=} P\{X_1 \leqslant x\}$, причем математическое ожидание X_1^2 конечно: $\mathrm{E}X_1^2 < \infty$. Отметим характерную особенность функции распределения $F_1(x)$, а именно скачок в нуле: $F_1(0) \in (0,1)$ – вероятность отсутствия страхового случая для клиента предполагается ненулевой и, конечно, не равной единице. Страховщик выбирает функцию дележа страхования $I(x)$ из класса борелевских функций, определенных на $[0,\infty)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant I(x) \leqslant x$, которые означают, что возмещение не может быть отрицательным и не может превосходить величины ущерба. Случайная величина (с.в.) $I(X_j)$ есть возмещаемая j-му клиенту часть ущерба, а суммарный риск страховщика $X^I = \sum_{j=1}^n I(X_j)$.

Наложим дополнительные ограничения на дележи $I(x)$, которые отражали бы желание страховщика защититься от больших потерь:

(i) риск страховщика после страхования клиента $I(X_1) \leqslant q$ почти наверное (п.н.);

(ii) вероятность превышения капитала страховщика $S^I \overset{def}{=} w + nP - X^I$ над заданным уровнем a удовлетворяет неравенству

$$P\left\{S^I \geqslant a\right\} \geqslant \beta. \tag{1}$$

Здесь w – собственный капитал страховщика, q и a – заданные положительные константы, уровень доверия предполагается достаточно высоким $\beta \in (0{,}5; 1)$, а страховая премия P вычисляется по формуле среднего значения, известного в актуарной литературе (см., например, [1]): $P = (1+\alpha)\mathrm{E}I(X_1)$, где $\alpha > 0$ – заданный коэффициент нагрузки страховщика.

Максимизируемым функционалом является функционал полезности типа Марковица, а именно функционал, линейно зависящий от среднего значения и стандартного отклонения финального капитала страховщика S^I. Таким образом, исследуемая задача имеет вид

$$J[I] \equiv \mathrm{E}S^I - \theta\sqrt{\mathrm{D}S^I} \to \max, \tag{2}$$

при ограничении $0 \leqslant I(x) \leqslant x \wedge q$, где $x \wedge q \overset{def}{=} \min\{x, q\}$, и ограничении (1). Здесь $\mathrm{D}S^I$ – дисперсия финального капитала S^I, $\theta > 0$ – заданный "коэффициент осторожности" страховщика, который желает уменьшить стандартное отклонение своего финального капитала. Увеличение θ означает уменьшение меры как положительных, так и отрицательных отклонений S^I от среднего значения, в то время как увеличение константы a в ограничении (1) означает повышение нижнего уровня значений S^I с вероятностью β. Считая численность группы страхователей n достаточно большой (не менее нескольких десятков) и $n(1 - F_1(0)) > 10$, приме́ним достаточно широко используемую в актуарной математике нормальную модель для аппроксимации распределения суммарного риска $X^I = \sum_{j=1}^n I(X_j)$ (см., например, [1, 14]). Тогда ограничение (1) переписывается как

$$P\left\{\frac{S^I - \mathrm{E}S^I}{\sigma(S^I)} \geqslant \frac{a - \mathrm{E}S^I}{\sigma(S^I)}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mathrm{E}S^I}{\sigma(S^I)}\right) \geqslant \beta,$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, а $\sigma(S^I) = \sqrt{\mathrm{D}S^I}$ – стандартное отклонение капитала страховщика. Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\mathrm{E}S^I - a - x_\beta^N \sigma(S^I) \geqslant 0,$$

здесь x_β^N – квантиль уровня β стандартного нормального распределения. В результате (2) преобразуется в задачу

$$J[I] \equiv w + \alpha n \mathrm{E}I(X_1) - \theta\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{D}I(X_1)} \to \max \tag{3}$$

$$\text{при ограничении} \quad I \in A, \text{ т.е.}$$

$$0 \leqslant I(x) \leqslant x \wedge q \quad \text{и} \tag{4}$$

$$w + \alpha n \mathrm{E}I(X_1) - a - x_\beta^N \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{D}I(X_1)} \geqslant 0. \tag{5}$$

Отметим схожесть выражения для целевого функционала (3) и левой части квантильного ограничения (5). Дело в том, что таким ограничение (1) делает именно использование нормальной аппроксимации для капитала $S^I = w + nP - X^I$ страховщика после сделки (см. также [8]). Известно, что квантиль нормального распределения выражается через квантиль стандартного нормального распределения как $x_\beta = x_\beta^N \sigma(S^I) + \mathrm{E}S^I$ — функция, линейно зависящая лишь от среднего значения и стандартного отклонения с.в. S^I. Использование, например, в качестве аппроксимации гамма-распределения [1] дало бы соотношение, совершенно отличное от (5) и менее удобное для анализа.

3. Основные результаты

Для анализа задачи (3)–(5) далее понадобится определение [15, гл. 3, с. 119]: Функционал $J[I]$, определенный на выпуклом множестве, называется сильно квазивогнутым, если для любых I_1 и $I_2 \in A$, $I_1 \neq I_2$, и любого $\rho \in (0, 1)$ выполнено неравенство $J[\rho I_2 + (1 - \rho) I_1] > \min\{J[I_1], J[I_2]\}$. Здесь соотношение $I_1 \neq I_2$ понимается как $P\{I_1(X_1) \neq I_2(X_1)\} > 0$.

Лемма. Целевой функционал $J[I]$ в (3) является сильно квазивогнутым.

Доказательство. Обозначим через $I_\rho = \rho I_2 + (1-\rho)I_1$ и вычислим производную

$$\frac{d}{d\rho} J\left[I_\rho\right] = \alpha n \mathrm{E}[I_2 - I_1] + \phi(\rho)\psi(\rho),$$

где

$$\phi(\rho) = \theta\sqrt{n}/\sqrt{\mathrm{D}I_\rho} > 0,$$

$$\psi(\rho) = -\left\{\rho \mathrm{D}I_2 - (1-\rho)\mathrm{D}I_1 + (1-2\rho)\mathrm{E}[I_2 - \mathrm{E}I_2][I_1 - \mathrm{E}I_1]\right\}.$$

Здесь для удобства использованы обозначения I_1 и I_2 для с.в. $I_1(X_1)$ и $I_2(X_1)$ соответственно. Покажем, что $\psi(\rho)$ убывает на интервале $(0,1)$. Действительно, $\psi'(\rho) = -2\mathrm{D}(I_2 - I_1) < 0$. Последнее неравенство выполняется строго. Действительно, если $I_2(X_1) = I_1(X_1) + \mathrm{const}$ п.н., то I_1 и I_2 не могут одновременно быть допустимыми дележами, удовлетворяющими неравенствам $0 \leqslant I_j(x) \leqslant x,\ j = 1,2$ на промежутке $[0,\infty)$, поскольку по предположению $F_1(0) = P\{X_1 = 0\} > 0$. Таким образом, функция $J\left[I_\rho\right]$ "похожа" на строго вогнутую функцию: от точки $\rho = 0$ она возрастает до некоторой точки b, где $\psi(\rho)$ меняет знак с плюса на минус, а затем убывает до точки $\rho = 1$ (отрезок $[0,b]$ или $[b,1]$ может стягиваться в точку). Таким образом,

$$J[\rho I_2 + (1-\rho)I_1] > \min\{J[I_1], J[I_2]\} \quad \text{на} \quad (0,1).$$

Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что лемма, как следует из [15], гарантирует выпуклость множества A допустимых дележей в задаче (3)–(5) (поскольку функционал в ограничении (5) аналогичен целевому функционалу в (3)) и единственность решения задачи, если оно существует.

Докажем теперь утверждение о непустоте множества A допустимых дележей и выполнении условия Слейтера (его определение дано, например, в [15]). Для этого рассмотрим задачу максимизации функционала в ограничении (5)

$$J_0[I] \equiv w + \alpha n \mathrm{E}I(X_1) - a - x_\beta^N \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{D}I(X_1)} \to \max, \tag{6}$$

где максимум берется по множеству дележей $\{I : 0 \leqslant I(x) \leqslant x \wedge q\}$. Всюду далее будем использовать обозначения $\bar{F}_1(x) \overset{def}{=} 1 - F_1(x)$ и $I_k(x) \overset{def}{=} x \wedge k$.

Утверждение 1. Множество $A \neq \emptyset$ (условие Слейтера выполнено) тогда и только тогда, когда

$$w - a \geqslant 0\,(>0) \quad \textit{при} \quad \alpha\sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} \leqslant 0 \tag{7}$$

и

$$J_0[I^0] \geqslant 0\,(>0) \quad \textit{при} \quad \alpha\sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} > 0, \tag{8}$$

где $I^0(x)$ *– решение задачи* (6) *– имеет вид кусочно-линейной функции* (*stop loss страхование*) $I^0(x) = x \wedge (k^0 \wedge q)$. *Здесь* k^0 *– минимальный корень на промежутке* $(0, \infty)$ *уравнения*

$$\psi(k) = 0, \tag{9}$$

где

$$\psi(k) \overset{def}{=} x_\beta^N (\mathrm{E} I_k(X_1) - k)/\sqrt{\mathrm{D} I_k(X_1)} + \alpha\sqrt{n}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда оптимальный дележ I^0 (если существует) является ненулевым, т.е. $\mathrm{D}I^0(X_1) > 0$. Как было отмечено в лемме, функционал $J_0[I]$ является сильно квазивогнутым, поэтому [15] необходимое и достаточное условие оптимальности дележа I^0 в задаче (6) есть неравенство

$$\frac{d}{d\rho} J_0 \left[\rho I^0 + (1-\rho) I\right]\Big|_{\rho=1} \geqslant 0$$

для любой (допустимой) функции дележа I. После подстановки функционала (6) и дифференцирования с учетом того, что

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\rho} \mathrm{D} \left[\rho I^0(X_1) + (1-\rho) I(X_1)\right]\Big|_{\rho=1} = \\ = 2\Big\{\mathrm{D}I^0 - \mathrm{E}\left(I^0 - \mathrm{E}I^0\right)(I - \mathrm{E}I)\Big\} = \\ = 2\Big\{\mathrm{E}\left[I^0\left(I^0 - \mathrm{E}I^0\right)\right] - \mathrm{E}I^0 \mathrm{E}\left(I^0 - I\right)\Big\} = \\ = \int_0^\infty 2\Big[I^0(x) - \mathrm{E}I^0(X_1)\Big]\left(I^0(x) - I(x)\right) dF_1(x),\end{gathered}$$

получаем, что левая часть неравенства равна

$$\int_0^\infty \sqrt{n}\, \eta(x) \left(I^0(x) - I(x)\right) dF_1(x),$$

где

$$\eta(x) = x_\beta^N (\mathrm{E}I^0(X_1) - I^0(x))/\sqrt{\mathrm{D}I^0(X_1)} + \alpha\sqrt{n}.$$

Таким образом, $I^0(x)$ является решением задачи максимизации интеграла

$$\int_0^\infty \eta(x)\, I(x) dF_1(x) \to \max \tag{10}$$

на множестве измеримых функций $\{I : 0 \leqslant I(x) \leqslant x \wedge q\}$. Условия оптимальности для такого типа задач даются известной леммой Неймана–Пирсона (см. [16] и примеры применения в страховых моделях [4]): функция $I^0(x)$ оптимальна в (10) тогда и только тогда, когда

$$I^0(x) = \begin{cases} 0, & \eta(x) < 0, \\ x \wedge q, & \eta(x) > 0, \end{cases} \tag{11}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1.

Поскольку $\eta(0) > 0$, то при возрастании x от нуля значение $\eta(x)$ убывает от положительной величины (при этом $I^0(x) = x$ в силу (11)). Возможны два случая. Первый: точка касания k^0 этой функции оси абсцисс будет такой, что значение функции $I^0(k^0) = k^0$ останется в пределах допустимого множества дележей, т.е. $k^0 \leqslant q$. Тогда функция $\eta(x)$ не может принимать отрицательных значений для $x > k^0$, поскольку для таких x (см. (11)) значение $I^0(x) = 0$, т.е. приходим к противоречию: $\eta(x) > 0$. Возрастание $\eta(x)$ от нуля также исключено, так как для таких x выполнено $I^0(x) = x$, что означает $\eta(x) < 0$. Второй случай: $k^0 > q$ означает, что функция $I^0(x) = x$ достигла в точке $x = q$ верхнего допустимого значения. При увеличении x от точки q функция $\eta(x)$ не может возрастать, так как в силу (11) функция $I^0(x) = x$ тогда пересечет верхнюю границу множества допустимых значений. Таким образом, $I^0(x) = q$ для $x > q$. В результате $I^0(x) = x \wedge (k^0 \wedge q)$. Для вычисления точки k^0 касания оси абсцисс функцией $\eta(x)$ на интервале $(0, \infty)$ после подстановки этой функции дележа $x \wedge k$ получим уравнение (9). Поскольку $\psi(0) > 0$ (см. (8)) и $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = -\infty$, то уравнение (9) имеет решение.

Теперь рассмотрим случай $I^0(X_1) = 0$ п.н. Применяя правило Лопиталя, получаем, что предел справа

$$\lim_{k\to 0+0} \psi(k) = \alpha\sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)}. \tag{12}$$

Действительно, найдем сначала

$$\lim_{k\to 0+0} \mathrm{E} I_k(X_1)/\sqrt{\mathrm{D} I_k(X_1)}. \tag{13}$$

Для этого вычислим, используя правило Лопиталя,

$$\lim_{k\to 0+0} \mathrm{D} I_k(X_1)/(\mathrm{E} I_k(X_1))^2 = 1/\bar{F}_1(0) - 1 = F_1(0)/\bar{F}_1(0).$$

Поэтому предел (13) равен $\sqrt{\bar{F}_1(0)/F_1(0)}$. Аналогично вычисляя $\lim\limits_{k\to 0+0} k/\sqrt{\mathrm{D} I_k(X_1)}$, получаем в итоге (12). В силу убывания функции $\eta(x,k) \stackrel{def}{=} x_\beta^N (\mathrm{E} I_k(X_1) - x)/\sqrt{\mathrm{D} I_k(X_1)} + \alpha\sqrt{n}$ по x при движении от $x = 0$ для любого фиксированного $k > 0$ условие $\psi(0+0) \leqslant 0$ означает вырожденность оптимального дележа, т.е. $I^0(X_1) = 0$ п.н. В этом случае максимум функционала в ограничении (5) равен $J_0[I^0] = w - a$ и непустота множества A (выполнение условия Слейтера) эквивалентна неравенству $w - a \geqslant 0\,(> 0)$ в соотношении (7) утверждения 1. В случае невырожденного дележа I^0, т.е. при выполнении неравенства $\alpha\sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} > 0$, имеем, как было показано, соотношение (8). Утверждение 1 доказано.

Теорема. *Пусть выполнено условие Слейтера (см. (7)–(8)), тогда задача (3)–(5) имеет единственное решение – stop loss страхование $I^*(x) = x \wedge (k^* \wedge q)$. Допустимый дележ $I^*(\cdot)$ оптимален в (3)–(5) тогда и только тогда, когда существует $\mu \geqslant 0$:*

$$\mu J_0[I^*] = 0, \tag{14}$$

$$I^*(x) = x \wedge (k^* \wedge q), \tag{15}$$

где

$$k^* = 0, \text{ т.е. } I^*(X_1) = 0 \quad \text{п.н.}, \tag{16}$$

при

$$(1+\mu)\alpha\sqrt{n} - (\theta + x_\beta^N \mu)\sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} \leqslant 0, \tag{17}$$

иначе $k^* > 0$ – минимальный корень уравнения

$$\phi(k) = 0, \tag{18}$$

где $\phi(k) \overset{def}{=} (\theta + x_\beta^N \mu)(\mathrm{E}I_k(X_1) - k)/\sqrt{\mathrm{D}I_k(X_1)} + (1+\mu)\alpha\sqrt{n}.$

Доказательство. Так же как и в доказательстве утверждения 1, рассмотрим случай, когда оптимальный дележ I^* (если он существует) является ненулевым, т.е. $\mathrm{D}I^*(X_1) > 0$. Поскольку выполнено условие Слейтера и целевой функционал $J[I]$, как и функционал $J_0[I]$ в ограничении (5), сильно квазивогнут, то (см., например, [15, 17]) применима теорема Куна–Таккера. Согласно этой теореме дележ $I^*(\cdot) \in A$ оптимален в (3)–(5) тогда и только тогда, когда существует множитель Лагранжа $\mu \geqslant 0$ такой, что $\mu J_0[I^*] = 0$ и $I^*(\cdot)$ является решением задачи максимизации функции Лагранжа

$$L[I,\mu] \equiv J[I] + \mu J_0[I] \to \max_I, \quad 0 \leqslant I(x) \leqslant x \wedge q. \tag{19}$$

Аналогично доказательству утверждения 1 необходимое и достаточное условие оптимальности дележа I^* в задаче (19) есть неравенство

$$\frac{d}{d\rho} L\left[\rho I^* + (1-\rho)\, I, \mu\right]\Big|_{\rho=1} \geqslant 0$$

для любой функции дележа $0 \leqslant I(x) \leqslant (x \wedge q)$. При подстановке выражений для функционалов (3) и (5) после дифференцирования получаем, что левая часть неравенства равна

$$\int_0^\infty \sqrt{n}\,\xi\,(x)\,(I^*\,(x) - I(x))\,dF_1\,(x)\,,$$

где

$$\xi(x) = (\theta + x_\beta^N \mu)(\mathrm{E}I^*(X_1) - I^*(x))/\sqrt{\mathrm{D}I^*(X_1)} + (1+\mu)\alpha\sqrt{n}.$$

Вновь используя лемму Неймана–Пирсона, имеем, что оптимальный дележ определяется как

$$I^*(x) = \begin{cases} 0, & \xi(x) < 0, \\ x \wedge q, & \xi(x) > 0, \end{cases} \tag{20}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1. Следуя рассуждениям в доказательстве утверждения 1, из (20) получаем $I^*(x) = x \wedge (k^* \wedge q)$, где $k^* > 0$ – минимальный корень уравнения $\phi(k) = 0$, а выражение для $\phi(k)$ определено в теореме.

Теперь рассмотрим оставшийся вырожденный случай $I^*(X_1) = 0$ п.н. Для нахождения необходимого и достаточного условия вырожденности оптимального дележа, т.е. отсутствия страховой сделки, вычислим предел $\phi(0+0)$. Функции $\phi(k)$ и $\psi(k)$, введенные в теореме и в утверждении 1 соответственно, аналогичны. Поэтому, повторяя рассуждения в доказательстве утверждения 1, получим, что

$$\phi(0+0) = (1+\mu)\alpha\sqrt{n} - (\theta + x_\beta^N \mu)\sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)}$$

и условие (17) эквивалентно вырожденности оптимального дележа $I^*(X_1) = 0$ п.н. Единственность оптимального дележа в задаче (3)–(5) следует из замечания к лемме. Теорема доказана.

Отметим, что условие (17) в теореме оказывается необходимым и достаточным условием отказа страховщика от сделки, когда его возмещение клиенту $I^*(X_1) = 0$ п.н., как и страховая премия $P = (1+\alpha)\mathrm{E}I^*(X_1) = 0$. Далее, основываясь на теореме, приведем конструктивный способ нахождения оптимального дележа $I^*(x)$ как решение некоторых неравенств и пары уравнений. Обозначим через $I^1(x)$ оптимальный дележ в задаче (3)–(4) без дополнительного ограничения (5), т.е. stop loss дележ, который определяется соотношениями (15)–(18) при $\mu = 0$.

Утверждение 2. Пусть выполнено условие Слейтера. Если $J_0[I^1] \geqslant 0$, где $J_0[I]$ – функционал в левой части ограничения (5) и $I^1(x)$ – решение задачи (3)–(4), то $I^*(x) = I^1(x)$. Иначе $I^*(x) = x \wedge (k^* \wedge q)$, где k^* определяется как первая компонента решения (k^*, μ^*) системы уравнений и неравенств:

$$\mu > 0, \tag{21}$$

$$w + \alpha n \mathrm{E}\{X_1 \wedge (k \wedge q)\} - a - x_\beta^N \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{D}\{X_1 \wedge (k \wedge q)\}} = 0, \tag{22}$$

$$k = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad (1+\mu)\alpha\sqrt{n} - (\theta + x_\beta^N \mu)\sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} \leqslant 0, \tag{23}$$

в противном случае

$$(\theta + x_\beta^N \mu)(\mathrm{E}I_k(X_1) - k)/\sqrt{\mathrm{D}I_k(X_1)} + (1+\mu)\alpha\sqrt{n} = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Условие $J_0[I^1] \geqslant 0$ означает, что дележ $I^1(x)$, который максимизирует целевой функционал $J[I]$ на множестве более широком, чем множество допустимых дележей A, оказывается принадлежащим A. Таким образом, $I^1(x)$ есть решение исходной задачи (3)–(5).

Если же $J_0[I^1] < 0$, то необходимо имеем, что в (19) множитель Лагранжа $\mu > 0$. Тогда для оптимального дележа неравенство (5) обращается в равенство $J_0[I^*] = 0$. С учетом того что в теореме найдена форма оптимального дележа (см. (15)), получаем уравнение (22). Соотношения (23)–(24) уже были выведены в теореме. Утверждение 2 доказано.

4. Пример

Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий теорему и утверждение 2 о решении задачи максимизации (3)–(5), когда ущербы клиентов имеют распределение $F_1(x) = p(1 - \exp(-0{,}1x)) + 1 - p$, где вероятность страхового случая $p = 0{,}2$. Таким образом, функция распределения страховых выплат [1] $F_1^0(x) \stackrel{def}{=} P\{X_1 \leqslant x | X_1 > 0\} = 1 - \exp(-0{,}1x)$ – экспоненциальна. Пусть численность группы клиентов $n = 100$, уровень доверия $\beta = 0{,}95$, нижняя граница приращения капитала страховщика $a = 0{,}7$, верхний предел его риска $q = 25$, "коэффициент осторожности" в целевом функционале $\theta = 1{,}5$ и начальный капитал страховщика $w = 0$. Напомним, что оптимальной стратегией для страховщика является stop loss стратегия $I^*(x) = x \wedge (k^* \wedge q)$. Результаты численного расчета собственного уровня удержания страховщика $k^* \wedge q$ и значения целевого функционала $J^* = J[I^*]$ при варьировании коэффициента нагрузки α для начисления премии приведены в таблице.

Таблица

α	$k^* \wedge q$	J^*
0,3	$\emptyset$	$\emptyset$
0,4	7,4521	6,0215
0,5	14,0097	19,1029
0,6	19,9227	35,4001
0,7	25	53,3016

Вторая строка таблицы означает, что при низком значении $\alpha = 0{,}3$, т.е. при относительно дешевом страховании, множество допустимых дележей A оказывается пустым в силу того что (см. (7)–(8)) $\alpha\sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} = 0{,}2282 > 0$ и $J_0[I^0] = -0{,}2812 < 0$. С ростом коэффициента нагрузки α оптимальное значение J^* ожидаемо увеличивается, при этом страховщик увеличивает уровень собственного удержания $k^* \wedge q = k^*$. Последняя строка таблицы показывает, что при $\alpha = 0{,}7$ достигнута верхняя граница q риска страховщика. Более точно: уровень $k^* \wedge q$, где k^* определяется в теореме, равен $q = 25$.

5. Заключение

В статье предложена новая постановка задачи оптимального дележа риска между страховщиком и страхователями с целевым функционалом типа Марковица и дополнительными ограничениями на финальный капитал страховщика: ограничение сверху на возмещаемый ущерб и квантильное ограничение. Оптимальным для страховщика оказывается stop loss страхование, получены соотношения для нахождения параметра этой функции дележа. В аналитической форме найдены необходимые и достаточные условия отказа от страховой сделки. В качестве продолжения данного исследования представляется интересным рассмотреть задачу с другим целевым функционалом, в частности задачу минимизации коэффициента вариации. Другое направление — использование вместо нормальной аппроксимации суммарного ущерба страховщика одного из эллиптических распределений [18], которые точнее моделируют реальное распределение, когда оно имеет более "тяжелый хвост", чем нормальная модель. Свойство эллиптических случайных величин сохранять тип распределения при линейном преобразовании делает их удобным инструментом при построении аппроксимации суммарного ущерба страховщика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.* Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001.
2. *Arrow K.J.* Essays in the Theory of Risk Bearing. Chicago: Wyley & Sons, 1971.
3. *Raviv A.* The Design of an Optimal Insurance Policy // Am. Econ. Rev. 1979. P. 84–96.
4. *Golubin A.Y.* Pareto-optimal Insurance Policies in the Models with a Premium Based on the Actuarial Value // J. Risk Insur. 2006. V. 73. No. 3. P. 469–487.
5. *Blazenko G.* Optimal Indemnity Contracts // Insur. Math. Econ. 1985. V. 4. P. 267–278.
6. *Cummins J., Mahul O.* The Demand for Insurance with an Upper Limit on Coverage // J. Risk Insur. 2004. V. 71 No. 2. P. 253–264.
7. *Голубин А.Ю., Гридин В.Н., Газов А.И.* Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием // АиТ. 2009. № 8. С. 133–144.

   Golubin A.Y., Gridin V.N., Gazov A.I. Risk Bearing in a Statical Model with Reinsurance // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 8. P. 1385–1395.
8. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
9. *Zhou C., Wu C.* Optimal Insurance Under the Insurer's VaR Constraint // GRIR. 2009. V. 34. P. 140–154.
10. *Chi Y., Weng C.* Optimal Reinsurance Subject to Vajda Condition // Insur. Math. Econ. 2013. V. 53. No. 1. P. 179–189.
11. *Cai J., Tan K.S., Weng C., Zhang Y.* Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures // Insur. Math. Econ. 2008. V. 43. No. 1. P. 185–196.
12. *Lu Z.Y., Liu L.P., Meng S.W.* Optimal Reinsurance with Concave Ceded Loss Functions under VaR and CTE Risk Measures // Insur. Math. Econ. 2013. V. 52. No. 1. P. 46–51.
13. *Chi Y., Zhou M.* Optimal Reinsurance Design: A Mean-Variance Approach // NAAJ. 2017. V. 21. No. 1. P. 1–14.
14. *Gaivoronski A., Pflug G.* Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach // J. Risk. 2004. V. 7. No. 2. P. 1–31.
15. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
16. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.

17. *Галеев Э.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. М.: Эдиториал УРСС, 2010.
18. *Landsman Z., Valdez E.A.* Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions // NAAJ. 2003. V. 7. No. 4. P. 55–71.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 15.04.2018

После доработки 06.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018