Автоматика и телемеханика, № 6, 2019

Обзоры

© 2019 г. **В.С. КОЗЯКИН, д-р физ.-мат. наук (kozyakin@iitp.ru)**
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва),
Н.А. КУЗНЕЦОВ, академик РАН (kuznetsov@cplire.ru)
(Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва,
Московский физико-технический институт (ГУ)),
П.Ю. ЧЕБОТАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (pavel4e@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Московский физико-технический институт (ГУ))

КОНСЕНСУС В АСИНХРОННЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ III. КОНСТРУКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ[1]

Описаны некоторые классы линейных асинхронных мультиагентных систем с дискретным временем, для которых проблема устойчивости допускает конструктивное решение. Описан также общий аналитический подход к построению числовых характеристик, аналогичных обобщенному спектральному радиусу в теории устойчивости, которые предоставляли бы возможность анализировать стабилизируемость управляемых мультиагентных систем. Работа завершает обзор авторов "Консенсус в асинхронных мультиагентных системах", первые две части которого опубликованы в [1, 2].

Ключевые слова: асинхронные мультиагентные системы, консенсус, устойчивость, стабилизируемость, марковские системы, матричные произведения, совместный спектральный радиус.

DOI: 10.1134/S0005231019060011

1. Введение

Как отмечалось в первых двух частях настоящего обзора [1, 2], многие задачи устойчивости и консенсуса линейных мультиагентных систем с дискретным временем могут быть сведены к задаче о сходимости произведений матриц, описывающих поведение агентов в последовательные промежутки времени, с сомножителями из некоторого множества матриц. Признанным инструментом анализа сходимости такого рода матричных произведений в настоящее время является метод совместного спектрального радиуса набора матриц (см., например, библиографию [3]). При этом исследование сходимости соответствующих матричных произведений оказывается принципиально более сложной задачей по сравнению с аналогичной задачей, возникающей

[1] Работа третьего автора поддержана грантом Российского научного фонда 19-19-00673, предоставленным ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН.

при анализе сходимости автономных линейных систем. В частности, как оказалось, в отличие от классической задачи сходимости решений автономных линейных систем для линейных мультиагентных систем с дискретным временем общие аналитические критерии анализа устойчивости типа критериев Рауса—Гурвица или Льенара—Шипара [4, 5] не могут существовать в принципе [6].

В этой ситуации особую роль приобретают методы численного анализа устойчивости линейных мультиагентных систем с дискретным временем (сходимости матричных произведений). К сожалению, и эти методы оказываются существенно более сложными и трудоемкими по сравнению с классическими численными методами анализа устойчивости автономных линейных систем — в общем случае они являются как минимум NP-сложными [7–11]. Тем не менее вполне работоспособные (для определенных классов систем) численные методы в последние годы были разработаны, см., например, [12–28].

В связи с отмеченной выше как теоретической, так и вычислительной сложностью анализа проблемы консенсуса и устойчивости линейных мультиагентных систем с дискретным временем в общем случае особую важность приобретает вопрос об описании отдельных классов систем, для которых соответствующие вопросы допускали бы конструктивное решение. Именно этому кругу вопросов посвящена настоящая работа.

В разделе 2 описывается один из классов линейных переключающихся систем, для которого вопросы устойчивости и стабилизируемости конструктивно разрешимы. Предложенный в разделе подход выполнен в духе идеологии модульности конструирования систем управления — его можно сравнить с созданием игрушек с помощью конструктора LEGO®. Напомним, что конструктор LEGO® состоит из "кирпичиков с шипами", соединяя которые практически в произвольном порядке (ориентированном за счет наличия шипов), можно получать разнообразные конструкции. В изложении этого раздела будем следовать работе [29].

Как отмечалось во второй части настоящего обзора [2], для анализа устойчивости линейных мультиагентных систем с дискретным временем приходится прибегать к алгебраическим методам, наиболее распространенным из которых является метод совместного/обобщенного спектрального радиуса набора матриц [3]. Однако использование методов совместного/обобщенного спектрального радиуса "в чистом виде" на практике не всегда возможно, поскольку совместный/обобщенный спектральный радиус описывает асимптотическое поведение мультиагентных систем только в классе всех (произвольных) "срабатываний" компонент (агентов). Поэтому в разделе 3 описывается подход, позволяющий распространить методы совместного/обобщенного спектрального радиуса на более типичные в прикладных задачах ситуации, — когда компоненты мультиагентных систем могут "срабатывать" не произвольным образом, а в соответствии с некоторым марковским правилом. В частности, в этом разделе показано, что для матричных произведений, описывающих функционирование мультиагентных систем, в которых сомножители появляются не в произвольном порядке, а подчиняются некоторому марковскому правилу, также справедливы аналоги понятий совместного и обобщенного спектрального радиуса. Данный подход позволил рассмотреть также ситуацию, когда срабатывание отдельных агентов подчинено некоторым частотным ограничениям — эта ситуация, естественная в практических постановках, как ни странно, долгое время не поддавалась математической формализации.

Наконец, в разделе 4 описывается общий аналитический подход к построению числовых характеристик, аналогичных обобщенному спектральному радиусу в теории устойчивости, которые предоставляли бы возможность анализировать стабилизируемость управляемых мультиагентных систем. С этой целью в разделе вводятся несколько вариантов так называемых минимаксных спектральных радиусов двух множеств матриц, один из которых описывает функционирование агентов мультиагентной системы, а второй — допустимых управлений соответствующей системы. Показывается, что в терминах этих минимаксных радиусов можно дать необходимые и достаточные условия стабилизируемости управляемых мультиагентных систем.

2. Конструктивная устойчивость/стабилизируемость мультиагентных систем

В абстрактной постановке *линейной мультиагентной системой с дискретным временем* можно назвать любую систему, динамика которой (без учета внешних возмущений) описывается уравнением

$$\mathbf{x}(n+1) = A(n)\mathbf{x}(n), \quad \mathbf{x}(n) \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

в котором $(N \times N)$-матрицы $A(n)$ при каждом значении n могут произвольным образом принимать значения из некоторого множества $(N \times N)$-матриц $\mathscr{A}$. При этом систему (1) называют (асимптотически) *устойчивой*, если для каждой последовательности матриц $A(n) \in \mathscr{A}$, $n = 0, 1, \ldots$, соответствующее решение $\mathbf{x}(n)$ стремится к нулю. Асимптотическая устойчивость системы (1) равносильна экспоненциальной сходимости к нулю каждой последовательности $\{X(n)\}$ матричных произведений $X(n) = A(n) \cdots A(1)A(0)$ [30–37], что в свою очередь равносильно выполнению неравенства

$$\rho(\mathscr{A}) < 1, \tag{2}$$

в котором величина $\rho(\mathscr{A})$, называемая [38] *совместным спектральным радиусом* множества матриц $\mathscr{A}$, определяется равенством

$$\rho(\mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{A_i \in \mathscr{A}} \|A_n \cdots A_1\|^{1/n} = \inf_{n \geqslant 1} \sup_{A_i \in \mathscr{A}} \|A_n \cdots A_1\|^{1/n}, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная матричная норма в $\mathscr{M}(N,N)$, порождаемая соответствующей векторной нормой в $\mathbb{R}^N$.

Для систем (1), не обладающих свойством устойчивости, может быть поставлен вопрос о существовании хотя бы одной последовательности матриц $A(n) \in \mathscr{A}$, $n = 0, 1, \ldots$, для которой выполняется предельное соотношение $A(n) \cdots A(1)A(0) \to 0$, т.е. о *стабилизации* системы. Система (1) допускает стабилизацию, если выполнено неравенство

$$\check{\rho}(\mathscr{A}) < 1 \tag{4}$$

(см. [11, 33, 39–41]), где величина $\check{\rho}(\mathscr{A})$, называемая *нижним спектральным радиусом* (lower spectral radius) [33] множества матриц $\mathscr{A}$, определяется равенством

$$(5) \qquad \check{\rho}(\mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \inf_{A_i\in\mathscr{A}} \|A_n\cdots A_1\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \inf_{A_i\in\mathscr{A}} \|A_n\cdots A_1\|^{1/n}.$$

Величина $\check{\rho}(\mathscr{A})$ (для произвольного, не обязательно ограниченного множества матриц) также может быть выражена равенством

$$\check{\rho}(\mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \inf_{A_i\in\mathscr{A}} \rho(A_n\cdots A_1)^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \inf_{A_i\in\mathscr{A}} \rho(A_n\cdots A_1)^{1/n},$$

как было показано в [33, теорема B1] для конечных множеств $\mathscr{A}$ и в [39, лемма 1.12; 41, теорема 1] для произвольных множеств $\mathscr{A}$.

Неравенства (2) и (4), казалось бы, дают исчерпывающий ответ на вопрос об устойчивости или стабилизируемости системы. С теоретической точки зрения это действительно так, однако на практике воспользоваться этими критериями затруднительно, поскольку вычислить пределы в формулах (3) и (5) в явном виде достаточно сложно и, по-видимому, вообще невозможно, см., например, многочисленные отрицательные результаты в [6, 8, 43–46]. Это влечет необходимость приближенного анализа величин (3) и (5) с привлечением численных методов. При этом ситуация усугубляется тем, что априорные оценки скорости сходимости в пределах (3) и (5) неизвестны, а объем необходимых вычислений растет весьма быстро как с ростом n, так и с ростом размерности системы.

В связи с этим отметим следующие задачи устойчивости и стабилизируемости линейных переключающихся систем, не новых по сути, но остающихся актуальными.

З а д а ч а 1. *Описать классы асинхронных систем (классы множеств матриц $\mathscr{A}$), для которых совместный спектральный радиус* (3) *допускал бы эффективное вычисление.*

З а д а ч а 2. *Описать классы асинхронных систем (классы множеств матриц $\mathscr{A}$), для которых нижний спектральный радиус* (5) *допускал бы эффективное вычисление.*

Исследование устойчивости и стабилизируемости систем (1) затрудняется еще одним обстоятельством, почти не упоминаемым в теории сходимости матричных произведений, но критически важным в теории автоматического управления. Дело в том, что в теории автоматического управления системы, как правило, состоят не из одного блока, а из набора блоков, соединенных определенным образом. В случае, когда эти блоки линейные и функционируют асинхронно, каждый из них описывается уравнением

$$(6) \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{out}}(n+1) = A_i(n)\mathbf{x}_{\mathrm{in}}(n),$$

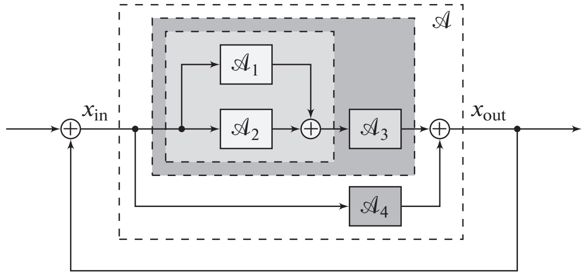

Рис. 1. Пример последовательно-параллельного соединения блоков системы.

где $\mathbf{x}_{\text{in}}(\cdot) \in \mathbb{R}^{N_i}$, $\mathbf{x}_{\text{out}}(\cdot) \in \mathbb{R}^{M_i}$, а $(N_i \times M_i)$-матрицы $A_i(n)$ при каждом значении n могут произвольным образом принимать значения из некоторого множества $(N_i \times M_i)$-матриц $\mathscr{A}_i$, $i = 1, \ldots, Q$, где Q — количество блоков в системе.

В этом случае вопрос об устойчивости или стабилизируемости естественно поставить не для отдельных блоков (6), а для системы в целом, в которой такого рода блоки могут соединяться параллельно или последовательно, или более сложным образом, представляемым некоторым ориентированным графом, с блоками вида (6), расположенными на ребрах графа, см. например, рис. 1, на котором представлен пример последовательно-параллельного соединения блоков системы: блоки $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ соединены параллельно; блок $\mathscr{A}_3$ соединен последовательно с группой блоков $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$; блок $\mathscr{A}_4$ соединен параллельно с группой блоков $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$. К сожалению, при таком соединении блоков классы матриц, описывающих переходные характеристики системы в целом, оказываются весьма сложными и их свойства практически не изучены. Как правило, даже в тех случаях, когда размерности входо-выходных векторов отдельных блоков совпадают друг с другом и вопрос об устойчивости или стабилизируемости для соответствующих блоков может быть каким-то образом решен, после последовательно-параллельного соединения таких блоков конструктивный ответ на вопросы устойчивости или стабилизируемости получить уже не удается или, в лучшем случае, получить его крайне затруднительно. Таким образом, актуальной является также следующая задача:

З а д а ч а 3. *Описать классы асинхронных систем, для которых ответ на вопрос об устойчивости или стабилизируемости мог бы быть конструктивно получен не только для отдельного асинхронного блока* (1) *или* (6), *но и для последовательно-параллельного соединения таких блоков.*

Наконец, рассмотрим еще один аспект проблемы конструктивной устойчивости или стабилизации переключающихся систем.

Как совместный спектральный радиус (3), так и нижний спектральный радиус (5) характеризуют лишь устойчивость или стабилизируемость системы "в целом". Они описывают предельное поведение "мультипликативно усредненных" норм матричных произведений $\|A(n-1)\cdots A(0)\|^{1/n}$. В типичных ситуациях (для так называемых *неприводимых*[2] классов матриц $\mathscr{A}$), если

[2] Набор матриц называется неприводимым, если его матрицы не имеют общих инвариантных подпространств за исключением нулевого и всего пространства.

говорим об устойчивости системы, то подразумеваем [31], что *для каждой* последовательности матриц $\{A(n)\}$ имеет место оценка

$$\|A(n-1)\cdots A(0)\| \leqslant C\rho^n(\mathscr{A}).$$

Когда говорим о стабилизируемости системы, то подразумеваем, что в типичных ситуациях *существует* такая последовательность матриц $\{A(n)\}$, для которой имеет место оценка

$$\|A(n-1)\cdots A(0)\| \leqslant \check{C}\check{\rho}^n(\mathscr{A}).$$

В то же время часто возникает необходимость найти такую последовательность матриц, которая обеспечивала бы наиболее медленное или наиболее быстрое "убывание" не норм произведений матриц $\|A(n-1)\cdots A(0)\|$, а (при заданном начальном условии $\mathbf{x}$) векторов $A(n-1)\cdots A(0)\mathbf{x}$. Более точно, рассмотрим вещественную функцию $\nu(\mathbf{x}) \equiv \nu(x_1,\ldots,x_N)$, неубывающую по каждой координате x_i вектора $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_N)$ и определенную при всех $x_1,\ldots,x_N \geqslant 0$. Такую функцию будем называть *покоординатно монотонной*, а в случае, когда она строго возрастает по каждой переменной x_i, — *строго покоординатно монотонной*. Например, каждая из норм

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|,$$

является покоординатно монотонной функцией. При этом нормы $\|\mathbf{x}\|_1$ и $\|\mathbf{x}\|_2$ являются строго покоординатно монотонными, а норма $\|\mathbf{x}\|_\infty$ покоординатно монотонна, но не строго покоординатно монотонна.

Если множество матриц $\mathscr{A}$ конечно и состоит из K элементов, то для нахождения величины

$$\max_{A\in\mathscr{A}} \nu(A\mathbf{x})$$

в общем случае необходимо K раз вычислить значения функции $\nu(\cdot)$ и найти среди них максимальное. Аналогично, для нахождения величины

$$\max_{A_{i_j}\in\mathscr{A}} \nu(A_{i_n}\cdots A_{i_1}\mathbf{x}) \tag{7}$$

в общем случае необходимо K^n раз вычислить значения функции $\nu(\cdot)$ и найти среди этих значений максимальное, что с ростом n приводит к экспоненциальному росту количества вычислений. В связи с этим разумно поставить следующую задачу.

З а д а ч а 4. *Дана покоординатно монотонная функция $\nu(\cdot)$ и вектор $\mathbf{x}\neq 0$. Описать классы асинхронных систем (равносильно, классы множеств матриц $\mathscr{A}$), для которых число вычислений функции $\nu(\cdot)$, требуемых для нахождения величины (7), было бы меньше, чем K^n. Желательно, чтобы оно имело порядок Kn.*

Для величины $\nu(A_{i_n}\cdots A_{i_1}\mathbf{x})$ может быть поставлена аналогичная задача минимизации. В связи с этим целью настоящего раздела является описание одного класса асинхронных контроллеров (1), достаточно простых и естественных в приложениях, для которых удается получить приемлемые решения задач 1–3. Задача 4 рассматривается в [29].

2.1. Множества матриц с конструктивно вычислимыми спектральными характеристиками

Одним из классов матричных множеств, для которых величины (3) и (5) могут быть явно вычислены, является так называемый класс множеств положительных матриц с независимым изменением строк [47], описанный в [2, раздел 4.1].

Отметим, что контроллеры, поведение которых описывается уравнениями (1) или (6) с IRU-множествами матриц, — это достаточно типичные в теории автоматического управления асинхронные контроллеры, осуществляющие *независимую покоординатную коррекцию входов.* Контроллеры, поведение которых описывается уравнениями (1) или (6) с линейно упорядоченными множествами положительных матриц, — это своего рода *усилители сигнала с "матричным" коэффициентом усиления*, меняющимся во времени.

Из [2, теоремы 7, 8 и замечание 2] вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть имеется система* (1)*, образованная рекурсивным последовательно-параллельным соединением блоков* (*т.е. представимая ориентированным графом, получаемым рекурсивными последовательными или параллельными расширениями, стартующими из одной из вершин, и с блоками, расположенными на ребрах графа* [48, 49])*, описываемых уравнениями* (6)*, отвечающими $\mathscr{H}$-множествам положительных матриц $\mathscr{A}_i$, $i=1,\ldots,Q$. Тогда вопрос об устойчивости или стабилизируемости такой системы конструктивно решается путем нахождения матриц, доставляющих максимум или минимум величин $\rho_{\max}(\mathscr{A})=\max_{A\in\mathscr{A}}\rho(A)$ и $\rho_{\min}(\mathscr{A})=\min_{A\in\mathscr{A}}\rho(A)$ соответственно, где множество матриц $\mathscr{A}$ есть полиномиальная сумма Минковского множеств матриц $\mathscr{A}_i$, $i=1,\ldots,Q$, отвечающая структуре соединения соответствующих блоков* (*см. необходимые определения в* [2, раздел 4.2]).

П р и м е р 1. В системе $\mathscr{A}$ на рис. 1 вход и выход связаны соотношением

$$\mathbf{x}_{\text{out}}(n+1)=\big(A_3(n)(A_1(n)+A_2(n))+A_4(n)\big)\mathbf{x}_{\text{in}}(n),$$

где при каждом значении n матрицы $A_1(n),\ldots,A_4(n)$ произвольным образом выбираются из соответствующих множеств $\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_4$. Соответственно, в данном случае все возможные значения матрицы перехода системы $\mathscr{A}$ могут быть получены как элементы следующей полиномиальной суммы Минковского множеств матриц $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3,\mathscr{A}_4$:

$$P(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3,\mathscr{A}_4)=\mathscr{A}_3(\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2)+\mathscr{A}_4.$$

2.2. Заключительные замечания

При проектировании систем управления с асинхронно срабатывающими (переключающимися) компонентами одной из основных является проблема оценки (вычислимости) совместного или нижнего спектральных радиусов получившейся системы, определяющих ее устойчивость или стабилизируемость соответственно.

Предложенный в разделе подход к решению данной проблемы выполнен в духе идеологии модульности конструирования систем управления — его можно сравнить с созданием игрушек с помощью конструктора LEGO®.

Как показано в разделе, каждое $\mathscr{H}$-множество матриц $\mathscr{A}$ также можно интерпретировать как своего рода конструктор LEGO® для создания систем управления, элементами которого (кирпичиками в этом конструкторе) являются асинхронные блоки (контроллеры) с переходными характеристиками, описываемыми множествами матриц $\mathscr{A}_i \in \mathscr{A}$. Тогда, как показано выше, *любое* последовательно-параллельное рекурсивное соединение блоков такого “конструктора” $\mathscr{A}$ приводит к образованию систем, совместный и нижний спектральные радиусы которых, определяющие их устойчивость или стабилизируемость, *всегда* могут быть конструктивно вычислены, см. [2, теоремы 6 и 8].

3. Марковские мультиагентные системы

Как видно из предыдущих разделов, см. также, библиографию [3], в настоящее время математические методы анализа устойчивости линейных мультиагентных систем разработаны лишь для нескольких классов мультиагентных систем — систем, рассинхронизованных по фазе, в меньшей степени для систем, рассинхронизованных по частоте, и достаточно полно для систем, в которых не накладывается никаких ограничений на “временной” характер взаимодействия отдельных агентов (компонент).

Для анализа последнего случая в настоящее время принято использовать достаточно полно разработанную в последние 30 лет теорию обобщенного/совместного спектрального радиуса множеств матриц. Эта теория сводит анализ вопросов устойчивости линейных мультиагентных систем с произвольным функционированием агентов к анализу сходимости матричных произведений. Одним из ключевых элементов этой теории является так называемая формула Бергера—Ванга, устанавливающая равенство между совместным и обобщенным спектральными радиусами семейств матриц. Для матричных произведений, в которых сомножители появляются не в произвольном порядке, а подчиняются некоторому марковскому правилу, также справедливы аналоги понятий совместного и обобщенного спектрального радиуса. Однако известные доказательства формулы Бергера—Ванга на этот случай непосредственно не переносятся, поскольку они существенно используют факт произвольности появления различных матриц в соответствующих матричных произведениях. Тем не менее формула Бергера—Ванга верна [50] и для “марковских” аналогов совместного и обобщенного спектрального радиуса, хотя доказательство в этом случае опирается на более изощренную технику мультипликативной эргодической теории. Достаточно элементарное доказательство теоремы Дая было предложено в [51].

Изложение этого раздела базируется на [51, 52].

3.1. Марковский совместный спектральный радиус

Пусть $\mathscr{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ — конечный набор $(d \times d)$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ вещественных или комплексных чисел. Если в $\mathbb{K}^{d\times d}$ задана некоторая мультипликативная норма[3] $\|\cdot\|$, то предел

$$\rho(\mathscr{A}) := \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n(\mathscr{A}) \qquad \left(= \lim_{n\to\infty} \rho_n(\mathscr{A}) = \inf_{n\geqslant 1} \rho_n(\mathscr{A}) \right), \tag{8}$$

где

$$\rho_n(\mathscr{A}) := \sup \left\{ \|A_{i_n} \cdots A_{i_1}\|^{1/n} : \ i_j \in \{1, \dots, N\} \right\},$$

называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц $\mathscr{A}$ [38]. Этот предел всегда существует, конечен и не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$. Если $\mathscr{A}$ состоит из одной матрицы, то выражение (8) превращается в известную формулу Гельфанда для спектрального радиуса линейного оператора. Поэтому иногда (8) называют обобщенной формулой Гельфанда [53].

Обобщенным спектральным радиусом набора матриц $\mathscr{A}$ называют величину, определяемую сходной с (8) формулой, в которой вместо нормы берется спектральный радиус $\rho(\cdot)$ соответствующих матриц [54, 55]:

$$\hat{\rho}(\mathscr{A}) := \varlimsup_{n\to\infty} \hat{\rho}_n(\mathscr{A}) \qquad \left(= \sup_{n\geqslant 1} \hat{\rho}_n(\mathscr{A}) \right), \tag{9}$$

где

$$\hat{\rho}_n(\mathscr{A}) := \sup \left\{ \rho(A_{i_n} \cdots A_{i_1})^{1/n} : \ i_j \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

Как впервые заметили М. Бергер и Я. Ванг [56], величины $\rho(\mathscr{A})$ и $\hat{\rho}(\mathscr{A})$ для ограниченных семейств матриц $\mathscr{A}$ на самом деле совпадают:

$$\hat{\rho}(\mathscr{A}) = \rho(\mathscr{A}). \tag{10}$$

Эта фундаментальная формула имеет многочисленные приложения в теории обобщенного/совместного спектрального радиуса. В частности, из нее вытекает непрерывная зависимость обобщенного/совместного спектрального радиуса от семейства матриц $\mathscr{A}$. Другим важным следствием *формулы Бергера—Ванга* (10) является тот факт, что величины $\hat{\rho}_n(\mathscr{A})$ и $\rho_n(\mathscr{A})$ для любых n образуют нижние и верхние оценки соответственно обобщенного/совместного спектрального радиуса семейства матриц $\mathscr{A}$:

$$\hat{\rho}_n(\mathscr{A}) \leqslant \hat{\rho}(\mathscr{A}) = \rho(\mathscr{A}) \leqslant \rho_n(\mathscr{A}), \tag{11}$$

[3] Норма $\|\cdot\|$ в пространстве линейных операторов называется мультипликативной (sub-multiplicative), если $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ для любой пары операторов A и B.

что может служить основой для оценки точности вычисления обобщенного/совместного спектрального радиуса.

Отличительной чертой определений (8) и (9) является то обстоятельство, что в них берутся матричные произведения $A_{i_n}\cdots A_{i_1}$, отвечающие всем возможным последовательностям индексов $(i_1,\dots,i_n)$. Более сложной является ситуация, когда на матричные произведения $A_{i_n}\cdots A_{i_1}$ в (8) и (9) накладываются какие-либо дополнительные ограничения, например, в них запрещены определенные комбинации матриц. Опишем более детально ситуацию подобного рода.

Пусть задана $(N\times N)$-матрица $\Omega=(\omega_{ij})$ с элементами из множества $\{0,1\}$. Конечную последовательность $(i_1,\dots,i_n)$ с элементами из множества $\{1,\dots,N\}$ будем называть *Ω-допустимой*, если $\omega_{i_{j+1}i_j}=1$ при всех $1\leqslant j\leqslant n-1$ и, кроме того, найдется такое $i_*\in\{1,\dots,N\}$, что $\omega_{i_*i_n}=1$. Множество всех конечных Ω-допустимых последовательностей $(i_1,\dots,i_n)$ обозначим через $W_{N,\Omega}$. Произведения матриц $A_{i_n}\cdots A_{i_1}$, отвечающие Ω-допустимым последовательностям $(i_1,\dots,i_n)$, будем называть *марковскими*, поскольку такого рода произведения естественно возникают в теории матричных коциклов над топологическими цепями Маркова, см., например, [57, 58].

Определим теперь аналоги формул (8) и (9) для Ω-допустимых матричных произведений. Предел

$$\rho(\mathscr{A},\Omega):=\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho_n(\mathscr{A},\Omega), \tag{12}$$

где

$$\rho_n(\mathscr{A},\Omega):=\sup\left\{\|A_{i_n}\cdots A_{i_1}\|^{1/n}:\ (i_1,\dots,i_n)\in W_{N,\Omega}\right\},$$

назовем *марковским совместным спектральным радиусом* набора матриц $\mathscr{A}$, определяемым *матрицей допустимых переходов* Ω. Если при некотором n множество Ω-допустимых последовательностей $(i_1,\dots,i_n)$ пустое, то будем полагать $\rho_n(\mathscr{A},\Omega)=0$. В этом случае при каждом $k\geqslant n$ множества Ω-допустимых последовательностей $(i_1,\dots,i_k)$ также будут пустыми и, следовательно, $\rho(\mathscr{A},\Omega)=0$. Вопрос о существовании сколь угодно длинных Ω-допустимых последовательностей решается алгоритмически за конечное число шагов. Достаточным условием непустоты этого множества является наличие, по крайней мере, одного ненулевого элемента в каждом столбце матрицы Ω.

Предел (12) всегда существует, конечен, не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$. При этом, как и для (8), в силу леммы Фекете [59] (см. также [60, гл. 3, § 1]) из субмультипликативности по n величины $\rho_n^n(\mathscr{A},\Omega)$ вытекает существование предела $\lim_{n\to\infty}\rho_n(\mathscr{A},\Omega)$ и инфимума $\inf_{n\geqslant1}\rho_n(\mathscr{A},\Omega)$, а также их равенство пределу (12):

$$\rho(\mathscr{A},\Omega):=\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho_n(\mathscr{A},\Omega)=\lim_{n\to\infty}\rho_n(\mathscr{A},\Omega)=\inf_{n\geqslant1}\rho_n(\mathscr{A},\Omega).$$

Марковским обобщенным спектральным радиусом набора матриц $\mathscr{A}$, определяемым матрицей допустимых переходов Ω, назовем величину

$$\hat\rho(\mathscr{A},\Omega):=\overline{\lim_{n\to\infty}}\hat\rho_n(\mathscr{A},\Omega), \tag{13}$$

где

$$\hat\rho_n(\mathscr{A},\Omega) := \sup\Big\{\rho(A_{i_n}\cdots A_{i_1})^{1/n}:\ (i_1,\ldots,i_n)\in W_{N,\Omega}\Big\}.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, будем полагать $\hat\rho_n(\mathscr{A},\Omega)=0$, если множество Ω-допустимых последовательностей индексов $(i_1,\ldots,i_n)$ пустое. При этом, как и для (9), предел (13) совпадает с величиной $\sup_{n\geqslant 1}\hat\rho_n(\mathscr{A},\Omega)$.

Для марковских произведений матриц справедливы аналогичные (11) неравенства

$$\hat\rho_n(\mathscr{A},\Omega)\leqslant\hat\rho(\mathscr{A},\Omega)\leqslant\rho(\mathscr{A},\Omega)\leqslant\rho_n(\mathscr{A},\Omega), \tag{14}$$

однако вопрос о справедливости равенства

$$\hat\rho(\mathscr{A},\Omega)=\rho(\mathscr{A},\Omega), \tag{15}$$

аналогичного равенству Бергера—Ванга (10), становится более сложным. Причина этого заключается в том, что известные доказательства [53, 56, 61–63] классической формулы Бергера—Ванга (10) существенно использовали тот факт, что в возникающих матричных произведениях матрицы могут перемножаться в произвольном порядке. Невозможность произвольного произведения матриц при переходе к "марковскому" случаю потребовала принципиально иного подхода. Возникшие трудности были преодолены С. Даем в [50] с использованием аппарата мультипликативной эргодической теории; для формулировки соответствующего утверждения понадобятся вспомогательные определения.

Назовем Ω-допустимую (конечную) последовательность $(i_1,\ldots,i_n)$ *периодически продолжимой*, если $\omega_{i_1 i_n}=1$. Вообще говоря, не каждая Ω-допустимая конечная последовательность периодически продолжима, но если существуют сколь угодно длинные Ω-допустимые последовательности, то найдутся и сколь угодно длинные Ω-допустимые периодически продолжимые последовательности. Через $W_{N,\Omega}^{(\mathrm{per})}$ будем обозначать множество всех Ω-допустимых периодически продолжимых последовательностей.

Определим величины

$$\hat\rho_n^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\Omega) := \sup\Big\{\rho(A_{i_n}\cdots A_{i_1})^{1/n}:\ (i_1,\ldots,i_n)\in W_{N,\Omega}^{(\mathrm{per})}\Big\}$$

и положим[4]

$$\hat\rho^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\Omega) := \varlimsup_{n\to\infty}\hat\rho_n^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\Omega).$$

Т е о р е м а 2 [50, 51]. *Справедливо равенство:* $\hat\rho^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\Omega)=\rho(\mathscr{A},\Omega)$.

Поскольку $W_{N,\Omega}^{(\mathrm{per})}\subseteq W_{N,\Omega}$, то $\hat\rho_n^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\Omega)\leqslant\hat\rho_n(\mathscr{A},\Omega)$ при каждом $n\geqslant 1$, а значит, $\hat\rho^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\Omega)\leqslant\hat\rho(\mathscr{A},\Omega)$. Отсюда и из (14) в силу теоремы Дая тогда вытекает "марковский" аналог (15) формулы Бергера—Ванга (10).

[4] Как и при определении марковских совместного и обобщенного спектральных радиусов, полагаем $\hat\rho_n^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\Omega)=0$, если множество периодически продолжимых последовательностей индексов длины n пусто.

3.2. Системы с ограничениями на частоты срабатывания агентов

В различных теоретических и прикладных задачах возникают матричные произведения

$$A_{\nu_0} A_{\nu_1} \cdots A_{\nu_n}, \quad n \geqslant 0, \tag{16}$$

где A_i — $(d \times d)$-матрицы из некоторого конечного набора матриц $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ с элементами из поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ вещественных или комплексных чисел, а $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n) \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}}$ — некоторая последовательность символов из множества $\mathscr{I} = \{1, \ldots, r\}$, см., например, [3, 35, 50, 64–66] и библиографию в них.

Вопрос о скорости роста произведений матриц (16) относительно просто (по крайней мере, теоретически) решается в "крайних" случаях, например, когда последовательность $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$ периодическая или когда в (16) рассматриваются все возможные последовательности с символами из множества $\mathscr{I} = \{1, \ldots, r\}$. В последнем случае вопрос о скорости роста всех возможных произведений матриц (16) дается в терминах так называемых совместного или обобщенного спектральных радиусов набора матриц $\mathscr{A}$ [38, 54–56].

В "промежуточных" ситуациях, когда последовательности $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$ в (16) достаточно сложны, но в то же время не абсолютно произвольные, вопрос о скорости роста матричных произведений (16) становится весьма нетривиальным, а ответ на него существенно зависит от структуры индексных последовательностей. В частности, одной из ключевых характеристик последовательности индексов $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$ в (16) является "частота" p_i появления индекса i в рассматриваемой последовательности.

Обычно частота p_i появления индекса i в последовательности определяется как предел относительных частот $p_{i,n}$ появления символа i среди первых n членов последовательности. Следует, однако, иметь в виду, что данное понятие частоты с точки зрения математического формализма является достаточно "тонким" и "не очень конструктивным". Уже в ситуации, когда имеешь дело лишь с единственной последовательностью $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$, данное определение зачастую оказывается недостаточно информативным, поскольку не отвечает на вопрос о том, "насколько часто" отдельный символ появляется на промежуточных, не стремящихся к бесконечности конечных отрезках заданной последовательности. Еще менее удовлетворительным данное определение оказывается в ситуациях, когда приходится иметь дело не с единственной последовательностью объектов, а с бесконечным набором таких последовательностей. Одним из основных недостатков здесь оказывается то, что данное выше определение частоты "не выдерживает" предельного перехода, что приводит к существенным теоретическим и понятийным трудностям.

Чтобы придать определению частоты "хорошие" свойства (с точки зрения возможности применения математических методов), зачастую приходится либо требовать какого-либо рода "равномерной" сходимости относительных частот $p_{i,n}$ к p_i, либо рассматривать появление соответствующих символов в последовательности как реализацию некоторых случайных событий, или как траектории некоторых детерминированных систем, обладающих эргодическими свойствами, и т.п. Наиболее часто для анализа поведения матричных произведений (16) в последнем случае привлекается так называемая мультипликативная эргодическая теорема (в вероятностной или теоретико-эргодической постановке), см., например, [67, 68]. При этом на законы формирования индексных последовательностей $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$ приходится накладывать достаточно сильные ограничения, зачастую трудно проверяемые и подтверждаемые в приложениях. В результате получающиеся совокупности объектов хотя и могут оказаться достаточно привлекательными с чисто математической точки зрения, но их описание становится все менее и менее конструктивным, что приводит зачастую к появлению достаточно существенного "понятийного зазора" или своего рода "натяжек" при использовании соответствующих объектов и конструкций в приложениях.

В настоящее время существует обширная литература, в которой изучаются частотные свойства различных классов символических последовательностей, см., например, [58, 69–73] и их библиографию. Менее исследован вопрос о конструктивном определении классов символических последовательностей с заданными частотными свойствами и соответствующих матричных произведений. Лишь недавно в [50, 51] сфера применимости методов теории совместного и обобщенного спектрального радиуса была существенно расширена на уравнения (16), в которых индексные последовательности $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$ описываются топологическими цепями Маркова. В связи с этим одной из целей работы является описание класса r-символьных последовательностей, для которых возможно конструктивное определение "приближенных" относительных частот символов по каждому блоку из ℓ последовательно стоящих символов (ℓ-блоку). Такое описание будет дано в терминах ℓ-кратных топологических цепей Маркова, что позволяет применить развитый в [50, 51] подход для определения совместного/обобщенного спектрального радиуса для матричных произведений, в которых сомножители появляются не в произвольном порядке, а подчиняются некоторым ограничениям по частоте.

3.3. Последовательности с ограничениями для блочных относительных частот символов

В дальнейшем инструментом анализа будут последовательности $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$, определенные при[5] $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$ и принимающие значения из алфавита (множества символов) $\mathscr{I} = \{1, \dots, r\}$, см. [73]. Совокупность всех таких последовательностей будем обозначать через $\mathscr{I}^{\mathbb{N}}$, а через $\mathscr{I}_l$ обозначим множество всех конечных последовательностей $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)$ длины l. Обозначим также через $\mathscr{I}^* = \cup_{l\geqslant 1}\mathscr{I}_l$ множество всех конечных последовательностей символов из $\mathscr{I}$. Для каждой последовательности $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{I}^*$ через $|\boldsymbol{\nu}|$ будем обозначать количество ее членов, а через $|\boldsymbol{\nu}|_i$ — количество символов i в этой последовательности. Величина $\frac{|\boldsymbol{\nu}|_i}{|\boldsymbol{\nu}|}$ в этом случае называется *относительной частотой* или *пропорцией* вхождения символа i в последовательность $\boldsymbol{\nu}$.

Пусть имеется некоторый набор неотрицательных чисел $\mathbf{p} = (p_i, \dots, p_r)$, сумма которых равна 1, т.е. $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, а также наборы нижних и верхних

[5] В символической динамике, см., например, [58, 73, 74], часто рассматривают также последовательности, определенные при всех целых значениях i, т.е. при $i \in \mathbb{Z}$. В настоящем разделе такого рода последовательности не понадобятся.

границ для $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}^- = (p_1^-, \dots, p_r^-), \quad \mathbf{p}^+ = (p_1^+, \dots, p_r^+), \tag{17}$$

удовлетворяющих соотношениям

$$0 \leqslant p_i^- < p_i < p_i^+ \leqslant 1, \quad i = 1, \dots, r. \tag{18}$$

Зададимся некоторым натуральным числом ℓ и обозначим через $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ множество всех конечных последовательностей $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{I}_\ell$, для которых относительные частоты вхождения символов удовлетворяют соотношениям

$$p_i^- \leqslant \frac{|\boldsymbol{\nu}|_i}{|\boldsymbol{\nu}|} \leqslant p_i^+, \quad i = 1, \dots, r. \tag{19}$$

Переписав эти соотношения в виде $p_i^-|\boldsymbol{\nu}| \leqslant |\boldsymbol{\nu}|_i \leqslant p_i^+|\boldsymbol{\nu}|$, где $i = 1, \dots, r$, можно интерпретировать их как наличие неких ограничений на количество вхождений различных символов в последовательности $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{I}_\ell$, т.е. в последовательности $\boldsymbol{\nu}$ длины ℓ.

Наконец, через $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$ будем обозначать множество всех последовательностей из $\mathscr{I}^{\mathbb{N}}$, каждая конечная подпоследовательность $\boldsymbol{\nu}$ длины ℓ которых удовлетворяет ограничениям (19) на количество вхождений различных символов.

Пример 2. Пусть $r = 3$, $\ell = 10$ и $\mathbf{p} = (0{,}23,\ 0{,}33,\ 0{,}44)$. Определим наборы (17) нижних и верхних границ для $\mathbf{p}$, полагая $p_i^- = p_i - 0{,}1$ и $p_i^+ = p_i + 0{,}1$ при $i = 1, 2, 3$, т.е.

$$\mathbf{p}^- = (0{,}13,\ 0{,}23,\ 0{,}34), \quad \mathbf{p}^+ = (0{,}33,\ 0{,}43,\ 0{,}54).$$

Тогда множеству $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$ принадлежат следующие последовательности:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu}_1 &= (2,1,2,3,3,3,2,3,3,1,2,1,2,3,1,3,2,3,3,3,2,1,2,2,1,3,3,1,3,3,2,2,1,2,\dots),\\
\boldsymbol{\nu}_2 &= (3,2,2,1,3,3,3,3,2,1,2,1,2,3,3,2,3,3,2,1,2,1,3,1,3,2,3,3,2,2,1,3,2,1,\dots),\\
\boldsymbol{\nu}_3 &= (1,1,3,3,2,2,1,2,3,3,1,3,1,3,2,2,3,2,2,3,1,3,1,3,2,1,3,2,2,3,1,3,1,3,\dots).
\end{aligned}$$

Замечание 1. Множество $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ может оказаться пустым даже в том случае, когда выполнены неравенства (18). Но если $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm) \neq \emptyset$, то и $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm) \neq \emptyset$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять произвольную последовательность $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{\ell-1}) \in \mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ и заметить, что ее продолжение по периодичности вправо (с периодом ℓ) принадлежит $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$.

Замечание 2. В общем случае частоты появления символов $i = 1, \dots, r$ в последовательностях из $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$ не определены. Более точно это означает следующее. Обозначим через $\boldsymbol{\nu}_n = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$ начальный отрезок из n символов для произвольной последовательности $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \dots) \in \mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$. Тогда при каждом $i = 1, \dots, r$ величина $\frac{|\boldsymbol{\nu}_n|_i}{|\boldsymbol{\nu}_n|}$ является относительной частотой появления символа i среди первых n членов последовательности $\boldsymbol{\nu}$. Относительные частоты $\frac{|\boldsymbol{\nu}_n|_i}{|\boldsymbol{\nu}_n|}$ оказываются “близкими” к соответствующим величинам p_i, однако в общем случае они могут не иметь пределов при $n \to \infty$.

Следующая лемма дает ответ на вопрос о непустоте множества $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$. Напомним, что для вещественного числа x через $\lfloor x \rfloor$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x, а через $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее чем x.

Лемма 1. *$\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\lceil p_i^- \ell \rceil \leqslant \lfloor p_i^+ \ell \rfloor$, $i = 1, \ldots, r$ и, кроме того, $\sum_{i=1}^r \lceil p_i^- \ell \rceil \leqslant \ell \leqslant \sum_{i=1}^r \lfloor p_i^+ \ell \rfloor$.*

Пример 3. Пусть $r = 3$, $\ell = 10$, а наборы (17) нижних и верхних границ для $\mathbf{p}$ такие же, как в примере 3. Тогда $\lceil p_1^- \ell \rceil = 2$, $\lceil p_2^- \ell \rceil = 3$, $\lceil p_3^- \ell \rceil = 4$, $\lfloor p_1^+ \ell \rfloor = 3$, $\lfloor p_2^+ \ell \rfloor = 4$, $\lfloor p_3^+ \ell \rfloor = 5$ и при этом $\sum_{i=1}^r \lceil p_i^- \ell \rceil = 9 \leqslant \ell \leqslant 12 = \sum_{i=1}^r \lfloor p_i^+ \ell \rfloor$. Таким образом, оба условия леммы 1 выполнены.

Пусть снова $\mathbf{p} = (0{,}23,\ 0{,}33,\ 0{,}44)$, но наборы (17) нижних и верхних границ для p теперь определены равенствами $p_i^- = p_i - 0{,}01$ и $p_i^+ = p_i + 0{,}01$ при $i = 1, 2, 3$, т.е.

$$\mathbf{p}^- = (0{,}22,\ 0{,}32,\ 0{,}43), \quad \mathbf{p}^+ = (0{,}24,\ 0{,}34,\ 0{,}45).$$

В этом случае $\lceil p_1^- \ell \rceil = 3$, $\lceil p_2^- \ell \rceil = 4$, $\lceil p_3^- \ell \rceil = 5$, $\lfloor p_1^+ \ell \rfloor = 2$, $\lfloor p_2^+ \ell \rfloor = 3$, $\lfloor p_3^+ \ell \rfloor = 4$ и первое условие леммы 1 не выполняется ни при одном $i = 1, 2, 3$.

Наконец, пусть снова $\mathbf{p} = (0{,}23,\ 0{,}33,\ 0{,}44)$, но наборы (17) нижних и верхних границ для p на этот раз определены равенствами $p_i^- = p_i - 0{,}05$ и $p_i^+ = p_i + 0{,}05$ при $i = 1, 2, 3$, т.е.

$$\mathbf{p}^- = (0{,}18,\ 0{,}28,\ 0{,}39), \quad \mathbf{p}^+ = (0{,}28,\ 0{,}38,\ 0{,}49).$$

В этом случае $\lceil p_1^- \ell \rceil = 2$, $\lceil p_2^- \ell \rceil = 3$, $\lceil p_3^- \ell \rceil = 4$, $\lfloor p_1^+ \ell \rfloor = 2$, $\lfloor p_2^+ \ell \rfloor = 3$, $\lfloor p_3^+ \ell \rfloor = 4$ и первое условие леммы 1 выполняется при каждом $i = 1, 2, 3$, но второе условие леммы 1 не выполнено, поскольку $\sum_{i=1}^r \lfloor p_i^+ \ell \rfloor = 9 < \ell$.

Из леммы 1 и примера 3 видно, что для непустоты множества $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ необходимо, чтобы “зазор” между соответствующими величинами p_i^- и p_i^+ был не слишком мал. Это означает, что апериодическое поведение последовательностей из $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$ может наблюдаться только в том случае, когда “зазор” между соответствующими величинами p_i^- и p_i^+ окажется настолько “велик”, чтобы выполнялось первое условие леммы 1, а во втором условии леммы 1 оба неравенства оказались строгими.

Замечание 3. Обнаружить в литературе явное упоминание о символических последовательностях с разрешенными ℓ-блоками типа $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ не удалось. Тем не менее близкие символические последовательности возникают во многих прикладных и теоретических исследованиях. Символические последовательности с разрешенными ℓ-блоками типа $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ могут рассматриваться как “последовательности с ограничениями”, возникающие в теории бесшумных каналов передачи данных с ограничениями (constrained noiseless channels) [69, гл. 17]. Вопрос о частотных свойствах таких последовательностей с определенными разрешенными или запрещенными комбинациями символов изучался, например, в [70, 71, 75], причем в [70, 71] для этих целей была привлечена теория совместного спектрального радиуса. Идейно близкими являются также последовательности с (d, k)-ограничениями ((d, k)-constrained sequences), возникающие в методе RLL-кодирования (RLL coding, runlength-limited coding), используемом при кодировании информации на жестких дисках, CD и DVD дисках и пр., см., например, [58, 72].

Символические последовательности с разрешенными ℓ-блоками типа $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ сходны с так называемыми k-сбалансированными последовательностями (k-balanced sequences) [58, 73], хотя и образуют более широкий класс. Символические последовательности с разрешенными ℓ-блоками типа $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ могут не иметь предельных частот отдельных символов, что отличает их от символических последовательностей, относительные частоты символов в которых равномерно сходятся [76].

3.4. Кратные топологические цепи Маркова

Покажем, что множество бесконечных последовательностей $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$ может естественным образом трактоваться как так называемая *ℓ-кратная топологическая цепь Маркова* (или *сдвиг конечного типа*). Напомним необходимые определения, следуя [57, 73].

Как обычно, оператор $\sigma : \boldsymbol{\nu} \mapsto \boldsymbol{\nu}'$, переводящий последовательность $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}}$ в последовательность $\boldsymbol{\nu}' = (\nu'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}}$, определяемую равенствами $\nu'_n = \nu_{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$, будет называться *левым сдвигом* или просто *сдвигом* на $\mathscr{I}^{\mathbb{N}}$. Пусть задана квадратная матрица $\omega = (\omega_{ij})_{i,j=1}^r$ порядка r с элементами из множества $\{0,1\}$. Положим

$$\mathscr{I}_\omega^{\mathbb{N}} := \left\{ \boldsymbol{\nu} = (\nu_n) \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}} : \omega_{\nu_n \nu_{n+1}} = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Другими словами, матрица ω определяет все допустимые переходы между символами алфавита $\mathscr{I} = \{1, \ldots, r\}$ в последовательностях из $\mathscr{I}_\omega^{\mathbb{N}}$. В этом случае ограничение отображения сдвига σ на $\mathscr{I}_\omega^{\mathbb{N}}$ называют *топологической цепью Маркова*, определяемой матрицей допустимых переходов ω [57, 73]. Отображение σ называют также *сдвигом конечного типа*[6].

Имеется естественный класс более общих символических систем, чем цепи Маркова. Пусть задано отображение

$$\Omega : \mathscr{I}^{\ell+1} \to \{0,1\}$$

и

$$\mathscr{I}_\Omega^{\mathbb{N}} := \left\{ \boldsymbol{\nu} = (\nu_n) \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}} : \Omega(\nu_n, \ldots, \nu_{n+\ell}) = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тогда ограничение отображения сдвига σ на $\mathscr{I}_\Omega^{\mathbb{N}}$ называют *ℓ-кратной топологической цепью Маркова*, определяемой функцией допустимых переходов Ω.

С точки зрения динамики ℓ-кратные топологические цепи Маркова — это то же самое, что и (обычные) топологические цепи Маркова, так как они

[6] Иногда термины “топологическая цепь Маркова” или “сдвиг конечного типа” применяют к самому множеству последовательностей $\mathscr{I}_\Omega^{\mathbb{N}}$.

могут быть описаны как топологические цепи Маркова с алфавитом $\mathscr{I} = \{1, \dots, r\}^\ell$ и такой матрицей ω, что

$$\omega_{(\nu_1,\dots,\nu_\ell),(\nu'_1,\dots,\nu'_\ell)} = 1,$$

если $\nu'_k = \nu_{k+1}$ при $k = 1, \dots, \ell - 1$ и $\Omega(\nu_1, \dots, \nu_\ell, \nu'_\ell) = 1$, см., например, [57, раздел 1.9].

Теорема 3. Пусть для некоторых наборов чисел

$$\mathbf{p}^- = (p_1^-, \dots, p_r^-), \quad \mathbf{p}^+ = (p_1^+, \dots, p_r^+),$$

удовлетворяющих соотношениям (18)*, выполняются условия леммы 1. Тогда сужение сдвига σ на множество $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$ является ℓ-кратной топологической цепью Маркова.*

Несмотря на очевидность, теорема 3 имеет принципиальное значение, поскольку позволяет трактовать символические последовательности с ограничениями для блочных относительных частот символов как (кратные) цепи Маркова.

3.5. Ограниченный совместный/обобщенный спектральный радиус

Пусть, как и в предыдущем разделе, $\mathscr{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — некоторый конечный набор матриц с элементами из поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ вещественных или комплексных чисел. Зададимся некоторым целым числом ℓ и наборами чисел p_i, $p_i^\pm$, $i = 1, \dots, r$, удовлетворяющими ограничениям (18). Конечную последовательность $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ с элементами из множества $\mathscr{I}$ будем называть $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$*-допустимой*, если $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{I}_\ell^*(\mathbf{p}^\pm)$, т.е. каждая ее подпоследовательность $(\nu_j, \dots, \nu_{j+\ell-1})$ длины ℓ принадлежит $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$, а каждая из подпоследовательностей длины, меньшей ℓ, допускает дополнение справа до последовательностей из $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$. Множество всех конечных $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-допустимых последовательностей $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ обозначим через $W_{\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)}$. Произведения матриц $A_{\nu_n} \cdots A_{\nu_1}$, отвечающие $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-допустимым последовательностям $(\nu_1, \dots, \nu_n)$, будем называть $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$*-допустимыми*.

Теперь можно определить понятия совместного и обобщенного спектральных радиусов для $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-допустимых произведений матриц из $\mathscr{A}$, почти дословно повторяя соответствующие определения из предыдущего раздела.

Предел

$$\rho\left(\mathscr{A}, \mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) := \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n\left(\mathscr{A}, \mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right), \tag{20}$$

где

$$\rho_n(\mathscr{A}, \mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)) := \sup\left\{\|A_{\nu_n} \cdots A_{\nu_1}\|^{1/n} : \ (\nu_1, \dots, \nu_n) \in W_{\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)}\right\},$$

назовем $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$*-ограниченным совместным спектральным радиусом.*

Предел (20) всегда существует, конечен и не зависит от нормы $\|\cdot\|$. При этом множества $\mathscr{I}_\ell^*(\mathbf{p}^\pm)$ обладают свойством субаддитивности, а тогда величина $\rho_n^n(\mathscr{A}, \mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))$ субмультипликативна по n. Поэтому по лемме Фекете [59] (см. также [60, гл. 3, § 1]) существует предел $\lim_{n\to\infty}\rho_n(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))$, совпадающий как с $\rho(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))$, так и с инфимумом $\inf_{n\geqslant 1}\rho_n(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))$, т.е. $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-ограниченный совместный спектральный радиус можно определить любым из следующих равенств:

$$\rho\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) := \varlimsup_{n\to\infty}\rho_n\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) = \\ = \lim_{n\to\infty}\rho_n\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) = \inf_{n\geqslant 1}\rho_n\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right).$$

Аналогично естественно назвать $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-*ограниченным обобщенным спектральным радиусом* набора матриц $\mathscr{A}$ величину

$$\hat\rho\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) := \lim_{n\to\infty}\hat\rho_n\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right),$$

где

$$\hat\rho_n\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) := \sup\left\{\rho(A_{\nu_n}\cdots A_{\nu_1})^{1/n}:\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)\in W_{\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)}\right\}.$$

Для $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-допустимых произведений матриц выполняются неравенства

$$\hat\rho_n\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right)\leqslant\hat\rho\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right)\leqslant\rho\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right)\leqslant\rho_n\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right), \tag{21}$$

аналогичные (11) или (14). В то же время вопрос о справедливости равенства

$$\hat\rho\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) = \rho(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)), \tag{22}$$

аналогичного равенству Бергера—Ванга (10), как и в случае марковских аналогов совместного и обобщенного спектральных радиусов, менее очевиден. Назовем $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-допустимую конечную последовательность $(\nu_0,\ldots,\nu_{n-1})$ *периодически продолжимой*, если она может быть продолжена вправо до n-периодической последовательности из $\mathscr{I}_\ell^{\mathbb{N}}(\mathbf{p}^\pm)$. Множество всех $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-допустимых периодически продолжимых последовательностей обозначим через $W^{(\mathrm{per})}_{\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)}$. Очевидно, это множество непусто, если непусто множество $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$, поскольку каждая последовательность из $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ допускает ℓ-периодическое продолжение вправо.

Определим величины

$$\hat\rho_n^{(\mathrm{per})}\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) := \sup\left\{\rho(A_{\nu_n}\cdots A_{\nu_1})^{1/n}:\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)\in W^{(\mathrm{per})}_{\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)}\right\}$$

и положим

$$\hat\rho^{(\mathrm{per})}\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right) := \varlimsup_{n\to\infty}\hat\rho_n^{(\mathrm{per})}\left(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)\right).$$

В этом случае справедливо следующее обобщение формулы Бергера—Ванга на случай матричных произведений с ограничениями для блочных относительных частот сомножителей или, что то же, на случай $\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$-допустимых матричных произведений.

Теорема 4. Справедливо равенство: $\hat{\rho}^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))=\rho(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))$.

Поскольку $W^{(\mathrm{per})}_{\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)}\subseteq W_{\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)}$, то $\hat{\rho}_n^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))\leqslant\hat{\rho}_n(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))$ при каждом $n\geqslant 1$, а значит, $\hat{\rho}^{(\mathrm{per})}(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))\leqslant\hat{\rho}(\mathscr{A},\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm))$. Отсюда и из (21) в силу теоремы 4 тогда вытекает аналог (22) формулы Бергера—Ванга (10) для матричных произведений с ограничениями на блочные относительные частоты сомножителей.

Замечание 4. В настоящем разделе допустимые последовательности были определены следующим образом: было задано множество $\mathscr{P}=\mathscr{I}_\ell(\mathbf{p}^\pm)$ последовательностей длины ℓ и допустимыми считались все конечные последовательности длины, меньшей ℓ, допускающие дополнение справа до последовательностей из $\mathscr{P}$, а также последовательности длины, большей или равной ℓ, каждая конечная подпоследовательность которых длины ℓ принадлежит $\mathscr{P}$.

В данном определении конкретный вид множества $\mathscr{P}$ не принципиален. Поэтому все конструкции данного раздела сохранят силу для произвольного выбора множеств $\mathscr{P}$ и соответствующим образом определенных допустимых последовательностей, ср. [75]. При этом, конечно, вопрос о непустоте множества допустимых последовательностей должен решаться отдельно.

4. Минимаксный совместный спектральный радиус и стабилизируемость мультиагентных линейных систем

Изложение настоящего раздела основано на работе [77].

Разнообразные прикладные и теоретические задачи вычислительной математики, теории управления, теории кодирования, комбинаторики и др. приводят к необходимости знать скорость роста/убывания произведений $(N\times N)$-матриц $A_n\cdots A_1$ с сомножителями из некоторого множества матриц $\mathscr{A}$, см., например, [11, 39], а также библиографию [3]. Для оценки скорости роста соответствующих матричных произведений принято использовать такие числовые характеристики множества матриц $\mathscr{A}$, как совместный спектральный радиус [38]

$$\rho(\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\sup\left\{\|A_n\cdots A_1\|^{\frac{1}{n}}:\ A_i\in\mathscr{A}\right\}\tag{23}$$

и нижний спектральный радиус [33]

$$\check{\rho}(\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\inf\left\{\|A_n\cdots A_1\|^{\frac{1}{n}}:\ A_i\in\mathscr{A}\right\},\tag{24}$$

называемый также совместным спектральным подрадиусом. Пределы в (23) и (24) всегда существуют и не зависят от нормы $\|\cdot\|$ на пространстве матриц размерности $N\times N$; соответствующие доказательства с историческими комментариями можно найти, например, в [11, 39].

Понятия совместного и нижнего спектральных радиусов возникли во второй половине XX в., и к настоящему моменту их исследованию посвящено несколько сотен публикаций, см. например, [3, 11]. Одной из областей, в которых применение совместного и нижнего спектрального радиусов оказывается наиболее естественным и продуктивным, является теория линейных переключающихся систем с дискретным временем. В частности, неравенство $\rho(\mathscr{A}) < 1$ оказывается критерием устойчивости линейной переключающейся системы с дискретным временем [53, 78], а неравенство $\check{\rho}(\mathscr{A}) < 1$ — критерием стабилизируемости.

Несмотря на то, что совместный и нижний спектральные радиусы определяются "почти одинаковыми" равенствами (23) и (24), их свойства существенно различаются. Достаточно упомянуть лишь тот факт, что совместный спектральный радиус $\rho(\mathscr{A})$ в естественном смысле непрерывно зависит от множества $\mathscr{A}$, в то время как нижний спектральный радиус $\check{\rho}(\mathscr{A})$ в общем случае не является непрерывной функцией множества $\mathscr{A}$, строгие формулировки см., например, в [41, 79]. Более того, ряд свойств совместного и нижнего спектральных радиусов, которые в окончательной формулировке выглядят одинаково, доказываются с помощью совершенно разных подходов.

Сказанное вызывает естественное, на взгляд авторов, желание ввести некую характеристику матричных произведений, которая объединяла бы понятия как совместного, так и нижнего спектральных радиусов. Для реализации этой идеи в разделе рассматриваются матричные произведения $A_nB_n \cdots A_1B_1$ с сомножителями $A_i \in \mathscr{A}$, $B_i \in \mathscr{B}$ размерностей $N \times M$ и $M \times N$ соответственно из двух различных множеств матриц $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, для которых определяются числовые величины

$$\mu(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \lim_{n\to\infty} \max_{A_i\in\mathscr{A}} \min_{B_i\in\mathscr{B}} \|A_nB_n \cdots A_1B_1\|^{\frac{1}{n}},$$

$$\eta(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \lim_{n\to\infty} \min_{B_i\in\mathscr{B}} \max_{A_i\in\mathscr{A}} \|A_nB_n \cdots A_1B_1\|^{\frac{1}{n}},$$

называемые далее нижним и верхним минимаксными совместными спектральными радиусами пары $\{\mathscr{A}, \mathscr{B}\}$. Обе величины $\mu(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ и $\eta(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ характеризуют максимальную скорость роста матричных произведений $A_nB_n \cdots \cdots A_1B_1$ по всем наборам матриц $A_i \in \mathscr{A}$ и минимальную скорость роста по всем наборам матриц $B_i \in \mathscr{B}$.

4.1. Устойчивость/стабилизируемость неуправляемых линейных систем

Напомним теоретико-управленческую мотивацию привлечения понятий совместного и нижнего спектральных радиусов для анализа проблемы устойчивости и стабилизируемости линейных (неуправляемых) переключающихся систем.

Рассмотрим изображенную на рис. 2 переключающуюся динамическую систему $\boldsymbol{A}$ с дискретным временем, состоящую из объекта $\boldsymbol{\mathscr{A}}$, выход которого, аддитивно возмущенный внешним воздействием f, замыкается на вход с помощью задержки в обратной связи.

Будем считать, что при каждом значении времени $n = 1, 2, \ldots$ выход x_{out} и вход x_{in} объекта $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ связаны линейным уравнением

$$\mathbf{x}_{\text{out}} = A_n\mathbf{x}_{\text{in}}, \qquad \mathbf{x}_{\text{in}}, \mathbf{x}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^N, \tag{25}$$

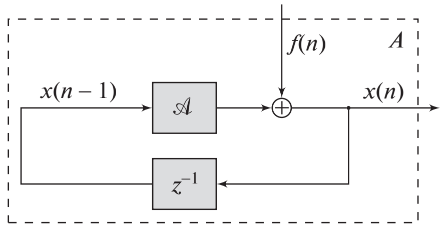

Рис. 2. Линейная переключающаяся система с дискретным временем.

где A_n является матрицей размерности $N \times N$, принимающей значения из некоторого конечного множества матриц $\mathscr{A}$.

Последовательность матриц $\{A_n\}$ в зависимости от контекста может либо определяться внешними возмущениями, либо формироваться специальным образом с целью придания всей системе некоторых свойств. Вектор-функция $\mathbf{f}(n)$ представляет аддитивные внешние воздействия на вектор состояния системы $\mathbf{x}$. Блок $\boldsymbol{z}^{-1}$ является элементом запаздывания на единицу времени (на один такт). В этом случае динамика рассматриваемой системы описывается неоднородным уравнением

$$\mathbf{x}(n) = A_n\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{f}(n), \qquad n = 1, 2 \ldots,$$

в котором переменные $\mathbf{x}(n)$ и $\mathbf{f}(n)$ предполагаются вектор-столбцами размерности N.

В том случае, когда аддитивные внешние воздействия $\mathbf{f}$ отсутствуют, т.е. $\mathbf{f}(n) \equiv 0$, динамика системы описывается однородным уравнением

$$\mathbf{x}(n) = A_n\mathbf{x}(n-1), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Определение 1. Систему $\boldsymbol{A}$ с нулевым входом $\mathbf{f}$, описываемую уравнением (26)*, называют асимптотически устойчивой в классе всех матриц $\mathscr{A}$, если*

$$\mathbf{x}(n) = A_n \cdots A_1\mathbf{x}(0) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{27}$$

для любой последовательности матриц $\{A_n \in \mathscr{A}\}$ и любого начального условия $\mathbf{x}(0)$.

Как известно [32, 33, 50, 54, 56, 68, 80], сходимость к нулю каждого решения уравнения (26) в классе матриц $\mathscr{A}$ влечет более сильное свойство экспоненциальной сходимости к нулю каждой последовательности $\{X_n\}$ матричных произведений $X_n = A_n \cdots A_1$, т.е. существование таких констант $C > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$ (не зависящих от матричных сомножителей $A_1, \ldots, A_n$), что $\|A_n \cdots A_1\| \leqslant C\lambda^n$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма на пространстве $(N \times N)$-матриц. Последнее свойство, в свою очередь, влечет выполнение неравенства $\rho(\mathscr{A}) < 1$, где $\rho(\mathscr{A})$ — совместный спектральный радиус множества матриц $\mathscr{A}$, определяемый равенством (23). С другой стороны, выполнение неравенства $\rho(\mathscr{A}) < 1$ очевидным образом влечет сходимость к нулю каждой последовательности матриц $X_n = A_n \cdots A_1$ с сомножителями из $\mathscr{A}$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Система $\boldsymbol{A}$ *с нулевым входом* $\mathbf{f}$, *описываемая уравнением* (26), *асимптотически устойчива в классе матриц* $\mathscr{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\rho(\mathscr{A}) < 1$.

Определение 2. Систему $\boldsymbol{A}$ *с нулевым входом* $\mathbf{f}$ *называют поточечно стабилизируемой в классе всех матриц* $\mathscr{A}$, *если для каждого начального условия* $\mathbf{x}(0)$ *найдется такая последовательность матриц* $\{A_n \in \mathscr{A}\}$, *для которой имеет место сходимость* (27).

Определение 3. Систему $\boldsymbol{A}$ *с нулевым входом* $\mathbf{f}$ *назовем равномерно стабилизируемой или просто стабилизируемой в классе всех матриц* $\mathscr{A}$, *если найдется такая последовательность матриц* $\{A_n \in \mathscr{A}\}$, *что сходимость* (27) *имеет место для каждого начального условия* $\mathbf{x}(0)$.

Очевидно, равномерная стабилизируемость системы $\boldsymbol{A}$ с нулевым входом $\mathbf{f}$ равносильна условию существования такой последовательности матриц $\{A_n \in \mathscr{A}\}$, для которой матричные произведения $A_n \cdots A_1$ сходятся к нулю по норме:

$$\|A_n \cdots A_1\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В литературе для обозначения понятий, эквивалентных поточечной или равномерной стабилизируемости, применяется различная терминология. Например, в ряде работ вместо термина стабилизируемость используется более широкий термин управляемость, восходящий к Р. Калману, см., например, [36, 81, 82]. В [83] для понятий поточечной или равномерной стабилизируемости применяются термины поточечная или равномерная сходимости матричных произведений с матрицами из $\mathscr{A}$. Равномерная сходимость матриц влечет их поточечную сходимость, в то время как обратное утверждение неверно.

Пример 4 [83, 84]. Произведения матриц из множества

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

сходятся поточечно, но не являются сходящимися равномерно.

Для характеризации стабилизируемости удобно использовать нижний спектральный радиус $\check{\rho}(\mathscr{A})$, определяемый равенством (24). В частности, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Система $\boldsymbol{A}$ *с нулевым входом* $\mathbf{f}$, *описываемая уравнением* (26), *равномерно стабилизируема тогда и только тогда, когда* $\check{\rho}(\mathscr{A}) < 1$.

Достаточность условия $\check{\rho}(\mathscr{A}) < 1$ для стабилизируемости следует непосредственно из формулы (24). А как показано в [81, предложение 1; 82, теорема 3.9; 83], стабилизируемость системы $\boldsymbol{A}$, описываемой уравнением (26), влечет неравенство $\check{\rho}(\mathscr{A}) < 1$.

Таким образом, предложения 1 и 2 показывают, что совместный и нижний спектральный радиусы являются удобным аналитическим средством при анализе устойчивости и стабилизируемости (неуправляемых) линейных переключающихся систем. К сожалению, вычисление как совместного, так и нижнего спектрального радиуса является сложной задачей, и лишь в исключительных случаях удается описать классы матриц, для которых эти характеристики могут быть вычислены в явном “формульном” виде, см., например, библиографию в [3, 11, 85, 86].

4.2. Стабилизируемость управляемых линейных систем

Обратимся к более реалистичной системе управления $\boldsymbol{AB}$ с дискретным временем, которая включает в себя не только объект управления $\boldsymbol{\mathscr{A}}$, но и контроллер $\boldsymbol{\mathscr{B}}$, см. рис. 3.

Относительно объекта $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ будут делаться те же предположения, что и в предыдущем разделе, а именно, будем считать что при каждом $n = 1, 2, \dots$ выход $\mathbf{x}_{\text{out}}$ объекта $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ связан с его входом $\mathbf{x}_{\text{in}}$ линейным уравнением

$$\mathbf{x}_{\text{out}} = A_n \mathbf{x}_{\text{in}}, \qquad \mathbf{x}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^M,\ \mathbf{x}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^N,$$

где A_n является матрицей размерности $N \times M$, принимающей значения из некоторого конечного множества матриц $\mathscr{A}$. Отличие от предположений (25), накладывавшихся на объект $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ в разделе 4.1, заключается в том, что в данном случае размерности входов и выходов объекта $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ не обязаны совпадать.

Контроллер $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ также будет предполагаться функционирующим при каждом $n = 1, 2, \dots$ в соответствии с линейным уравнением

$$\mathbf{u}_{\text{out}} = B_n \mathbf{u}_{\text{in}}, \qquad \mathbf{u}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^M,\ \mathbf{u}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^N,$$

в котором матрица B_n размерности $M \times N$ может выбираться из некоторого конечного множества матриц $\mathscr{B}$. Множество $\mathscr{B}$ можно трактовать как множество всех доступных управлений.

В данном контексте последовательность матриц $\{A_n\}$ определяется (неконтролируемыми) внешними возмущениями объекта управления, а последовательность матриц $\{B_n\}$ представляет управляющие воздействия контроллера, с помощью которых можно пытаться придать те или иные свойства рассматриваемой системе. Вектор-функция $\mathbf{f}(n)$ представляет аддитивные входные воздействия на вектор состояния системы. Блок $\boldsymbol{z}^{-1}$, как и в разделе 4.1, является элементом запаздывания на единицу времени (на один

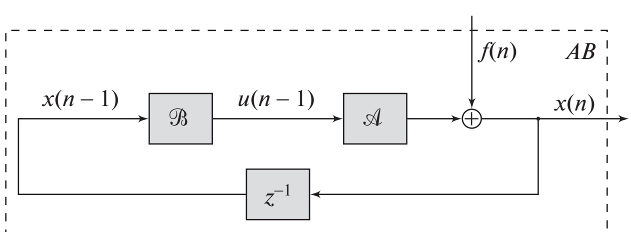

Рис. 3. Система управления, состоящая из объекта $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ и контроллера $\boldsymbol{\mathscr{B}}$.

такт). В этом случае динамика рассматриваемой системы описывается уравнением

$$\mathbf{x}(n) = A_n B_n \mathbf{x}(n-1) + \mathbf{f}(n), \qquad n = 1, 2 \ldots,$$

где $\mathbf{x}(n)$ и $\mathbf{f}(n)$ являются вектор-столбцами размерности N.

Снова, чтобы не отвлекаться на несущественные детали, будем интересоваться только вопросами устойчивости и стабилизируемости нулевого решения системы, изображенной на рис. 3, в случае нулевого внешнего воздействия $\mathbf{f}$, т.е. когда $\mathbf{f}(n) \equiv 0$. Динамика такой системы описывается уравнением

$$\mathbf{x}(n) = A_n B_n \mathbf{x}(n-1), \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{28}$$

Для системы управления $\boldsymbol{AB}$ с нулевым входом $\mathbf{f}$, описываемой уравнением (28), могут быть поставлены вопросы об (асимптотической) устойчивости и стабилизируемости, аналогичные тем, которые были поставлены для системы $\boldsymbol{A}$.

Определение 4. Систему $\boldsymbol{AB}$ *с нулевым входом* $\mathbf{f}$ *назовем асимптотически устойчивой в классе всех возмущений* $\mathscr{A}$ *объекта* $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ *и управлений* $\mathscr{B}$ *контроллера* $\boldsymbol{\mathscr{B}}$, *если*

$$\mathbf{x}(n) = A_n B_n \cdots A_1 B_1 \mathbf{x}(0) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty \tag{29}$$

для любых последовательностей матриц $\{A_n \in \mathscr{A}\}$, $\{B_n \in \mathscr{B}\}$ *и любого начального условия* $\mathbf{x}(0)$.

Отметим, впрочем, что рассмотрение абсолютной устойчивости для системы $\boldsymbol{AB}$ не привносит ничего нового по сравнению с рассмотрением системы $\boldsymbol{A}$. Очевидно, *система* $\boldsymbol{AB}$ *с нулевым входом* $\mathbf{f}$, *описываемая уравнением* (28), *асимптотически устойчива в классе всех возмущений* $\mathscr{A}$ *и управлений* $\mathscr{B}$ *тогда и только тогда, когда система* $\boldsymbol{A}$ *с нулевым входом* $\mathbf{f}$ *асимптотически устойчива в классе матриц*

$$\mathscr{A}\mathscr{B} := \{AB : \ A \in \mathscr{A}, \ B \in \mathscr{B}\}.$$

Из этого замечания и предложения 1 вытекает следующая

Теорема 5. Система $\boldsymbol{AB}$, *описываемая уравнением* (28), *асимптотически устойчива в классе всех возмущений* $\mathscr{A}$ *и управлений* $\mathscr{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\rho(\mathscr{A}\mathscr{B}) < 1$.

Менее очевиден вопрос о стабилизируемости системы $\boldsymbol{AB}$. Ограничимся рассмотрением двух вариантов стабилизируемости.

Определение 5. Скажем, что система $\boldsymbol{AB}$, *описываемая уравнением* (28), *потраекторно стабилизируема в классе всех возмущений* $\mathscr{A}$ *объекта* $\boldsymbol{\mathscr{A}}$ *с помощью управлений* $\mathscr{B}$ *контроллера* $\boldsymbol{\mathscr{B}}$, *если для любой последовательности матриц* $\{A_n \in \mathscr{A}\}$ *(возмущений объекта* $\boldsymbol{\mathscr{A}}$*) найдется последовательность матриц* $\{B_n \in \mathscr{B}\}$ *(управлений контроллера* $\boldsymbol{\mathscr{B}}$*), для которых при каждом начальном условии* $\mathbf{x}(0)$ *имеет место сходимость* (29).

О п р е д е л е н и е 6. Скажем, что система $\boldsymbol{AB}$, описываемая уравнением (28), универсально периодически стабилизируема, если найдется такая (универсальная) периодическая последовательность матриц $\{B_n \in \mathscr{B}\}$ (управлений контроллера $\mathscr{B}$), что для каждой последовательности матриц $\{A_n \in \mathscr{A}\}$ (возмущений объекта $\mathscr{A}$) и при каждом начальном условии $\mathbf{x}(0)$ имеет место сходимость (29).

Отметим, что по сути вопрос о стабилизируемости системы $\boldsymbol{AB}$ близок к теоретико-игровым постановкам [87, 88], в которых имеются два игрока — внешние воздействия и управляющий контроллер, которые поочередно воздействуют на систему, причем первый из них стремится сделать систему как можно более неустойчивой, а второй пытается ее стабилизировать.

Ясно, что универсально периодически стабилизируемые системы являются потраекторно стабилизируемыми. Кроме того, в обоих определениях стабилизируемости системы $\boldsymbol{AB}$ условие, что сходимость (29) имеет место при каждом начальном условии $\mathbf{x}(0)$, равносильно условию

$$\|A_n B_n \cdots A_1 B_1\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е 5. Можно было бы ввести поточечные аналоги понятий потраекторной и универсальной стабилизируемости, ср., например, [81], но это не является целью настоящего раздела.

4.3. Минимаксные совместные спектральные радиусы

По аналогии с нижним спектральным радиусом, характеризующим равномерную стабилизируемость неуправляемой системы $\boldsymbol{A}$, описываемой уравнением (26), естественно возникает желание ввести некие числовые величины для характеризации универсальной и потраекторной стабилизируемости управляемой системы $\boldsymbol{AB}$, описываемой уравнением (28). В качестве кандидатов на такие численные величины предложим соответственно величины

$$(30) \qquad \mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}}, \qquad \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}},$$

где при каждом $n = 1, 2, \ldots$

$$(31) \qquad \begin{aligned} \mu_n(\mathscr{A},\mathscr{B}) &= \max_{A_i\in\mathscr{A}} \min_{B_i\in\mathscr{B}} \|A_n B_n \cdots A_1 B_1\|, \\ \eta_n(\mathscr{A},\mathscr{B}) &= \min_{B_i\in\mathscr{B}} \max_{A_i\in\mathscr{A}} \|A_n B_n \cdots A_1 B_1\| \end{aligned}$$

(здесь $\|\cdot\|$ — некоторая норма на пространстве матриц размерности $N \times N$). Так как максимин любой функции не превосходит ее минимакс, то $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) \leqslant \eta(\mathscr{A},\mathscr{B})$, что оправдывает следующее определение.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть $\{\mathscr{A},\mathscr{B}\}$ — пара множеств матриц размерности $N \times M$ и $M \times N$ соответственно. Величину $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B})$ будем называть нижним, а величину $\eta(\mathscr{A},\mathscr{B})$ — верхним минимаксным совместным спектральным радиусом пары $\{\mathscr{A},\mathscr{B}\}$.

Существование пределов в (30) вытекает из следующей леммы 2. Напомним, что в линейной алгебре норма $\|\cdot\|$ в пространстве матриц размерности $N \times N$ называется *субмультипликативной*, если $\|XY\| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$ для любых матриц X и Y. В частности, матричная норма $\|\cdot\|$ субмультипликативна, если она порождается некоторой векторной нормой, т.е. ее значение $\|A\|$ на матрице A определяется равенством $\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$, где $\|\mathbf{x}\|$ и $\|A\mathbf{x}\|$ — нормы соответствующих векторов в $\mathbb{R}^N$.

Лемма 2. *Для любых конечных множеств матриц $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ пределы в* (30) *существуют и не зависят от нормы $\|\cdot\|$. Более того, если норма $\|\cdot\|$ в* (31) *субмультипликативна, то*

$$\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \inf_{n\geqslant 0} \mu_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}}, \qquad \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \inf_{n\geqslant 0} \eta_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}}.$$

Естественно ожидать, что в общем случае $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) \neq \eta(\mathscr{A},\mathscr{B})$, что и подтверждается следующим примером.

Пример 5. Рассмотрим множества $\mathscr{A} = \{A_1, A_2\}$ и $\mathscr{B} = \{B_1, B_2\}$, где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

тогда $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) = 1$ и $\eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) > 1$.

Следующие две теоремы являются основными в настоящем разделе. Они подтверждают, что минимаксные совместные спектральные радиусы действительно могут выступать в качестве характеристик стабилизируемости системы $\boldsymbol{AB}$.

Теорема 6. *Система $\boldsymbol{AB}$, описываемая уравнением* (28), *потраекторно стабилизируема в классе всех возмущений $\mathscr{A}$ и управлений $\mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) < 1$.*

Теорема 7. *Система $\boldsymbol{AB}$, описываемая уравнением* (28), *универсально периодически стабилизируема в классе всех возмущений $\mathscr{A}$ и управлений $\mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $\eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) < 1$.*

4.4. Другие минимаксные характеристики матричных произведений

Согласно [56] в определении (23) совместного спектрального радиуса $\rho(\mathscr{A})$ норма матрицы $\|\cdot\|$ может быть заменена на ее спектральный радиус $\rho(\cdot)$ (с одновременной заменой предела на верхний предел):

$$\rho(\mathscr{A}) = \varlimsup_{n\to\infty} \sup\left\{\rho(A_n\cdots A_1)^{\frac{1}{n}} :\ A_i \in \mathscr{A}\right\}; \tag{32}$$

соответствующее утверждение известно как теорема Бергера—Ванга [56]. Аналогично, если в определении (24) заменить норму $\|\cdot\|$ матрицы на ее спектральный радиус $\rho(\cdot)$, а предел на нижний предел, то получим другую формулу для нижнего спектрального радиуса

$$\check{\rho}(\mathscr{A}) = \varliminf_{n\to\infty} \inf\left\{\rho(A_n\cdots A_1)^{\frac{1}{n}} :\ A_i \in \mathscr{A}\right\}. \tag{33}$$

Для конечных множеств $\mathscr{A}$ справедливость равенства (33) была установлена в [33, теорема B1], а позднее для произвольных множеств $\mathscr{A}$ аналогичное утверждение было доказано в [39, лемма 1.12] и [42, теорема 1].

По аналогии с (32) и (33) для совместного и нижнего спектральных радиусов определим следующие минимаксные характеристики матричных произведений:

$$\hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \bar{\mu}_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}}, \quad \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \bar{\eta}_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}}, \tag{34}$$

$$\check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \bar{\mu}_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}}, \quad \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \bar{\eta}_n(\mathscr{A},\mathscr{B})^{\frac{1}{n}}, \tag{35}$$

где при каждом $n = 1, 2, \ldots$

$$\bar{\mu}_n(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \max_{A_i\in\mathscr{A}} \min_{B_i\in\mathscr{B}} \rho(A_nB_n\cdots A_1B_1),$$
$$\bar{\eta}_n(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \min_{B_i\in\mathscr{B}} \max_{A_i\in\mathscr{A}} \rho(A_nB_n\cdots A_1B_1).$$

Очевидно, наряду с уже введенными нижним и верхним минимаксными спектральными радиусами $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B})$ и $\eta(\mathscr{A},\mathscr{B})$ величины (34) и (35) также могли бы претендовать на роль числовых характеристик, характеризующих стабилизируемость управляемой системы $\boldsymbol{AB}$, описываемой уравнением (28).

Так как спектральный радиус линейного оператора не превосходит его нормы, а величины $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B})$ и $\eta(\mathscr{A},\mathscr{B})$, как отмечалось в лемме 2, от выбора нормы не зависят, то

$$\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) \geqslant \hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \geqslant \check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}), \quad \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) \geqslant \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \geqslant \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}).$$

А так как максимин любой функции не превосходит ее минимакс, то

$$\hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \leqslant \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}), \quad \check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \leqslant \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}).$$

Из примера 5 следует, что в общем случае $\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) \neq \eta(\mathscr{A},\mathscr{B})$. А поскольку все матрицы в примере 5 диагональные, то их нормы совпадают с соответствующими спектральными радиусами. Отсюда следует, что в условиях примера 5 выполняются также неравенства

$$\hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) < \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}), \quad \check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) < \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}).$$

В связи с этим возникает вопрос о существовании классов матриц $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, для которых выполнялись бы равенства

$$\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) \quad \text{и/или} \quad \hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}),\ \check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}). \tag{36}$$

По крайней мере, один класс таких матриц, введенный в [87, 89, 90], описан в следующей теореме.

Теорема 8. *Пусть $\mathscr{A},\mathscr{B}$ — компактные $\mathscr{H}$-множества положительных матриц размерности $N \times M$ и $M \times N$ соответственно. Тогда*

$$\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}).$$

Пусть $\mathscr{A}$ — это множество квадратных матриц размерности $N\times N$, а $\mathscr{I} := \{I\}$ — одноэлементное множество матриц, состоящее из тождественной матрицы размерности $N \times N$. Тогда очевидны соотношения

$$\begin{aligned} \rho(\mathscr{A}) &= \mu(\mathscr{A},\mathscr{I}) = \eta(\mathscr{A},\mathscr{I}) = \hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{I}) = \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{I}),\\ \check{\rho}(\mathscr{A}) &= \mu(\mathscr{I},\mathscr{A}) = \eta(\mathscr{I},\mathscr{A}) = \check{\mu}(\mathscr{I},\mathscr{A}) = \check{\eta}(\mathscr{I},\mathscr{A}). \end{aligned} \tag{37}$$

Замечание 6. Совместный спектральный радиус $\rho(\cdot)$ является в естественном смысле непрерывной и даже локально липшицевой функцией своего аргумента, см. детали и точные формулировки в [11, 91–93]. В то же время нижний спектральный радиус $\check{\rho}(\cdot)$ в общем случае не является непрерывной функцией [11, 41, 43]. Но в силу равенств (37) $\mu(\mathscr{I},\mathscr{A}) = \eta(\mathscr{I},\mathscr{A}) = \check{\rho}(\mathscr{A})$, и поэтому в общем случае ни $\mu(\cdot,\cdot)$, ни $\eta(\cdot,\cdot)$ также не являются непрерывными функциями своих аргументов.

В теории совместного/нижнего спектрального радиуса большую роль играет теорема Бергера—Ванга [33, 39, 42, 56], дающая возможность выразить совместный и нижний спектральные радиусы с помощью равенств (32) и (33) соответственно. В связи с этим возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Имеют ли место равенства

$$\begin{aligned} \mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) &= \hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}), \quad \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}),\\ \mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) &= \check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}), \quad \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \end{aligned} \tag{38}$$

(если верны хоть какие-то), т.е. справедливы ли для соответствующих минимаксных величин аналоги теоремы Бергера—Ванга?

Вопрос 2. Если ответ на вопрос 1 в общем случае отрицателен, то для каких множеств матриц $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ выполняются все или некоторые из равенств (38)?

Хотя теорема 8 и описывает один из случаев, в котором справедливы равенства (36), тем не менее следующий вопрос остается актуальным.

Вопрос 3. Так как согласно примеру 5 в общем случае

$$\mu(\mathscr{A},\mathscr{B}) \neq \eta(\mathscr{A},\mathscr{B}), \quad \hat{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \neq \hat{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}), \quad \check{\mu}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \neq \check{\eta}(\mathscr{A},\mathscr{B}),$$

то для каких множеств матриц $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ выполняются все или некоторые из равенств (36)?

Замечание 7. В теореме 8 вместо множеств $\mathscr{A}\in\mathscr{H}(N,M)$ и $\mathscr{B}\in\mathscr{H}(M,N)$ можно брать множества $\tilde{\mathscr{A}}$ и $\tilde{\mathscr{B}}$, удовлетворяющие включениям

$$\mathscr{A} \subseteq \tilde{\mathscr{A}} \subseteq \operatorname{co}(\mathscr{A}), \quad \mathscr{B} \subseteq \tilde{\mathscr{B}} \subseteq \operatorname{co}(\mathscr{B}), \tag{39}$$

где $\mathscr{A} \in \overline{\mathscr{H}}(N,M)$ и $\mathscr{B} \in \overline{\mathscr{H}}(M,N)$, а символ $\operatorname{co}(\cdot)$ обозначает выпуклую оболочку множества. Справедливость данного замечания вытекает из того факта, что все утверждения, использовавшиеся при доказательстве теоремы 8, доказаны в [90] именно для множеств $\tilde{\mathscr{A}}$ и $\tilde{\mathscr{B}}$, удовлетворяющих включениям (39).

Замечание 8. В разделе 4.2 была предпринята попытка объяснить, почему понятие потраекторной стабилизируемости естественно в теории управления: если имеется последовательность возмущений объекта $\{A_n\}$, то естественно знать, существует ли последовательность "управлений" $\{B_n\}$, которая стабилизирует матричные произведения $A_n B_n \cdots A_1 B_1$. Именно эта проблема изучалась в настоящем разделе.

В то же время немедленно возникает и другой вопрос: даже в том случае, когда есть способы стабилизировать матричные произведения $A_n B_n \cdots A_1 B_1$ за счет выбора подходящих $\{B_n\}$, возможно ли на практике определить (при каждом n) матрицу B_n, используя только информацию о предшествующих матрицах $A_1, \ldots, A_{n-1}$? Это действительно практически важный вопрос, который однако в настоящем разделе не обсуждается. Дополнительное обсуждение данной тематики см., например, в [81].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I // АиТ. 2019. № 4. С.3–40.
2. *Козякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. II // АиТ. 2019. № 5. С. 3–31.
3. *Kozyakin V.* An annotated bibliography on convergence of matrix products and the theory of joint/generalized spectral radius: Preprint. M.: Instit. Inform. Transmiss. Probl., 2013. December. DOI: 10.13140/RG.2.1.4257.5040/1
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
6. *Козякин В.С.* Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем // АиТ. 1990. № 6. С. 41–47. URL: http://www.mathnet.ru/rus/at5386

   Kozyakin V.S. Algebraic Unsolvability of Problem of Absolute Stability of Desynchronized Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 6. P. 754–759.
7. *Blondel V.D., Tsitsiklis J.N.* When is a Pair of Matrices Mortal? // Inform. Process. Lett. 1997. V. 63. No. 5. P. 283–286. DOI: 10.1016/S0020-0190(97)00123-3
8. *Tsitsiklis J.N., Blondel V.D.* The Lyapunov Exponent and Joint Spectral Radius of Pairs of Matrices Are Hard — When Not Impossible — to Compute and to Approximate // Math. Control Signals Syst. 1997. V. 10. No. 1. P. 31–40. DOI: 10.1007/BF01219774
9. *Tsitsiklis J.N., Blondel V.D.* Lyapunov Exponents of Pairs of Matrices. A Correction: "The Lyapunov Exponent and Joint Spectral Radius of Pairs of Matrices Are Hard — When Not Impossible — to Compute and to Approximate" // Math. Control Signals Syst. 1997. V. 10. No. 4. P. 381. DOI: 10.1007/BF01211553
10. *Blondel V.D., Tsitsiklis J.N.* The Boundedness of All Products of a Pair of Matrices Is Undecidable // Syst. Control Lett. 2000. V. 41. No. 2. P. 135–140. DOI: 10.1016/S0167-6911(00)00049-9
11. *Jungers R.* The joint spectral radius. Berlin: Springer-Verlag, 2009. V. 385 of Lecture Notes Control Inform. Sci. Theory and applications. DOI: 10.1007/978-3-540-95980-9

12. *Gripenberg G.* Computing the Joint Spectral Radius // Linear Algebra Appl. 1996. V. 234. P. 43–60. DOI: 10.1016/0024-3795(94)00082-4

13. *Maesumi M.* Calculating the spectral radius of a set of matrices / Wavelet analysis and multiresolution methods (Urbana-Champaign, IL, 1999). N.Y.: Dekker, 2000. V. 212 of Lecture Notes Pure Appl. Math. P. 255–272.

14. *Blondel V.D., Nesterov Yu.* Computationally Efficient Approximations of the Joint Spectral Radius // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. V. 27. No. 1. P. 256–272 (electronic). DOI: 10.1137/040607009

15. *Parrilo P.A., Jadbabaie A.* Approximation of the Joint Spectral Radius of a Set of Matrices Using Sum of Squares / Hybrid systems: computation and control. Berlin: Springer, 2007. V. 4416 of Lecture Notes Comput. Sci. P. 444–458. DOI: 10.1007/978-3-540-71493-4_35

16. *Guglielmi N., Zennaro M.* An Algorithm for Finding Extremal Polytope Norms of Matrix Families // Linear Algebra Appl. 2008. V. 428. No. 10. P. 2265–2282. DOI: 10.1016/j.laa.2007.07.009

17. *Kozyakin V.* Iterative Building of Barabanov Norms and Computation of the Joint Spectral Radius for Matrix Sets // Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2010. V. 14. No. 1. P. 143–158. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.143

18. *Chang C.-T., Blondel V.* Approximating the Joint Spectral Radius Using a Genetic Algorithm Framework // Proc. 18 IFAC World Congr. / IFAC. 2011. V. 18. P. 1. P. 8681–8686.

19. *Kozyakin V.* A Relaxation Scheme for Computation of the Joint Spectral Radius of Matrix Sets // J. Difference Equat. Appl. 2011. V. 17. No. 2. P. 185–201. DOI: 10.1080/10236198.2010.549008

20. *Vankeerberghen G., Hendrickx J., Jungers R. et al.* The JSR Toolbox. MATLAB® Central. 2011. http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33202-the-jsr-toolbox

21. *Cicone A., Protasov V.* Joint spectral radius computation. MATLAB® Central. 2012. http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/36460-joint-spectral-radius-computation

22. *Ahmadi A.A., Jungers R.M.* Switched Stability of nonlinear systems via SOS-convex Lyapunov Functions and Semidefinite Programming // Proc. 52. IEEE Ann. Conf. Decision. Control (CDC). 2013. P. 727–732. DOI: 10.1109/CDC.2013.6759968

23. *Bajovic D., Xavier J., Moura J. M.F., Sinopoli B.* Consensus and Products of Random Stochastic Matrices: Exact Rate for Convergence in Probability // IEEE Transact. Signal Proc. 2013. V. 61. No. 10. P. 2557–2571. DOI: 10.1109/TSP.2013.2248003

24. *Chang C.-T., Blondel V.D.* An Experimental Study of Approximation Algorithms for the Joint Spectral Radius // Numer. Algorithms. 2013. V. 64. No. 1. P. 181–202. DOI: 10.1007/s11075-012-9661-z

25. *Guglielmi N., Protasov V.* Exact Computation of Joint Spectral Characteristics of Linear Operators // Found. Comput. Math. 2013. V. 13. No. 1. P. 37–97. DOI: 10.1007/s10208-012-9121-0

26. *Vankeerberghen G., Hendrickx J., Jungers R.M.* JSR: a toolbox to compute the joint spectral radius // Proc. 17. Int. Conf. Hybrid Syst.: Comput. Control. HSCC'14. N.Y.: ACM, 2014. P. 151–156. DOI: 10.1145/2562059.2562124

27. *Chevalier P.-Y., Hendrickx J.M., Jungers R.M.* Efficient Algorithms for the Consensus Decision Problem // SIAM J. Control Optim. 2015. V. 53. No. 5. P. 3104–3119. DOI: 10.1137/140988024

28. *Protasov V.Yu.* Spectral Simplex Method // Math. Program. 2016. V. 156. No. 1–2, Ser. A. P. 485–511. DOI: 10.1007/s10107-015-0905-2

29. *Kozyakin V.S.* Constructive Stability and Stabilizability of Positive Linear Discrete-Time Switching Systems // J. Commun. Technol. Electron. 2017. V. 62. No. 6. P. 686–693. DOI: 10.1134/S1064226917060110

30. *Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Устойчивость рассинхронизованных систем // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 5. С. 1053–1056.

31. *Барабанов Н.Е.* О показателе Ляпунова дискретных включений. I–III // АиТ. 1988. № 2. С. 40–46; № 3. С. 24–29; № 5. С. 17–24.

    Barabanov N.E. The Lyapunov Indicator of Discrete Inclusions. I–III // Autom. Remote Control. 1988. V. 49. No. 2. P. 152–157; No. 3. P. 283–287; No. 5. P. 558–565.

32. *Козякин В.С.* Об абсолютной устойчивости систем с несинхронно работающими импульсными элементами // АиТ. 1990. № 10. С. 56–63. http://www.mathnet.ru/rus/at5981

    Kozyakin V.S. Absolute Stability of Systems with Asynchronous Sampled-Data Elements // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 10. P. 1349–1355.

33. *Gurvits L.* Stability of Discrete Linear Inclusion // Linear Algebra Appl. 1995. V. 231. P. 47–85. DOI: 10.1016/0024-3795(95)90006-3

34. *Kozyakin V.* A Short Introduction to Asynchronous Systems // Proc. Sixth Int. Conf. Difference Equat. Boca Raton, FL: CRC, 2004. P. 153–165.

35. *Shorten R., Wirth F., Mason O. et al.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. V. 49. No. 4. P. 545–592. DOI: 10.1137/05063516X

36. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54. No. 2. P. 308–322. DOI: 10.1109/TAC.2008.2012009

37. *Fornasini E., Valcher M.E.* Stability and Stabilizability Criteria for Discrete-Time Positive Switched Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. V. 57. No. 5. P. 1208–1221. DOI: 10.1109/TAC.2011.2173416

38. *Rota G.-C., Strang G.* A Note on the Joint Spectral Radius // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 63 = Indag. Math. 1960. V. 22. P. 379–381.

39. *Theys J.* Joint spectral radius: theory and approximations: Ph. D. thesis / Faculté des sciences appliquées, Département d'ingénierie mathématique, Center for Systems Engineering and Applied Mechanics. Université Catholique de Louvain, 2005. 189 p. http://dial.academielouvain.be/vital/access/manager/Repository/boreal:5161

40. *Shen J., Hu J.* Stability of Discrete-Time Switched Homogeneous Systems on Cones and Conewise Homogeneous Inclusions // SIAM J. Control Optim. 2012. V. 50. No. 4. P. 2216–2253. DOI: 10.1137/110845215

41. *Bochi J., Morris I.D.* Continuity Properties of the Lower Spectral Radius // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 2015. V. 110. No. 2. P. 477–509. DOI: 10.1112/plms/pdu058

42. *Czornik A.* On the Generalized Spectral Subradius // Linear Algebra Appl. 2005. V. 407. P. 242–248. DOI: 10.1016/j.laa.2005.05.006

43. *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic Height Optimization for Topical IFS, Tetris Heaps, and the Finiteness Conjecture // J. Amer. Math. Soc. 2002. V. 15. No. 1. P. 77–111 (electronic). DOI: 10.1090/S0894-0347-01-00378-2

44. *Blondel V.D., Theys J., Vladimirov A.A.* Switched systems that are periodically stable may be unstable // Proc. Sympos. MTNS. Notre-Dame, USA: 2002. http://www3.nd.edu/~mtns/papers/10181.pdf

45. *Kozyakin V.* A Dynamical Systems Construction of a Counterexample to the Finiteness Conjecture // Proc. 44 IEEE Conf. Decision Control, 2005 and 2005 Eur. Control Conf. CDC-ECC'05. 2005. P. 2338–2343. DOI: 10.1109/CDC.2005.1582511

46. *Czornik A., Jurgaś P.* Falseness of the Finiteness Property of the Spectral Subradius // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. No. 2. P. 173–178. DOI: 10.2478/v10006-007-0016-1

47. *Blondel V.D., Nesterov Yu.* Polynomial-time Computation of the Joint Spectral Radius for Some Sets of Nonnegative Matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2009. V. 31. No. 3. P. 865–876. DOI: 10.1137/080723764

48. *Duffin R.J.* Topology of Series-Parallel Networks // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 10. P. 303–318. DOI: 10.1016/0022-247X(65)90125-3

49. *Eppstein D.* Parallel Recognition of Series-Parallel Graphs // Inform. Comput. 1992. V. 98. No. 1. P. 41–55. DOI: 10.1016/0890-5401(92)90041-D

50. *Dai X.* Robust Periodic Stability Implies Uniform Exponential Stability of Markovian Jump Linear Systems and Random Linear Ordinary Differential Equations // J. Franklin Inst. 2014. May. V. 351. No. 5. P. 2910–2937. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2014.01.010

51. *Kozyakin V.* The Berger–Wang Formula for the Markovian Joint Spectral Radius // Linear Algebra Appl. 2014. May. V. 448. P. 315–328. DOI: 10.1016/j.laa.2014.01.022

52. *Kozyakin V.* Matrix Products with Constraints on the Sliding Block Relative Frequencies of Different Factors // Linear Algebra Appl. 2014. September. V. 457. P. 244–260. DOI: 10.1016/j.laa.2014.05.016

53. *Shih M.-H., Wu J.-W., Pang C.-T.* Asymptotic Stability and Generalized Gelfand Spectral Radius Formula // Linear Algebra Appl. 1997. V. 252. P. 61–70. DOI: 10.1016/0024-3795(95)00592-7

54. *Daubechies I., Lagarias J.C.* Sets of Matrices All Infinite Products of Which Converge // Linear Algebra Appl. 1992. V. 161. P. 227–263. DOI: 10.1016/0024-3795(92)90012-Y

55. *Daubechies I., Lagarias J.C.* Corrigendum/addendum to: "Sets of matrices all infinite products of which converge" [Linear Algebra Appl. **161** (1992), 227–263; // Linear Algebra Appl. 2001. V. 327. No. 1–3. P. 69–83. DOI: 10.1016/S0024-3795(00)00314-1

56. *Berger M.A., Wang Y.* Bounded Semigroups of Matrices // Linear Algebra Appl. 1992. V. 166. P. 21–27. DOI: 10.1016/0024-3795(92)90267-E

57. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

58. *Kitchens B.P.* Symbolic dynamics. Universitext. Berlin: Springer-Verlag, 1998. DOI: 10.1007/978-3-642-58822-8

59. *Fekete M.* Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. 1923. Bd. 17. H. 1. S. 228–249. DOI: 10.1007/BF01504345

60. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. I. М.: Наука, 1978.

61. *Elsner L.* Proc. Workshop "Nonnegat. Matric., Appl. General." and the Eighth Haifa Matrix Theory Conf. (Haifa, 1993). 1995. V. 220. P. 151–159. DOI: 10.1016/0024-3795(93)00320-Y

62. *Bochi J.* Inequalities for Numerical Invariants of Sets of Matrices // Linear Algebra Appl. 2003. V. 368. P. 71–81. DOI: 10.1016/S0024-3795(02)00658-4

63. *Dai X.* Extremal and Barabanov Semi-Norms of a Semigroup Generated by a Bounded Family of Matrices // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 379. No. 2. P. 827–833. DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.12.059

64. *Protasov V.* Applications of the joint spectral radius to some problems of functional analysis, probability and combinatorics // Proc. 44. IEEE Conf. Decision. Control Eur. Control Conf. 2005, Seville, Spain, December 12–15. 2005. P. 3025–3030.

65. *Jungers R.M., Protasov V., Blondel V.D.* Efficient Algorithms for Deciding the Type of Growth of Products of Integer Matrices // Linear Algebra Appl. 2008. V. 428. No. 10. P. 2296–2311. DOI: 10.1016/j.laa.2007.08.001

66. *Guglielmi N., Zennaro M.* Stability of Linear Problems: Joint Spectral Radius of Sets of Matrices // Current Challeng. Stabil. Issues Numer. Differ. Equat. Springer, 2014. Lecture Notes. Math. P. 265–313. DOI: 10.1007/978-3-319-01300-8_5

67. *Dai X., Huang Y., Xiao M.* Almost Sure Stability of Discrete-Time Switched Linear Systems: A Topological Point of View // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47. No. 4. P. 2137–2156. DOI: 10.1137/070699676

68. *Dai X., Huang Y., Xiao M.* Periodically Switched Stability Induces Exponential Stability of Discrete-Time Linear Switched Systems in the Sense of Markovian Probabilities // Automatica J. IFAC. 2011. V. 47. No. 7. P. 1512–1519. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.02.034

69. *MacKay D. J.C.* Information theory, inference and learning algorithms. N.Y.: Cambridge Univer. Press, 2003.
URL: http://www.inference.phy.cam.ac.uk/itprnn/book.pdf.

70. *Moision B.E., Orlitsky A., Siegel P.H.* Bounds on the Rate of Codes Which Forbid Specified Difference Sequences // Global Telecom. Conf., 1999. GLOBECOM '99. V. 1b. Rio de Janeiro: 1999. P. 878–882.

71. *Moision B.E., Orlitsky A., Siegel P.H.* On Codes That Avoid Specified Differences // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. V. 47. No. 1. P. 433–442. DOI: 10.1109/18.904557

72. *Immink K. A.S.* Codes for mass data storage systems. Second edition. Eindhoven, The Netherlands: Shannon Foundation Publishers, 2004. URL:
http://www.exp-math.uni-essen.de/~immink/pdf/codes_for_mass_data2.pdf.

73. *Lind D., Marcus B.* An introduction to symbolic dynamics and coding. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1995. DOI: 10.1017/CBO9780511626302

74. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1995. V. 54 of Encyclop. Math. Appl.

75. *Choi Y., Szpankowski W.* Pattern matching in constrained sequences // Pro. IEEE Int. Sympos. Inform. Theory 2007 (ISIT), Nice, France, June 24–29. 2007. P. 2606–2610. DOI: 10.1109/ISIT.2007.4557611

76. *Ferenczi S., Monteil T.* Infinite words with uniform frequencies, and invariant measures // Combinat., Automat. Number Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. V. 135. Encyclop. Math. Appl. P. 373–409.
URL: http://www.lirmm.fr/~monteil/papiers/fichiers/CANT-ch07.pdf

77. *Kozyakin V.* Minimax Joint Spectral Radius and Stabilizability of Discrete-Time Linear Switching Control Systems // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2018. V. 22. No. 1531-3492_2017_11_206. P. 20. DOI: 10.3934/dcdsb.2018277

78. *Dai X.* A Gel'fand-Type Spectral-Radius Formula and Stability of Linear Constrained Switching Systems // Linear Algebra Appl. 2012. V. 436. No. 5. P. 1099–1113. DOI: 10.1016/j.laa.2011.07.029

79. *Jungers R.M.* On Asymptotic Properties of Matrix Semigroups with an Invariant Cone // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. No. 5. P. 1205–1214. DOI: 10.1016/j.laa.2012.04.006

80. *Dai X., Huang Y., Xiao M.* Pointwise Stability of Descrete-Time Stationary Matrix-Valued Markovian Processes // IEEE Trans. Automat. Control. 2015. V. 60. No. 7. P. 1898–1903. DOI: 10.1109/TAC.2014.2361594

81. *Jungers R.M., Mason P.* On Feedback Stabilization of Linear Switched Systems via Switching Signal Control // SIAM J. Control Optim. 2017. V. 55. No. 2. P. 1179–1198. DOI: 10.1137/15M1027802

82. *Sun Z., Ge S.S.* Switched linear systems: control and design / Communications and Control Engineering. London: Springer, 2005.

83. *Stanford D.P., Urbano J.M.* Some Convergence Properties of Matrix Sets // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1994. V. 15. No. 4. P. 1132–1140.
DOI: 10.1137/S0895479892228213

84. *Stanford D.P.* Stability for a Multi-Rate Sampled-Data System // SIAM J. Control Optim. 1979. V. 17. No. 3. P. 390–399. DOI: 10.1137/0317029

85. *Dai X., Huang Y., Liu J., Xiao M.* The Finite-Step Realizability of the Joint Spectral Radius of a Pair of $d \times d$ Matrices One of Which Being Rank-One // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. No. 7. P. 1548–1561. DOI: 10.1016/j.laa.2012.04.053

86. *Dai X.* Some Criteria for Spectral Finiteness of a Finite Subset of the Real Matrix Space $\mathbb{R}^{d\times d}$ // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438. No. 6. P. 2717–2727. DOI: 10.1016/j.laa.2012.09.026

87. *Asarin E., Cervelle J., Degorre A. et al.* Entropy games and matrix multiplication games // 33rd Sympos. Theoret. Aspect. Comput. Sci., (STACS 2016) / Ed. by N. Ollinger, H. Vollmer. V. 47 of LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016. P. 11:1–11:14. DOI: 10.4230/LIPIcs.STACS.2016.11

88. *Bouyer P., Markey N., Randour M. et al.* Average-Energy Games // Acta Inform. 2016. Jul. P. 1–37. DOI: 10.1007/s00236-016-0274-1

89. *Козякин В.С.* Конструктивная устойчивость и стабилизируемость положительных линейных переключающихся систем с дискретным временем // Информационные процессы. 2016. Т. 16. № 2. С. 194–206.
URL: http://www.jip.ru/2016/194-206-2016.pdf

90. *Kozyakin V.* Minimax Theorem for the Spectral Radius of the Product of Non-Negative Matrices // Linear Multilinear Algebra. 2017. V. 65. No. 11. P. 2356–2365. DOI: 10.1080/03081087.2016.1273877

91. *Heil C., Strang G.* Continuity of the joint spectral radius: application to wavelets / Linear algebra for signal processing (Minneapolis, MN, 1992). N.Y.: Springer, 1995. V. 69 of IMA Vol. Math. Appl. P. 51–61.

92. *Wirth F.* The Generalized Spectral Radius and Extremal Norms // Linear Algebra Appl. 2002. V. 342. P. 17–40. DOI: 10.1016/S0024-3795(01)00446-3

93. *Kozyakin V.* An Explicit Lipschitz Constant for the Joint Spectral Radius // Linear Algebra Appl. 2010. V. 433. No. 1. P. 12–18. DOI: 10.1016/j.laa.2010.01.028

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 17.09.2018

После доработки 22.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018