Автоматика и телемеханика, № 6, 2019

Нелинейные системы

© 2019 г. С.Е. КУПЦОВА, канд. физ.-мат. наук (sekuptsova@yandex.ru),
Н.А. СТЕПЕНКО, канд. физ.-мат. наук (nick_st@mail.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет),
С.Ю. КУПЦОВ, канд. физ.-мат. наук (srgkuptsov@yandex.ru)
(ООО “О.Г.С. Руссия”, Санкт-Петербург)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПОКОЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Исследуется предельное поведение решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Рассматривается случай, когда у решений системы существует нулевое предельное положение, которое может не являться инвариантным множеством рассматриваемой системы. Вводится понятие асимптотического положения покоя для траекторий систем с запаздыванием. Исследование проводится методом функций Ляпунова при использовании подхода Разумихина. Получены достаточные условия существования асимптотического положения покоя в одном классе систем дифференциально-разностных уравнений. Приведены примеры нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, имеющих асимптотическое положение покоя, на которых продемонстрировано применение полученных результатов.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, нелинейные системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, асимптотическое положение покоя, функция Ляпунова, подход Разумихина.

DOI: 10.1134/S0005231019060023

1. Введение

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом широко применяются для описания и моделирования различных динамических процессов, в которых необходимо учитывать зависимость скорости процесса не только от текущего, но и от прошлых состояний системы. Развитие теории устойчивости движений систем дифференциально-разностных уравнений, берущее начало в работах Н.Н. Красовского [1], Р. Беллмана и К.Л. Кука [2], Дж. Хейла [3] и В.И. Зубова [4, 5], актуально и по сей день. В предложенной статье затрагивается вопрос появления в системах дифференциально-разностных уравнений асимптотических положений покоя. Понятие асимптототического положения покоя для систем дифференциальных уравнений было введено В.И. Зубовым в [6] в связи с необходимостью изучения таких движений, которые имеют предельное поведение при неограниченном возрастании времени, причем сами предельные множества не являются инвариантными множествами исходных дифференциальных уравнений. Исследование таких движений для систем дифференциальных уравнений проводилось в [7–10], для систем разностных уравнений — в [11, 12]. В настоящей статье это понятие распространяется на системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Основным методом исследования качественного поведения решений систем дифференциальных уравнений является второй метод Ляпунова. Для дифференциально-разностных уравнений этот метод разделяется на два подхода. В первом, который получил название подход Красовского, в качестве функций Ляпунова для исследования устойчивости уравнений предлагается использовать функционалы Ляпунова–Красовского. Во втором, который получил название подход Разумихина [13, 14], уравнения движения исследуются при помощи классической функции Ляпунова, но оценка производной этой функции в силу системы оценивается не на всем множестве интегральных кривых, а на некотором его подмножестве. В данной статье исследование поведения решений систем дифференциально-разностных уравнений проводится при помощи подхода Разумихина.

В широком классе случаев асимптотическое положение покоя возникает в системах с возмущениями, причем если возмущения являются исчезающими с течением времени, то появление асимптотического положения покоя вполне ожидаемо в том случае, если невозмущенная система имела асимптотически устойчивое нулевое решение. Некоторые достаточные условия существования асимптотического положения покоя для такого рода возмущений были получены в [15, 16]. Но асимптотическое положение покоя может возникать и в таких системах, где возмущения вовсе не стремятся к нулю и могут принимать сколь угодно большие значения. Один такой класс систем исследуется в данной статье.

2. Основные определения и понятия

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^\top$ — неизвестный n-мерный вектор, $h > 0$ — запаздывание, $f(t, x, y) = (f_1, \dots, f_n)^\top$ — n-мерная вектор-функция, относительно которой предполагаем, что она определена и непрерывна на множестве $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам начиная со второго, т.е. для любого числа $H > 0$ найдется число $L = L(H) \geqslant 0$ такое, что для любых n-мерных векторов x, $\bar{x}$, y и $\bar{y}$, удовлетворяющих условиям $\|x\| \leqslant H$, $\|\bar{x}\| \leqslant H$, $\|y\| \leqslant H$, $\|\bar{y}\| \leqslant H$, и для любого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| \leqslant L\big(\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|\big).$$

Под $\|z\|$ здесь и далее понимается евклидова норма вектора.

Обозначим через $PC\big([a, b], \mathbb{R}^n\big)$ бесконечномерное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ n-мерных вектор-функций с конечным числом точек разрыва первого рода, через $x(t, t_0, \varphi)$ — решение системы (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x(t, t_0, \varphi) \equiv \varphi(t - t_0)$ при

$t \in [t_0 - h, t_0]$ и $\varphi \in PC\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$. Здесь и далее предполагаем, что $t_0 \in \mathbb{R}^1_+$, где $\mathbb{R}^1_+ = \big\{t \in \mathbb{R}^1 \;\big|\; t \geqslant 0\big\}$. Известно из [3, с. 45], что при выполнении условий, наложенных на правую часть системы, найдется $\beta > 0$ такое, что $x(t,t_0,\varphi)$ будет продолжимо по крайней мере на множество $[t_0 - h, t_0 + \beta]$, причем $x(t,t_0,\varphi)$ будет непрерывной функцией на отрезке $[t_0, t_0 + \beta]$.

Под состоянием системы в момент $t \geqslant t_0$ будем понимать сегмент решения $x(t,t_0,\varphi)$, принадлежащий отрезку $[t-h,t]$, т.е.

$$x_t(t_0,\varphi) : s \to x(t+s,t_0,\varphi), \quad s \in [-h,0].$$

При этом начальное состояние системы определится так:

$$x_{t_0}(t_0,\varphi) : s \to \varphi(s), \quad s \in [-h,0].$$

Обозначим $X = PC\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$ и пусть φ – произвольный элемент множества X. Введем норму φ:

$$\|\varphi\|_h = \sup_{s\in[-h,0]} \|\varphi(s)\|.$$

Определение 1. Положение $x = 0$ назовем асимптотическим положением покоя для траекторий системы (1), если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|\varphi\|_h < \varepsilon$ решение $x(t,t_0,\varphi)$ системы (1) будет определено на множестве $t \geqslant t_0$ и

$$\|x(t,t_0,\varphi)\| \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad t \longrightarrow +\infty. \tag{2}$$

Определение 2. Положение $x = 0$ назовем асимптотическим положением покоя в целом, если все решения системы (1) определены на множестве $t \geqslant t_0$ и обладают свойством (2).

Пусть при каждом $t \in \mathbb{R}^1_+$ на множестве X определен функционал $W(t,\varphi)$. Под функционалом будем понимать отображение $W : \mathbb{R}^1_+ \times X \to \mathbb{R}^1$.

Определение 3. Функционал $W(t,\varphi)$ будем называть непрерывным на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times X$, если для любых $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}^1_+$ и $\varphi \in X$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любых $\tau \in \mathbb{R}^1_+$ и $\psi \in X$, удовлетворяющих соотношению $|t-\tau| + \|\varphi - \psi\|_h < \delta$, выполнено $|W(t,\varphi) - W(\tau,\psi)| < \varepsilon$.

Рассмотрим непрерывную на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n$ функцию $Z(t,x)$.

Определение 4 [6, с. 87]. *Будем говорить, что функция $Z(t,x)$ "слабо" стремится к нулю при $t \to +\infty$, если*

$$\int_a^b Z\big(t,x(t)\big)dt \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad a \longrightarrow +\infty$$

для любых конечных чисел a и b $(a < b)$ при любом выборе непрерывной функции $x(t)$, заданной и ограниченной на множестве $t \geqslant 0$.

Рассмотрим непрерывную на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n$ функцию $V(t,x)$. После подстановки в $V(t,x)$ решения $x(t,t_0,\varphi)$ получим функцию времени $v(t) = V\big(t,x(t,t_0,\varphi)\big)$. Под производной функции $V(t,x)$ вдоль решений системы (1) будем понимать производную по времени от функции $v(t)$ и обозначать ее $\dot V|_{(1)}$. В случае существования у $V(t,x)$ частных производных $\dot V|_{(1)}$ может быть найдена так:

$$\dot V|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \big(\nabla V, f\big) = W(t,x_t). \tag{3}$$

Понятно, что для рассматриваемых в статье систем, функционал $W(t,x_t) = \widetilde{W}(t,x(t),x(t-h))$.

Определение 5. Функционал $W(t,\varphi)$ будем называть равномерно ограниченным по отношению к $t \geqslant 0$ на множестве $\|\varphi\|_h \leqslant H$, если существует константа $M = M(H) > 0$ такая, что

$$\sup_{s\in[-h,0]} \big|W\big(t,\varphi(t+s)\big)\big| \leqslant M$$

для всех $t \geqslant 0$ и любой $\varphi \in X$, удовлетворяющей соотношению $\|\varphi(t+s)\|_h \leqslant H$.

Если $W(t,x_t) = \widetilde{W}(t,x(t),x(t-h))$, то под равномерной ограниченностью функционала будем понимать равномерную ограниченность по отношению к $t \geqslant 0$ функции $\widetilde{W}(t,x,y)$ на множестве $\|x\| \leqslant H$ и $\|y\| \leqslant H$.

Определение 6. Будем говорить, что функционал $W(t,\varphi)$ “слабо” стремится к нулю при $t \to +\infty$, если

$$\sup_{s\in[-h,0]} \Big|\int_a^b W\big(t,\varphi(t+s)\big)dt\Big| \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad a \longrightarrow +\infty$$

для любых конечных чисел a и b $(a < b)$ при любом выборе непрерывной функции $\varphi(t)$, заданной и ограниченной на множестве $t \geqslant 0$.

Введем еще одно вспомогательное определение, которое будем использовать в доказательствах теорем.

Определение 7. Пусть $v(t)$ – непрерывная на множестве $t \geqslant t_0$ функция. Будем говорить, что для некоторого числа c точка $t_1 > t_0$ обладает свойством (A) на множестве $t \in [t_1-\Delta, t_1]$, если для некоторого $\Delta > 0$ будут выполнены соотношения:

$$\begin{cases} v(t_1) = c, \\ v(t) < c, \quad t \in [t_1-\Delta, t_1). \end{cases}$$

3. Условия существования асимптотического положения покоя

3.1. Достаточные условия существования локального асимптотического положения покоя

Пусть H — некоторое положительное число. Обозначим

$$\Omega = \big\{(t,x) \,\big|\, t \in \mathbb{R}^1_+,\ \|x\| \leqslant H\big\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если для системы (1) *существуют непрерывно дифференцируемая на множестве Ω функция $V(t,x)$, непрерывная на множестве $r \geqslant 0$ функция $g(r)$ и непрерывный на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times X$ функционал $W(t,x_t)$, такие что:*

1) *$g(r)$ — строго монотонно возрастает на множестве $r \geqslant 0$ и удовлетворяет условию $g(r) > r$ при $r > 0$;*
2) *$V(t,x)$ положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел;*
3) *$\dot V|_{(1)} = W(t,x_t)$, где функционал $W(t,x_t)$ равномерно ограничен по отношению к $t \geqslant 0$ на множестве $\|x_t\|_h \leqslant H$ и таков, что вдоль интегральных кривых системы* (1), *удовлетворяющих условию $V\bigl(\xi, x(\xi,t_0,\varphi)\bigr) \leqslant g\bigl(V\bigl(t,x(t,t_0,\varphi)\bigr)\bigr)$ для всех $\xi \in [t-h,t)$, допускает оценку*

$$W(t,x_t) \leqslant Z(t,x) + Z_1(t,x),$$

где функция $Z(t,x)$ отрицательно определена на множестве Ω, а функция $Z_1(t,x)$ "слабо" стремится к нулю при $t \to +\infty$;

4) *существуют числа $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leqslant H$ такие, что*

$$\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_1,\ t\geqslant 0} V(t,x) < \inf_{\|x\|=\varepsilon_2,\ t\geqslant 0} V(t,x)$$

и $Z(t,x)+Z_1(t,x) < 0$ при $\|x\| \in [\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ и $t \geqslant 0$,

— тогда $x = 0$ является асимптотическим положением покоя для траекторий системы (1).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольный момент $t_0 \geqslant 0$, произвольную кусочно-непрерывную на $[t_0-h,t_0]$ начальную функцию $\varphi(t)$ и интегральную кривую $x(t,t_0,\varphi)$.

Замечание 1. По условиям теоремы 1 функционал $W(t,x_t)$ задан и непрерывен на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times X$, следовательно, у функции $v(t) = V(t,x(t,t_0,\varphi))$ будет существовать производная $\dot v(t) = w(t) = W(t,x_t(t_0,\varphi))$ на всем интервале существования решения $t \in \bigl[t_0, T(t_0,\varphi)\bigr)$ за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, расположенных на множестве $[t_0,t_0+h] \bigcap \bigl[t_0,T(t_0,\varphi)\bigr)$. Причем если ξ является точкой, в которой у функции $v(t)$ не существует производной, то в этой точке будут определены $\dot v_-(\xi)$ и $\dot v_+(\xi)$ — левая и правая производные функции $v(t)$ в точке ξ соответственно, которые будут удовлетворять равенствам:

$$\dot v_-(\xi) = \lim_{t\to\xi-0} w(t) \quad \text{и} \quad \dot v_+(\xi) = \lim_{t\to\xi+0} w(t).$$

1. Покажем, что если $\|\varphi\|_h < \varepsilon_1$, то

$$\|x(t,t_0,\varphi)\| < \varepsilon_2 \quad \text{для любого} \quad t \geqslant t_0. \tag{4}$$

Пусть это не так, тогда найдется момент $t_* > t_0$ такой, что $\|x(t_*)\| = \varepsilon_2$ и $\|x(t)\| < \varepsilon_2$ при $t \in [t_0, t_*)$. Определим числа

$$l_1 = \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon_1,\ t \geqslant 0} V(t,x) \quad \text{и} \quad l_2 = \inf_{\|x\| = \varepsilon_2,\ t \geqslant 0} V(t,x)$$

и рассмотрим функцию $v(t)$. В силу выполнения неравенств $v(t_0) \leqslant l_1$, $v(t_*) \geqslant l_2$, $l_1 < l_2$ и непрерывности $v(t)$ для числа l_2 найдется точка $t_1 > t_0$, обладающая свойством (A) на множестве $t \in [t_0 - h, t_1]$, тогда, с одной стороны, $\dot v_-(t_1) \geqslant 0$. С другой стороны, в силу выполнения третьего и четвертого условий теоремы 1 $\dot v_-(t_1) < 0$. Полученное противоречие говорит о том, что указанного момента t_* не существует, т.е. выполнено соотношение (4).

2. Покажем, что $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ при $t \to +\infty$. Для этого достаточно показать, что $v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, т.е. что для любого $\gamma > 0$ найдется момент $T = T(\gamma) > 0$ такой, что

$$v(t) \leqslant \gamma \quad \text{при} \quad t \geqslant T. \tag{5}$$

Обозначим через Γ множество всех чисел γ, для которых соотношение (5) выполнено. Это множество не пусто, так как число l_2 из п. 1 доказательства теоремы 1 принадлежит Γ. Заметим, что для доказательства утверждения п. 2 достаточно установить, что $\inf \Gamma = 0$. Предположим, что это не так, пусть

$$\inf \Gamma = \gamma_0 > 0. \tag{6}$$

Из свойств функции g следует, что существует $\eta_0 = \eta_0(\gamma_0) > 0$ такая, что

$$g(r) - r > 2\eta_0 \quad \text{при} \quad \gamma_0 - \eta_0 \leqslant r \leqslant \gamma_0 + \eta_0. \tag{7}$$

Заметим, что если соотношение (7) справедливо для некоторого $\eta_0 > 0$, то оно остается справедливым для всех $\eta \in (0, \eta_0)$, в частности и для $\eta = \eta_0/2$.

Число $\gamma_0 + \eta_0 \in \Gamma$, следовательно, существует момент $T_0 \geqslant t_0 + h$ такой, что $v(t) \leqslant \gamma_0 + \eta_0$ при $t \geqslant T_0$. Число $\gamma_0 - \eta_0 \notin \Gamma$, следовательно, возможны два случая:

(а) существует момент $T_1 \geqslant T_0$ такой, что $v(t) > \gamma_0 - \eta_0$ для любого $t \geqslant T_1$;

(б) существуют последовательности $t_k \to +\infty$ и $t^k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $t^1 > T_0$ и $t_1 > T_0$ такие, что $v(t_k) < \gamma_0 - \eta_0$ и $v(t^k) > \gamma_0 - \eta_0$.

В случае (а) на всем множестве $t \geqslant T_1$ будут справедливы неравенства $\gamma_0 - \eta_0 < v(t) < \gamma_0 + \eta_0$, тогда из (7) получим, что на том же множестве $g(v(t)) - v(t) > 2\eta_0$ и, следовательно, $g(v(t)) > v(t) + 2\eta_0 > \gamma_0 + \eta_0$. Тогда для всех $t \geqslant T_1$ будет выполнено неравенство

$$v(\xi) < \gamma_0 + \eta_0 < g(v(t)) \quad \text{для любого} \quad \xi \in [t - h, t)$$

и, следовательно, исходя из третьего условия теоремы 1, при $t \geqslant T_1$ будет справедлива оценка

$$\dot v(t) \leqslant Z\bigl(t, x(t, t_0, \varphi)\bigr) + Z_1\bigl(t, x(t, t_0, \varphi)\bigr). \tag{8}$$

Из второго условия теоремы 1 следует, что существуют положительно определенные на множестве $\|x\| \leqslant H$ функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ такие, что

$$V_1(x) \leqslant V(t,x) \leqslant V_2(x) \quad \text{для всех} \quad (t,x) \in \Omega.$$

Определим числа

$$l_3 = \max_{\|x\| \leqslant \varepsilon_2} V_2(x) \quad \text{и} \quad \beta = \min_{\gamma_0 - \eta_0 \leqslant V_2(x) \leqslant l_3} \|x\|.$$

Из отрицательной определенности функции $Z(t,x)$ следует существование положительно определенной на множестве $\|x\| \leqslant H$ функции $Z_2(x)$ такой, что

$$Z(t,x) \leqslant -Z_2(x) \quad \text{на множестве} \quad \|x\| \leqslant H.$$

Определим число

$$\alpha = \min_{\|x\| \in [\beta, \varepsilon_2]} Z_2(x), \quad \alpha > 0, \tag{9}$$

тогда

$$\dot{v}(t) \leqslant -\alpha + Z_1\big(t, x(t,t_0,\varphi)\big) \quad \text{при} \quad t \geqslant T_1. \tag{10}$$

Выберем положительное число Δ так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha\Delta > > 3\eta_0$. Пользуясь "слабым" стремлением к нулю функции $Z_1\big(t, x(t,t_0,\varphi)\big)$, найдем числа $a \geqslant T_1$ и $b = a + \Delta$ таким образом, чтобы

$$\left| \int_a^b Z_1\big(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)\big)\, d\tau \right| < \eta_0.$$

Интегрируя неравенство (10) в пределах от a до b, придем к противоречию, что

$$\gamma_0 - \eta_0 < v(b) \leqslant v(a) - \alpha\Delta + \eta_0 < \gamma_0 + \eta_0 - 3\eta_0 + \eta_0 = \gamma_0 - \eta_0.$$

Следовательно, случай (а) невозможен.

В случае (б) выберем последовательность t^k таким образом, чтобы $v(t^k) > > \gamma_0 - \eta_0/2$ для всех $k \geqslant 1$. Это возможно сделать, так как число $\gamma_0 - \eta_0/2 \notin \Gamma$. По последовательностям t_k и t^k, пользуясь непрерывностью функции $v(t)$, определим последовательность отрезков $[\tau_s, \tau^s]$, $\tau_s \to +\infty$ при $s \to +\infty$ такую, что $v(\tau_s) = \gamma_0 - \eta_0$, $v(\tau^s) = \gamma_0 - \eta_0/2$ и $v(t) \in (\gamma_0 - \eta_0, \gamma_0 - \eta_0/2)$ при $t \in (\tau_s, \tau^s)$. Тогда, исходя из (7) и проводя аналогичные, что и в случае (а), рассуждения, для любого $t \in [\tau_s, \tau^s]$ установим справедливость неравенств

$$v(\xi) < \gamma_0 + \eta_0 < g(v(t)) \quad \text{для любого} \quad \xi \in [t-h, t).$$

Следовательно, при $t \in [\tau_s, \tau^s]$ будет справедлива оценка (8). Положим

$$M = \sup_{\|x_t\|_h \leqslant \varepsilon_2} W(t, x_t), \quad M > 0,$$

и, пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях [17], оценим длины отрезков $[\tau_s, \tau^s]$:

$$\frac{1}{2}\eta_0 = |v(\tau^s) - v(\tau_s)| = |\dot{v}(\xi)|(\tau^s - \tau_s) \leqslant M(\tau^s - \tau_s),$$

где ξ — некоторая точка из отрезка $[\tau_s, \tau^s]$. Отсюда получим оценку:

$$\tau^s - \tau_s \geqslant \frac{\eta_0}{2M} = \delta. \tag{11}$$

Далее, по величине $\alpha\delta$ найдем номер s_* такой, что при $s \geqslant s_*$ будет справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{\tau_s}^{\tau^s} Z_1\bigl(\tau, x(\tau, t_0, \varphi)\bigr)\, d\tau \right| < \frac{\alpha\delta}{2}. \tag{12}$$

Проинтегрируем неравенство (8) в пределах от τ_s до τ^s при $s > s_*$, используя (9), (11), (12):

$$v(\tau^s) - v(\tau_s) < -\alpha\delta + \frac{\alpha\delta}{2},$$

откуда получим очевидное противоречие

$$\gamma_0 - \frac{\eta_0}{2} < \gamma_0 - \eta_0 - \frac{\alpha\delta}{2},$$

которое устанавливает невозможность случая (б).

Таким образом, предположение (6) не верно и, следовательно, $\gamma_0 = 0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Заметим, что четвертое условие теоремы 1 использовалось только для доказательства ограниченности решений системы (1). Поэтому если ограниченность решений системы установлена заранее каким-либо другим способом, то четвертое условие теоремы 1 становится излишним.

3.2. Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в целом

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если для системы (1) *существуют непрерывно дифференцируемая на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n$ функция $V(t, x)$, непрерывная на множестве $r \geqslant 0$ функция $g(r)$ и непрерывный на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times X$ функционал $W(t, x_t)$, такие что:*

1) *$g(r)$ строго монотонно возрастает на множестве $r \geqslant 0$ и удовлетворяет условию $g(r) > r$ при $r > 0$;*
2) *$V_1(x) \leqslant V(t, x) \leqslant V_2(x)$, где функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ положительно определены в $\mathbb{R}^n$ и $V_1(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$;*

3) $\dot{V}|_{(1)} = W(t, x_t)$, *где функционал* $W(t, x_t)$ *равномерно ограничен по отношению к* $t \geqslant 0$ *на множестве* $\|x_t\|_h \leqslant H$ *и таков, что вдоль интегральных кривых системы* (1), *удовлетворяющих условию*

$$V\big(\xi, x(\xi, t_0, \varphi)\big) \leqslant g\big(V\big(t, x(t, t_0, \varphi)\big)\big) \quad \text{для всех} \quad \xi \in [t-h, t),$$

допускает оценку

$$W(t, x_t) \leqslant Z(t, x) + Z_1(t, x),$$

где функция $Z(t, x)$ *отрицательно определена на множестве* $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n$, *а функция* $Z_1(t, x)$ *“слабо” стремится к нулю при* $t \to +\infty$;

4) *существует число* $\Lambda > 0$ *такое, что* $Z(t, x) + Z_1(t, x) < 0$ *на множестве* $\|x\| \geqslant \Lambda$

— тогда $x = 0$ *является асимптотическим положением покоя в целом для траекторий системы* (1).

Доказательство теоремы 2. Выберем произвольный момент $t_0 \geqslant 0$, произвольную кусочно-непрерывную на $[t_0 - h, t_0]$ начальную функцию $\varphi(t)$ и рассмотрим решение $x(t, t_0, \varphi)$.

1. Покажем продолжимость решения $x(t, t_0, \varphi)$ на интервал $[t_0, +\infty)$. Пусть это не так, тогда найдется момент $t_* \geqslant t_0$ такой, что решение $x(t, t_0, \varphi)$ определено на множестве $t \in [t_0, t_*)$ и не определено при $t = t_*$. Тогда либо существуют некоторое число $H_0 > 0$ и последовательность $\tau_k \to t_* - 0$ такие, что $\|x(\tau_k, t_0, \varphi)\| \leqslant H_0$ для любого $k \geqslant 1$, что противоречит теореме существования и единственности решения основной начальной задачи [3], либо

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow t_* - 0, \tag{13}$$

что, исходя из первого условия теоремы 2, влечет за собой выполнение условия

$$v(t) \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow t_* - 0. \tag{14}$$

В силу того что $w(t)$ может иметь только лишь конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, существует $\Delta_1 > 0$ такое, что $w(t)$ будет непрерывной при $t \in (t_* - \Delta_1, t_*)$. Из (13) следует, что существует величина $\Delta_2 > 0$ такая, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| > \Lambda$ при $t \in [t_* - \Delta_2, t_*)$. Положим $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$ и определим положительное число

$$L_0 = \max_{[t_0 - h, t_* - \Delta]} v(t).$$

В силу соотношения (14) для числа $2L_0$ найдется точка $t_1 \in (t_* - \Delta, t_*)$, обладающая на $[t_* - \Delta, t_1]$ свойством (A), следовательно, $\dot{v}(t_1) \geqslant 0$. С другой стороны, $v(t) < v(t_1) < g(v(t_1))$ для любого $t \in [t_1 - h, t_1)$, следовательно, в силу третьего и четвертого условий теоремы 2, $\dot{v}(t_1) < 0$. Полученное противоречие устанавливает продолжимость $x(t, t_0, \varphi)$ на множество $t \geqslant t_0$.

2. Покажем ограниченность решения $x(t, t_0, \varphi)$ на множестве $t \geqslant t_0$. Заметим, что в силу второго условия теоремы 2 для этого достаточно показать ограниченность функции $v(t)$. Пусть

$$L = \max_{\|x\| \leqslant \Lambda} V_2(x), \quad L > 0.$$

Предположим, что функция $v(t)$ не является ограниченной, тогда для числа L существует число $T = T(L) \geqslant t_0 + h$ такое, что $v(T) > L$. Определим константу

$$L_0 = \max_{[t_0, T]} v(t).$$

Для числа $2L_0$ найдется точка $t_1 > T$, обладающая на отрезке $[t_0, t_1]$ свойством (A), следовательно, $\dot{v}(t_1) \geqslant 0$. В то же время $v(t) < v(t_1) < g(v(t_1))$ для любого $t \in [t_1 - h, t_1)$ и $\|x(t_1, t_0, \varphi)\| > \Lambda$, следовательно, $\dot{v}(t_1) < 0$. Полученное противоречие свидетельствует о том, что $v(t) \leqslant 2L_0$ для любого $t \geqslant t_0$, что доказывает ограниченность решения $x(t, t_0, \varphi)$.

Доказательство стремления к нулю решения $x(t, t_0, \varphi)$ при установленной его продолжимости и ограниченности на множестве $t \geqslant t_0$ будет полностью повторять п. 2 доказательства теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Здесь справедливо замечание, аналогичное замечанию 2. Четвертое условие теоремы 2 является излишним, если продолжимость и ограниченность решений рассматриваемой системы установлена заранее.

Замечание 4. В теоремах 1 и 2 оценка отрицательной определенности производной функции $V(t, x)$ производится на множестве интегральных кривых системы, удовлетворяющих соотношению $V\big(\xi, x(\xi, t_0, \varphi)\big) \leqslant g\big(V\big(t, x(t, t_0, \varphi)\big)\big)$ для всех $\xi \in [t - h, t)$, где $g(r) > r$ при $r > 0$. Отметим, что это условие является более жестким, чем условие $V\big(\xi, x(\xi, t_0, \varphi)\big) \leqslant V\big(t, x(t, t_0, \varphi)\big)$ для всех $\xi \in [t - h, t)$, используемое Б.С. Разумихиным в [14] при доказательстве асимптотической устойчивости нулевого решения.

Замечание 5. Отметим, что применение теорем 1 и 2 может быть полезно в случае исследования поведения решений систем с возмущениями

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - h)) + R(t, x_t),$$

если относительно системы $\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - h))$ известно, что она имеет асимптотически устойчивое нулевое решение и все компоненты $R_i(t, x_t)$ вектора возмущений $R(t, x_t)$ "слабо" стремятся к нулю.

Замечание 6. "Слабое" стремление к нулю функции $Z_1(t, x)$ и функционалов $R_i(t, x_t)$, внесенное в условие теорем 1 и 2 и замечание 5 по своему виду имеет неконструктивный характер. Однако оно легко проверяется для широкого класса возмущений, действующих как в линейных, так и в нелинейных системах.

4. Примеры

Приведем несколько примеров применения теорем 1 и 2.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -2x^3(t) + x^3(t-h) + \sin t^2. \tag{15}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем $V(x) = x^2$ и вычислим

$$\dot{V}|_{(15)} = -4x^4(t) + 2x(t)x^3(t-h) + 2x(t)\sin t^2 = W\big(t, x(t), x(t-h)\big).$$

Очевидно, что функция $V(x)$ удовлетворяет второму условию теоремы 2 и функционал W непрерывен в смысле определения 3. Обозначим $x = x(t)$ и $y = x(t-h)$, выберем произвольное число $p \in (1, \sqrt[3]{2})$ и рассмотрим множество

$$M = \big\{(x, y) \bigm| V(y) < pV(x)\big\} = \big\{(x, y) \bigm| |y| < p|x|\big\}.$$

Здесь в качестве функции $g(r)$ из первого и третьего условий теоремы 2 взята функция pr. На множестве M функционал W допускает оценку

$$W(t, x, y) < -4x^4 + 2p^3|x|^4 + 2x\sin t^2 = -(4 - 2p^3)x^4 + 2x\sin t^2 = \\ = Z(t, x) + Z_1(t, x),$$

где $Z(t, x) = -qx^4$, $Z_1(t, x) = 2x\sin t^2$ и $q = 4 - 2p^3 > 0$. В силу оценки

$$Z(t, x) + Z_1(t, x) \leqslant -qx^4 + 2|x|$$

на множестве $|x| \geqslant 1 + 2/q$ будет выполнено неравенство $Z(t, x) + Z_1(t, x) < 0$. Что, исходя из доказательства теоремы 2, гарантирует существование и ограниченность решения $x(t, t_0, \varphi)$ для произвольной начальной функции $\varphi \in \in PC[-h, 0]$ на множестве $t \geqslant t_0$. Функция $Z_1\big(t, x(t, t_0, \varphi)\big)$ будет в этом случае "слабо" стремиться к нулю. Это было доказано в [6, с. 23]. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2, поэтому положение $x = 0$ является для уравнения (15) асимптотическим положением покоя в целом.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -8x^3(t) + x^3(t-h) + x^5(t) + \sin t^2. \tag{16}$$

Построим функции $V(t, x)$, $g(r)$, $Z(t, x)$, $Z_1(t, x)$ и функционал $W(t, x(t), x(t-h))$ из условий теоремы 1. В качестве функции $V(t, x)$ возьмем $V(x) = = x^2/2$ и вычислим

$$\dot{V}|_{(16)} = -8x^4(t) + x(t)x^3(t-h) + x^6(t) + x(t)\sin t^2 = W\big(t, x(t), x(t-h)\big).$$

Обозначим $x = x(t)$ и $y = x(t-h)$ и представим функционал W в виде

$$W(t, x, y) = -8x^4 + xy^3 + x^6 + x\sin t^2 = \overline{W}(x, y) + x^6 + x\sin t^2.$$

На плоскости (x, y) построим множество

$$N = \Big\{(x, y) \mid \overline{W}(x, y) < 0\Big\} =$$
$$= \Big\{(x, y) \mid y < 2x, \quad x > 0\Big\} \bigcup \Big\{(x, y) : y > 2x, \quad x < 0\Big\}.$$

Очевидно, что множество

$$M = \left\{(x, y) \mid V(y) < \frac{3}{2}V(x)\right\} = \left\{(x, y) \mid |y| < \frac{3}{2}|x|\right\} \subset N.$$

Здесь в качестве функции $g(r)$ из первого и третьего условий теоремы 1 взята функция $3r/2$. Оценим $W(t, x, y)$ на множестве M:

$$W(t, x, y) < -8x^4 + \frac{27}{8}|x|^4 + x^6 + x\sin t^2 \leqslant -4x^4 + x^6 + x\sin t^2 =$$
$$= Z(t, x) + Z_1(t, x),$$

где $Z(t, x) = -4x^4 + x^6$, $Z_1(t, x) = x\sin t^2$. В силу оценки

$$Z(t, x) + Z_1(t, x) \leqslant -4x^4 + x^6 + |x|$$

на множестве $|x| \in [1, 3/2]$ будет выполнено неравенство $Z(t, x) + Z_1(t, x) < 0$, а так как

$$1 = \sup_{|x|\leqslant 1} V(x) < \inf_{|x|=3/2} V(x) = 9/4,$$

то четвертое условие теоремы 1 выполнено. Опять же отметим, что выполнение этого условия гарантирует существование и ограниченность решения $x(t, t_0, \varphi)$ на множестве $t \geqslant t_0$ для любой $\varphi \in PC[-h, 0]$, удовлетворяющей условию $\|\varphi\|_h < 1$. Также заметим, что функция $Z(t, x)$ отрицательно определена на множестве $|x| \leqslant 3/2$, а функция $Z_1\big(t, x(t, t_0, \varphi)\big)$, как это было замечено ранее, “слабо” стремится к нулю. Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены и, следовательно, все решения $x(t, t_0, \varphi)$ уравнения (16) при выполнении условия $\|\varphi\|_h < 1$ будут стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

5. Заключение

В результате применения подхода Разумихина к исследованию предельного поведения решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом были получены достаточные условия, при выполнении которых в одном классе систем появляется асимптотическое положение покоя. Данный класс систем можно описать как класс систем с возмущениями, представляющими колебания с неограниченно возрастающей частотой. Возникновение асимптотического положения покоя в системах такого вида часто называется вибрационной стабилизацией и может найти применение в разделах теории управления, касающихся задач стабилизации программных движений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения / Пер. с англ. под ред. Л.Э. Эльсгольца. М.: Мир, 1967.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Пер. с англ. под ред. А.Д. Мышкиса. М.: Мир, 1984.
4. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
5. *Зубов В.И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 86–95.
6. *Зубов В.И.* Колебания и волны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989.
7. *Купцова С.Е.* Асимптотически инвариантные множества // Процессы управления и устойчивость. Тр. 37-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов / Под ред. А.В. Платонова, Н.В. Смирнова. 2006. С. 50–56.
8. *Купцова С.Е.* Об асимптотическом поведении решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений // Тр. Средневолжск. математич. общества. 2006. Т. 8. № 1. С. 235–243.
9. *Жабко А.П., Тихомиров О.Г., Чижова О.Н.* Устойчивость асимптотического положения покоя возмущенных однородных нестационарных систем // Журн. Средневолжск. математич. общества. 2018. Т. 20. № 1. С. 13–22.
10. *Ekimov A.V., Svirkin M.V.* Analysis of Asymptotic Equilibrium State of Differential Systems Using Lyapunov Function Method // 2015 Int. conf. “Stability and control processes” in memory of V.I. Zubov (SCP). IEEE. 2015. P. 45–47.
11. *Купцова С.Е.* Асимптотические положения покоя в системах разностных уравнений // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56. № 2. С. 67–71.
12. *Kuptsov S.Yu., Kuptsova S.E., Zaranik U.P.* On Asymptotic Quiescent Position of Nonlinear Difference Systems with Perturbations // 2015 Int. conf. “Stability and control processes” in memory of V.I. Zubov (SCP). IEEE. 2015. P. 20–22.
13. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 56. № 2. С. 500–512.
14. *Разумихин Б.С.* Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // АиТ. 1960. Т. 21. № 6. С. 740–748.
15. *Купцова С.Е., Купцов С.Ю., Степенко Н.А.* О предельном поведении решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вест. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 173–182.
16. *Зараник У.П., Купцова С.Е., Степенко Н.А.* Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в системах с запаздыванием // Журн. СВМО. 2018. Т. 20. № 2. С. 175–186.
17. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 т. 2-е изд., перераб. и доп., М.: Высш. шк., 1988.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 01.06.2018

После доработки 03.07.2018

Принята к публикации 08.11.2018