Автоматика и телемеханика, № 6, 2019

Стохастические системы

**© 2019 г. С.В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru),
А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))**

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВУХЭТАПНЫХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ[1]

Рассматриваются двухэтапные задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями в общей постановке. Приводятся достаточные условия измеримости функции потерь и полунепрерывности критериальных функций. Сформулированы достаточные условия существования оптимальных стратегий. Доказывается эквивалентность априорной и апостериорной постановок изучаемых задач. Описывается и обосновывается применение доверительного метода, заключающегося в переходе к детерминированной минимаксной задаче. Строятся выборочные аппроксимации задач и приводятся условия сходимости оптимальных стратегий в аппроксимирующих задачах к оптимальной стратегии в исходной задаче. Полученные результаты иллюстрируются на примере линейной двухэтапной задачи. Двухэтапная задача с вероятностным критерием сводится к смешанной целочисленной задаче.

Ключевые слова: стохастическое программирование, двухэтапная задача, вероятностный критерий, квантильный критерий.

DOI: 10.1134/S0005231019060047

1. Введение

Двухэтапные задачи стохастического программирования описывают широкий класс экономических и технических систем, в которых процедура принятия решения осуществляется последовательно на двух этапах. На первом этапе выбирается детерминированная стратегия. На втором этапе по факту реализации случайных параметров выбирается стратегия второго этапа.

Линейные двухэтапные задачи с критерием в форме математического ожидания широко освещены в [1–5], где описаны свойства выпуклости множества допустимых стратегий и целевой функции, описаны подходы к построению эквивалентной детерминированной задачи и приведены различные методы решения задачи. Общая постановка двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания описана в [4, 6, 7].

Помимо критерия в форме математического ожидания, в стохастическом программировании рассматриваются вероятностные критерии. Наиболее известными из них являются вероятностный и квантильный критерии, а также

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 17-07-00203А).

критерий в форме интегральной квантили [8, 9]. Вероятностный критерий представляет собой вероятность непревышения функцией потерь некоторого фиксированного уровня. Квантильный критерий (также известный как Value-at-Risk) является минимальным уровнем функции потерь, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. Критерий в форме интегральной квантили отображает средние потери при превышении целевой функции значения квантили.

Двухэтапные задачи с вероятностными критериями менее изучены, чем с критерием в форме математического ожидания. Двухэтапная линейная задача с квантильным критерием была сформулирована в [10], где были предложены методы поиска верхней оценки критериальной функции задачи. Двухэтапная линейная задача с критерием в форме интегральной квантили изучалась в [11], где были исследованы свойства задачи и предложен алгоритм ее решения. В настоящей статье изучаются двухэтапные задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями в общей постановке. Двухэтапные задачи с квантильным критерием в случае дискретного распределения случайных параметров изучались в [12], где предложен подход к их сведéнию к детерминированным задачам смешанного целочисленного программирования. Ранее подобные методы были предложены для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями [13–16]. Среди прикладных задач, описываемых с помощью двухэтапных оптимизационных моделей с квантильным критерием, можно отметить логистическую задачу оптимизации бронируемого фрахта компанией, занимающейся доставкой грузов [17], и задачу оптимизации энергоснабжения участка железной дороги [18]. В данных задачах оптимизация осуществляется за счет выбора на первом этапе объемов приобретаемых ресурсов и их последующей корректировки на втором этапе в зависимости от реализации случайного спроса.

Традиционно рассматриваются двухэтапные задачи в априорной постановке. Это значит, что при принятии решения на первом этапе учитывается минимальное значение целевой функции второго этапа как функции стратегии первого этапа. Также могут быть рассмотрены двухэтапные задачи стохастического программирования в апостериорной постановке, когда стратегией второго этапа является функция реализации случайных параметров задачи. Условия эквивалентности априорной и апостериорной постановок двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания приведены в [4], в [10] доказана эквивалентость данных постановок для линейной задачи с квантильным критерием. В настоящей статье показывается эквивалентность априорной и апостериорной постановок двухэтапных задач с вероятностными критериями в общей постановке.

В статье демонстрируются два подхода к решению сформулированных задач: доверительный метод и метод выборочных аппроксимаций. Для задач с квантильным критерием может быть применен доверительный метод, заключающийся в переходе от исходной задачи к эквивалентной детерминированной минимаксной задаче. Данный метод сформулирован в [8, 9], но он был обоснован только для целевых функций, принимающих конечные значения. В настоящей статье обосновывается применение доверительного метода в случае возможности бесконечных значений целевых функций. Это позволяет его применять для решения двухэтапных задач, в которых функция потерь определяется как оптимальное значение целевой функции второго этапа и полагается равной плюс бесконечности в случае несовместных ограничений задачи второго этапа.

Метод выборочных аппроксимаций заключается в построении выборочных оценок критериальных функций и их дальнейшей оптимизации. Для задач стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания данный метод был обоснован в [19], а для задач с вероятностными ограничениями — в [20]. Допустимость в задачи стохастического программирования решений аппроксимирующей задачи изучалась в [21]. В [22] метод выборочных аппроксимаций применяется совместно с декомпозиционными алгоритмами для двухэтапных линейных задач с критерием в форме математического ожидания. В статье авторов [23] метод обосновывается для одноэтапных задач с вероятностными критериями. В настоящей статье метод применяется для двухэтапных задач с вероятностными критериями в общей постановке.

В качестве примера в статье рассматривается линейная двухэтапная задача стохастического программирования для вероятностного и квантильного критериев.

2. Постановки задач

Сформулируем сначала двухэтапные задачи оптимизации с вероятностными критериями в апостериорной постановке.

Пусть задано вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое замкнутое множество. Пусть X — случайный вектор с значениями в $\mathbb{R}^m$, определенный на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Будем считать, что вероятностное пространство является полным, т.е. любое подмножество множества вероятностной меры нуль содержится в сигма-алгебре $\mathcal{F}$. Например, можно взять лебегову сигма-алгебру в качестве сигма-алгебры $\mathcal{F}$. Будем предполагать, что для всех $x \in \mathcal{X}$ выполнено $X(x) = x$, т.е. $\mathbf{P}\{X \in B\} = \mathbf{P}(B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^m$.

Через $U \subset \mathbb{R}^r$ обозначим множество стратегий первого этапа. Множество стратегий второго этапа обозначим через $Y \subset \mathbb{R}^s$. Стратегия первого этапа $u \in U$ выбирается, когда реализация случайного вектора X неизвестна, а стратегия второго этапа $y \in Y$ — по реализации случайного вектора X. Будем считать, что множества U и Y являются замкнутыми. Пусть $\Phi_2(\cdot)\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ — функция потерь второго этапа, где $\mathbb{R}^* \triangleq \mathbb{R}^1 \cup \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — расширенная действительная прямая.

Целевая функция потерь $\Phi(\cdot)\colon U \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ определяется как минимальное значение функции потерь второго этапа при известных стратегии первого этапа $u \in U$ и реализации случайных факторов $x \in \mathcal{X}$:

$$\Phi(u, x) \triangleq \inf_{y \in Y} \{\Phi_2(u, y, x) \mid Q(u, y, x) \leqslant 0\}, \tag{1}$$

где $Q(\cdot)\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ — функция, задающая дополнительные ограничения задачи второго этапа. Если при заданных $(u, x) \in U \times \mathcal{X}$ для всех $y \in Y$ выполнено $Q(u, y, x) > 0$, то по определению полагается $\Phi(u, x) = +\infty$.

Замечание 1. Введенное определение функции потерь позволяет без ограничения общности считать, что $U = \mathbb{R}^r$, а $Y = \mathbb{R}^s$. В случае если, например, $U \neq \mathbb{R}^r$, можно положить $\Phi_2(u, y, x) = +\infty$ для всех $u \notin U$, поскольку по определению функция $\Phi_2(\cdot)$ принимает значения из расширенной действительной прямой.

Замечание 2. Введенная функция потерь определена на множестве реализаций случайного вектора X. По этой причине можно отождествить исходное вероятностное пространство и пространство реализаций случайного вектора, снабженное борелевской сигма-алгеброй. Известно, что борелевская сигма-алгебра не является полной. Причины, по которым целесообразно рассматривать полное вероятностное пространство, будут объяснены далее. Отметим, что в более общей постановке задачи функция потерь может зависеть непосредственно от элементарного события. Многие результаты статьи могут быть обобщены на этот случай, но его детальное рассмотрение выходит за рамки статьи.

Определим функцию вероятности $P_\varphi(\cdot)\colon U \to [0, 1]$ так:

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\}, \tag{2}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^*$ — фиксированный уровень функции потерь. Таким образом, $P_\varphi(u)$ — вероятность такого события, что значение функция потерь $\Phi(u, X)$ не превысит фиксированный порог φ.

Пусть задан уровень надежности $\alpha \in (0, 1]$. Введем в рассмотрение функцию квантили $\varphi_\alpha(\cdot)\colon U \to \mathbb{R}^*$, определенную по правилу

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{3}$$

Функция квантили — это минимальный уровень потерь, который не будет превышен с заданной вероятностью α.

Замечание 3. Заметим, что из-за наличия ограничения $Q(u, y, x) \leqslant 0$ при некоторых $u \in U$ может оказаться, что $P_\varphi(u) < \alpha$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1$. Поэтому если для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1$ выполнено $P_\varphi(u) < \alpha$, то по определению полагаем, что $\varphi_\alpha(u) = +\infty$.

Замечание 4. В определении (2) предполагается, что функция $x \mapsto \mapsto \Phi(u, x)$ является измеримой. Достаточные условия измеримости данной функции будут приведены далее.

Будем рассматривать задачу максимизации функции вероятности

$$\alpha_\varphi^* \triangleq \sup_{u \in U} P_\varphi(u), \quad U_\varphi^* \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_\varphi(u) \tag{4}$$

и задачу минимизации функции квантили

$$\varphi_\alpha^* \triangleq \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \quad U_\alpha^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \tag{5}$$

Множества U_φ^* и U_α^* будем называть множествами оптимальных стратегий в соответствующих задачах. Если $\varphi_\alpha^* = +\infty$, то, как принято в теории оптимизации, будем считать, что множество U_α^* пусто. Допустимой стратегией в задаче минимизации функции квантили будем называть такую стратегию $u \in U$, что $\varphi_\alpha(u) \neq +\infty$. Задачи (4) и (5) сформулированы в апостериорной постановке, т.е. оптимальная стратегия второго этапа $y \in Y$ выбирается при уже известных стратегии первого этапа $u \in U$ и реализации случайных параметров $x \in \mathcal{X}$.

3. Свойства задачи

Для того чтобы задачи (4) и (5) были сформулированы корректно, необходима измеримость целевой функции потерь $x \mapsto \Phi(u, x)$. Для исследования данного вопроса может быть применена теория нормальных интегрантов [24, 25].

В случае полной сигма-алгебры $\mathcal{F}$ можно дать следующее определение нормального интегранта.

Определение 1. Функция $f(\cdot)\colon \mathbb{R}^r \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ называется нормальным интегрантом, если $f(\cdot)$ является $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r) \times \mathcal{F}$-измеримой и для всех $x \in \mathcal{X}$ функция $u \mapsto f(u, x)$ полунепрерывна снизу.

Здесь и далее через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r) \times \mathcal{F}$ обозначено произведение борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$ и сигма-алгебры $\mathcal{F}$. Определение нормального интеграта для произвольной (вообще говоря, неполной) сигма-алгебры $\mathcal{F}$ сложнее и дается в терминах измеримости многозначных отображений [25].

Напомним определение полунепрерывной функции.

Определение 2. Функция $f(\cdot)\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^*$ называется полунепрерывной снизу (сверху), если все ее нижние (верхние) множества уровня

$$\{u \in \mathbb{R}^r \mid f(u) \leqslant a\} \quad (\{u \in \mathbb{R}^r \colon f(u) \geq a\}) \tag{6}$$

замкнуты для всех $a \in \mathbb{R}^*$.

Известно следующее утверждение.

Теорема 1 [25, теорема 14.37]. *Пусть функция $f(\cdot)\colon \mathbb{R}^r \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ является нормальным интегрантом,*

$$a(x) \triangleq \inf_{u \in \mathbb{R}^r} f(u, x), \quad A(x) \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in \mathbb{R}^r} f(u, x).$$

Тогда функция $x \mapsto a(x)$ измерима. При этом множество $B = \{x \in \mathcal{X} \mid A(x) \neq \varnothing\}$ измеримо, а также для каждого $x \in B$ можно выбрать точку минимума $u(x) \in A(x)$ такую, что функция $x \mapsto u(x)$ измерима.

Сформулируем достаточные условия измеримости целевой функции потерь $x \mapsto \Phi(u, x)$.

Теорема 2. Пусть для каждого $u \in U$ функции $(y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ и $(y, x) \mapsto Q(u, y, x)$ являются нормальными интегрантами. Тогда для всех $u \in U$ функция $x \mapsto \Phi(u, x)$ является измеримой.

Доказательство теоремы 2 и всех последующих теорем вынесено в Приложение.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что в случае неполной сигма-алгебры $\mathcal{F}$ при полунепрерывности по стратегии и измеримости по совокупности аргументов функций $(y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ нельзя гарантировать измеримость функции $x \mapsto \Phi(u,x)$ относительно $\mathcal{F}$. Поэтому в случае борелевских функций $(y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ может не быть борелевской, но будет измеримой по Лебегу.

Далее приведем условия того, что минимум в (1) является нормальным интегрантом. Для этого понадобится следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3 [25, определение 1.16]. *Говорят, что функция $f(\cdot)\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^*$ с значениями $f(u,y)$ обладает ограниченными множествами уровня, причем локально-равномерно по u, если для любых $\tilde{u} \in \mathbb{R}^r$ и $a \in \mathbb{R}^1$ существует открытое множество $V \subset \mathbb{R}^r$, содержащее точку $\tilde{u}$, такое, что множество $\{(u,y) \mid u \in V,\ f(u,y) \leqslant a\}$ ограничено в $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$.*

Очевидно, что условия определения 3 выполнены для ограниченного множества Y допустимых значений y.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3 [25, утверждение 14.47]. *Пусть функция $g(\cdot)\colon (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ является нормальным интегрантом,*

$$f(u,x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^s} g(u,y,x).$$

Если для всех $x \in \mathcal{X}$ функция $u \mapsto f(u,x)$ полунепрерывна снизу, то функция $f(\cdot)$ является нормальным интегрантом.

З а м е ч а н и е 6. Как отмечено в [25], условия теоремы 3 выполнены, например, когда для всех $x \in \mathcal{X}$ нормальный интегрант $(u,y) \mapsto g(u,y,x)$ обладает ограниченными множествами уровня, причем локально-равномерно по u.

Из данной теоремы следует утверждение.

Т е о р е м а 4. Пусть функция потерь $(u,y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ является нормальным интегрантом и при каждом $x \in \mathcal{X}$ функция $(u,y) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ обладает ограниченными множествами уровня, причем локально-равномерно по u, функция $(u,y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ — нормальный интегрант. Тогда функция потерь $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом.

Сформулируем утверждения о полунепрерывности функций вероятности и квантили. Известен следующий результат.

Т е о р е м а 5 [9, теорема 2.2]. *Если U — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^r$, функция потерь $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ принимает только конечные значения, полунепрерывна снизу по $u \in U$ для почти всех x по мере $\mathbf{P}$ и измерима по x для всех $u \in U$, то для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$ функция $u \mapsto P_\varphi(u)$ полунепрерывна сверху по $u \in U$, а функция $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ полунепрерывна снизу по $u \in U$ для любого $\alpha \in (0,1)$.*

Аналогичный результат сформулирован в [8, лемма 2.11].

Основываясь на теореме 5, докажем следующий результат.

Теорема 6. Пусть функция $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом. Тогда функция вероятности $u \mapsto P_\varphi(u)$ является полунепрерывной сверху для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$, а функция квантили $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ — полунепрерывной снизу для всех $\alpha \in (0,1]$.

Из теоремы 6 получаем утверждение о существовании оптимальных стратегий в задачах (4) и (5).

Следствие 1. Пусть множество U является компактом, функции $(u,y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(u,y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ являются нормальными интегрантами и при каждом $x \in \mathcal{X}$ функция $(u,y) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ обладает ограниченными множествами уровня, причем локально-равномерно по u. Тогда для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$ множество U^*_φ задачи максимизации функции квантили непусто. Если существует точка $u \in U$, в которой $\varphi_\alpha(u) < +\infty$, то и множество U^*_α непусто.

4. Об эквивалентности априорной и апостериорной постановок задач

Теперь сформулируем двухэтапные задачи стохастического программирования с вероятностными критериями в априорной постановке.

Через $\mathcal{Y}$ обозначим множество $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(Y))$-измеримых функций. Для фиксированного $\varphi \in \mathbb{R}^*$ определим функционал вероятности $\overline{P}_\varphi(\cdot)\colon U \times \mathcal{Y} \to [0,1]$ по правилу

$$\overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \triangleq$$

$$\triangleq \begin{cases} \mathbf{P}\{\Phi_2(u,y(X),X) \leqslant \varphi,\ Q(u,y(X),X)) \leqslant 0\}, & \text{если } \varphi < +\infty, \\ 1, & \text{если } \varphi = +\infty, \end{cases} = \tag{7}$$

$$= \mathbf{P}\left\{\Phi_2(u,y(X),X) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y(X),X)) \leqslant \varphi\right\},$$

где

$$\delta_A(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \in A; \\ +\infty, & \text{если } q \notin A. \end{cases}$$

Поскольку для всех $u \in U$ функции $(y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$, $(y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ и $x \mapsto y(x)$ являются измеримыми, то функции $x \mapsto \Phi_2(u,y(x),x)$ и $x \mapsto Q(u,y(x),x))$ являются измеримыми для всех $u \in U$ как композиции измеримых отображений, а значит, и функция

$$x \mapsto \Phi_2(u,y(x),x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y(x),x)) \tag{8}$$

измерима. Таким образом, определение (7) является корректным при указанных предположениях.

Для фиксированного уровня вероятности $\alpha \in (0,1]$ определим функционал квантили $\bar{\varphi}_\alpha(u,y(\cdot))\colon U \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^*$ по правилу

$$\bar{\varphi}_\alpha(u,y(\cdot)) \triangleq \min\left\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid \overline{P}_\varphi(u,y(\cdot)) \geqslant \alpha\right\}. \tag{9}$$

Будем рассматривать задачу максимизации функционала вероятности

$$\overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \to \sup_{u\in U,\, y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \tag{10}$$

и задачу минимизации функционала квантили

$$\bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) \to \inf_{u\in U,\, y(\cdot)\in\mathcal{Y}}. \tag{11}$$

Сформулируем утверждение об эквивалентности задач (4) и (10), а также (5) и (11).

Теорема 7. *Пусть для каждого $u\in U$ функция потерь $(y,x)\mapsto \Phi_2(u,y,x)$ является нормальным интегрантом и для всех $x\in\mathcal{X}$ обладает ограниченными множествами уровня по y, функция $(y,x)\mapsto Q(u,y,x)$ — нормальный интегрант. Тогда для любого $u\in U$ выполнено:*

$$P_\varphi(u) = \max_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)), \tag{12}$$

$$\varphi_\alpha(u) = \min_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)). \tag{13}$$

5. Применение доверительного метода

Введем функцию $\Psi(\cdot)\colon U\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}^*$ по правилу

$$\Psi(u,S) \triangleq \sup_{x\in S}\Phi(u,x) = \sup_{x\in S}\inf_{y\in Y}\{\Phi_2(u,y,x) \mid Q(u,y,x)\leqslant 0\}. \tag{14}$$

Рассмотрим минимаксную задачу

$$\Psi(u,S)\to \inf_{u\in U,\, S\in\mathcal{F}_\alpha}, \tag{15}$$

где $\mathcal{F}_\alpha \triangleq \{S\in\mathcal{F} \mid \mathbf{P}\{S\}\geqslant\alpha\}$. Множества из семейства $\mathcal{F}_\alpha$ называются доверительными.

В [9] показано, что для одноэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием минимаксная задача вида (15) эквивалентна задаче вида (5). Метод сведения задачи квантильной минимизации к минимаксной задаче назван в [8, 9] доверительным методом. Покажем, что этот метод применим и для двухэтапной задачи квантильной оптимизации.

Теорема 8. *Пусть для каждого $u\in U$ функции $(y,x)\mapsto\Phi_2(u,y,x)$ и $(y,x)\mapsto Q(u,y,x)$ являются нормальными интегрантами. Тогда*

$$\varphi_\alpha(u) = \min_{S\in\mathcal{F}_\alpha}\Psi(u,S). \tag{16}$$

Заметим, что решение задачи

$$\Psi(u,S)\to\inf_{u\in U} \tag{17}$$

для фиксированного множества S обеспечивает верхнюю оценку оптимального значения функции квантили в задаче (5). Если функция $u\mapsto\Phi(u,x)$ выпукла для всех $x\in\mathcal{X}$, то задача (17) является задачей выпуклой оптимизации.

6. Исследование выборочных аппроксимаций задачи

Рассмотрим последовательность $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых случайных векторов, распределения которых совпадают с распределением случайного вектора X. Согласно теореме Колмогорова [26, гл. 2, § 3, теорема 3] такая последовательность всегда существует и может быть определена на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}^{\infty}, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$. Процедура построения данного вероятностного пространства описана в доказательстве теоремы Колмогорова [26]. В качестве пространства элементарных событий рассматривается пространство $\mathcal{X}^{\infty}$ реализаций последовательности $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$. Сигма-алгебра $\mathcal{F}'$ строится как бесконечное произведение сигма-алгебр $\mathcal{F}$, а вероятностная мера $\mathbf{P}'$ согласована с вероятностной мерой $\mathbf{P}$, т.е. для всех последовательностей борелевских множеств $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}'\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{X \in B_k\}. \tag{18}$$

Конечно, последовательность $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно определять и на другом вероятностном пространстве, если это возможно.

Построим оценки функции вероятности

$$P_{\varphi}^{(n)}(u) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u, X_k)), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

где

$$\chi_A(q) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } q \in A; \\ 0, & \text{если } q \notin A, \end{cases} \tag{20}$$

и функции квантили

$$\varphi_{\alpha}^{(n)}(u) \triangleq \min\left\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid P_{\varphi}^{(n)}(u)\right\} \geqslant \alpha, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Рассмотрим задачи оптимизации:

$$\alpha_n \triangleq \sup_{u \in U} P_{\varphi}^{(n)}(u), \quad U_{\varphi}^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} P_{\varphi}^{(n)}(u), \tag{22}$$

$$\varphi_n \triangleq \inf_{u \in U} \varphi_{\alpha}^{(n)}(u), \quad U_{\alpha}^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_{\alpha}^{(n)}(u). \tag{23}$$

Справедлива следующая теорема [23].

Т е о р е м а 9 [23, теорема 7]. *Пусть функция $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ является нормальным интегрантом, множество U компактно и непусто. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup_{u \in U} P_{\varphi}(u) \quad (\mathbf{P}'\text{-п.н.}) \ (\text{п.н. — почти наверное}) \tag{24}$$

и любая предельная точка $\bar{u}^{\varphi}$ последовательности $\{u_n^{\varphi}\}_{n\in\mathbb{N}}$, в которой для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_n^{\varphi} \in U_{\varphi}^{(n)}$, оптимальна в задаче (4) $\mathbf{P}'$-п.н., т.е.

$$\bar{u}^{\varphi} \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_{\varphi}(u) \quad (\mathbf{P}'\text{-п.н.}). \tag{25}$$

Из теоремы 9 получаем следствие 2.

Следствие 2. Пусть функции $(u, y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ *и* $(u, y, x) \mapsto$ $\mapsto Q(u, y, x)$ *являются нормальными интегрантами и при всех* $x \in \mathcal{X}$ *функция* $(u, y) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ *обладает ограниченными множествами уровня, причем локально-равномерно по* u, *множество* U *компактно и непусто. Тогда выполнены соотношения* (24) *и* (25).

Для задачи стохастического программирования с квантильным критерием справедлив следующий результат, аналогичный теореме 9.

Теорема 10. Пусть выполнены условия:

(i) *множество* U *компактно и непусто*;

(ii) *функция* $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ *является нормальным интегрантом и* $\Phi(u, x) > -\infty$ *для всех* $(u, x) \in U \times \mathcal{X}$;

(iii) *если* $\varphi_\alpha^* \neq +\infty$, *то для всех* $\varepsilon > 0$ *существует пара* $(\tilde{u}, \tilde{\varphi})$ *такая, что* $|\tilde{\varphi} - \varphi_\alpha^*| \leqslant \varepsilon$ *и* $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) > \alpha$.

Тогда $\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi_\alpha^*$ ($\mathbf{P}'$-*п.н.*) *и если* $\varphi_\alpha^* \neq +\infty$, *то любая предельная точка* $\bar{u}$ *последовательности* $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *в которой* $u_n \in U_\alpha^{(n)}$ *для всех достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$, *оптимальна в задаче* (5) ($\mathbf{P}'$-*п.н.*).

Замечание 7. Утверждается, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_n \in U_\alpha^{(n)}$ по той причине, что в случае $\varphi_n = +\infty$ множество стратегий в аппроксимирующей задаче считается пустым. Если $\varphi_\alpha^* < +\infty$, то из сходимости $\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi_\alpha^*$ ($\mathbf{P}'$-п.н.) следует, что существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой что для всех $n > N$ выполнено $\varphi_n < +\infty$, а значит, множество оптимальных стратегий $U_\alpha^{(n)}$ в аппроксимирующей задаче становится непустым начиная с номера N. Конечно, N зависит от реализации выборки, но номер N определен для почти всех реализаций выборки.

Замечание 8. Условие (iii) выполнено, например, в том случае, когда при всех $u \in U$ функция $\varphi \mapsto P_\varphi(u)$ является строго возрастающей. Тогда указанное неравенство выполняется при $\tilde{u} = u^*$ и $\tilde{\varphi} = \varphi_\alpha^* + \varepsilon/2$. Условия монотонности функции вероятности можно найти в [9].

7. Линейные двухэтапные задачи

Проиллюстрируем полученные в статье результаты на примере линейных двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями. Данный класс задач с квантильным критерием был введен в [10], где для частного случая линейной задачи доказана эквивалентность априорной и апостериорной постановок. Распространим этот результат на более общий случай. Поиск оптимальной оптимизационной стратегии в данной задаче затруднителен, поэтому разработан ряд алгоритмов для поиска гарантирующих стратегий в непрерывном [10] и дискретном случае [27]. В [28] для задачи с квантильным критерием, близкой к рассматриваемой в данном разделе, предложены два алгоритма. Один из них основан на сведении задачи к задаче смешанного целочисленного программирования, а второй — на сведении задачи к последовательности задач выпуклой оптимизации. Данные алгоритмы используют доверительный метод, однако обоснование его применимости в случае, когда целевые функции могут принимать бесконечные значения, ранее проведено не было. В данном разделе описан общий подход к использованию доверительного метода для решения задачи в линейном случае. Построение выборочных аппроксимаций двухэтапной задачи с квантильным критерием в линейном случае подробно описано в [29], где выборочная аппроксимация вида (23) сведена к задаче смешанного целочисленного линейного программирования и приведены сходимости решений аппроксимирующих задач к решению исходной задачи. В данном разделе строится выборочная аппроксимация для аналогичной задачи с вероятностным критерием.

7.1. Измеримость целевой функции и существование решения

Пусть целевая функция потерь имеет вид

$$\Phi(u,x) = c^\top(x)u + \inf_{y\in Y}\left\{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\right\}, \tag{26}$$

где $Y = \{y \in \mathbb{R}^s \mid y \geqslant 0\}$,

$$x = \mathrm{col}(c(x), q(x), A(x), B(x), b(x)) \in \mathbb{R}^{r+s+l(r+s+1)} \tag{27}$$

— вектор, составленный из векторов и матриц $c(x) \in \mathbb{R}^r$, $q(x) \in \mathbb{R}^s$, $A(x) \in \in \mathbb{R}^{l\times r}$, $B(x) \in \mathbb{R}^{l\times s}$ и $b(x) \in \mathbb{R}^l$.

Для функции потерь вида (26) рассмотрим задачу максимизации функции вероятности (4) и задачу минимизации функции квантили (5).

Функция потерь (26) может быть представлена в форме (1), если

$$\Phi_2(u,y,x) = c^\top(x)u + q^\top(x)y, \tag{28}$$

$$Q(u,y,x) = -\min_{i=\overline{1,l}} \left(A(x)u + B(x)y - b(x)\right)_i. \tag{29}$$

Функции $(u,y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(u,y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ непрерывны, поэтому являются нормальными интегрантами, а значит, по теореме 2 задачи (4) и (5) сформулированы корректно. Более того, в [5] доказано, что функция

$$u \mapsto \inf_{y\in Y}\left\{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\right\} \tag{30}$$

является выпуклой полиэдральной на замкнутом множестве значений u, для которых множество $\{y \in Y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\}$ непусто. Таким образом, функция (30) является полунепрерывной снизу, а значит, согласно теореме 3 функция $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом.

Нормальность интегранта $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ в силу теоремы 6 гарантирует полунепрерывность сверху функции вероятности и полунепрерывность снизу функции квантили, что обеспечивает существование оптимальных стратегий в задачах максимизации функции вероятности и минимизации функции квантили на компактном множестве.

Изучим вопрос эквивалентности априорной и апостериорной постановок задачи стохастического программирования с вероятностными критериями для линейной функции потерь. Заметим, что функция потерь (26) в общем случае не обладает ограниченными множествами уровня. По этой причине теорема 7 не может быть применена непосредственно. Приведем условия эквивалентности задач (4) и (10).

Теорема 11. *Пусть $\varphi > -\infty$. Тогда для функций $\Phi_2(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ вида (28) и (29) выполнено равенство*

$$P_\varphi(u) = \max_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)).$$

При этом если U — непустое компактное множество, то множества оптимальных стратегий в задачах (4) и (10) непусты.

Замечание 9. В случае $\varphi = -\infty$ можно гарантировать лишь оценку

$$P_{-\infty}(u) \geqslant \sup_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \overline{P}_{-\infty}(u, y(\cdot)) \equiv 0 \tag{31}$$

для всех $u \in U$.

Теперь приведем условия эквивалентности задач (5) и (11).

Теорема 12. *Пусть функции $\Phi_2(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ определены согласно (28) и (29). Тогда*

1) *для $u \in U$ равенство*

$$\varphi_\alpha(u) = \min_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot))$$

выполнено, если справедливо $\varphi_\alpha(u) > -\infty$;

2) *если в некоторой точке $u \in U$ выполнено $\varphi_\alpha(u) = -\infty$, то*

$$\inf_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) = -\infty,$$

причем данный инфимум не достигается;

3) *в случае компактного множества U оптимальная стратегия в задаче (11) существует при $\varphi_\alpha^* < +\infty$.*

Замечание 10. В [10] аналогичная теорема доказана для случая, когда только значение $b(X)$ случайно, а $A(X)$ и $B(X)$ являются детерминированными.

7.2. Применение доверительного метода

При применении доверительного метода для решения задачи (5) для функций (28) и (29) выражение (14) примет вид

$$\begin{gathered}\Psi(u, S) \triangleq \sup_{x\in S} \Phi(u, x) = \\ = \sup_{x\in S} \left\{ c^\top(x)u + \inf_{y\in Y} \left\{ q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x) \right\} \right\}.\end{gathered} \tag{32}$$

Как следует из теоремы 8, значение $\Psi(u,S)$ при всех допустимых значениях u и S является верхней оценкой φ_α^*. Поэтому при удачном выборе S решение задачи минимизации функции $u \mapsto \Psi(u,S)$ обеспечивает близкое к оптимальному значение критериальной функции.

Преобразуем выражение (14). Если множество $\{y \in Y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\}$ непусто, то, вводя двойственные переменные $v \in \mathbb{R}^l$, можно получить равенство

$$\begin{aligned}\inf_{y\in Y}\Big\{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\Big\} =\\ = \sup_{v\in\mathbb{R}^l}\Big\{(b(x) - A(x)u)^\top v \mid B^\top(x)v \leqslant b(x),\ v \geqslant 0\Big\}.\end{aligned} \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32) и переставляя супремумы, получаем

$$\Psi(u,S) = \sup_{v\in\mathbb{R}^l}\sup_{x\in S}\Big\{c^\top(x)u + (b(x) - A(x)u)^\top v \mid B^\top(x)v \leqslant b(x),\ v \geqslant 0\Big\}. \tag{34}$$

В зависимости от вида задачи представление $\Psi(u,S)$ в форме (34) может оказаться удобней, чем его исходное определение в форме (32). Например, в случае многогранного доверительного множества S внутренняя задача максимизации является задачей линейного программирования.

7.3. Построение выборочных аппроксимаций задачи с вероятностным критерием

Построим выборочную аппроксимацию задачи (4) для функций (28), (29). Согласно теореме 9 последовательность решений задачи (22) сходится к оптимальному решению задачи (4) как по стратегии, так и по значению критериальной функции.

Рассмотрим задачу (22) при фиксированной реализации $\{x_k\}_{k=1}^n$ выборки $\{X_k\}_{k=1}^n$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \chi_{[-\infty,\varphi]}\left(c^\top(x_k)u + \inf_{y\in Y}\{q^\top(x_k)y \mid A(x_k)u + B(x_k)y \geqslant b(x_k)\}\right) \to \sup_{u\in U}. \tag{35}$$

Докажем, что задача (35) эквивалентна смешанной целочисленной задаче.

Теорема 13. *Пусть $\varphi \in \mathbb{R}^1$ и множество U непусто и ограничено. Тогда любая оптимальная стратегия u_n^φ в задаче* (35) *является оптимальным значением переменной u в задаче*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_k \to \sup_{u\in U,\, y_1,\dots,y_n\in Y,\, \delta\in\{0,1\}^n} \tag{36}$$

при ограничениях

$$c^\top(x_k)u + q^\top(x_k)y_k \leqslant \varphi + L_1(1-\delta_k) \tag{37}$$

и

$$A(x_k)u + B(x_k)y_k \geqslant b(x_k) - L_2(1-\delta_k)e_l, \tag{38}$$

где e_l *— вектор, составленный из* l *единиц,*

$$L_1 \geqslant \max_{k=\overline{1,N}} \sup_{u\in U} |c^\top(x_k)u - \varphi|,$$
$$L_2 \geqslant \max_{k=\overline{1,N}} \sup_{u\in U} \|b(x_k) - A(x_k)u\|_\infty,$$

и любое оптимальное значение u *в задаче* (36) *является оптимальной стратегией в задаче* (35).

Замечание 11. В случае когда множество U является выпуклым многогранником, задача (36) является смешанной целочисленной задачей линейного программирования.

8. Заключение

В статье представлен общий подход к исследованию двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями, показана эквивалентность априорной и апостериорной постановок задачи. Продемонстрировано применение доверительного метода и метода выборочных аппроксимаций. Данные методы могут быть детально проработаны для конкретных классов целевых функций за счет применения специальных методов, например выпуклого программирования. В дальнейшем планируется предложенные подходы распространить на такие классы задач стохастического программирования, как многоэтапные и двухуровневые задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы проверим условия теоремы 1. Заметим, что целевую функцию потерь при дополнительном соглашении $-\infty + \infty = +\infty$ можно представить в виде

$$\Phi(u,x) = \inf_{y\in Y} \left\{ \Phi_2(u,y,x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x)) \right\}, \tag{П.1}$$

где

$$\delta_A(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \in A; \\ +\infty, & \text{если } q \notin A. \end{cases} \tag{П.2}$$

Заметим, что $\delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x)) \leqslant 0$ тогда и только тогда, когда $Q(u,y,x) \leqslant 0$. Поэтому нижнее множество уровня функции $(y,x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x))$ для всех $a \in [0,+\infty)$ совпадает с множеством

$$\{(y,x) \in Y \times \mathcal{X} \mid Q(u,y,x) \leqslant 0\}, \tag{П.3}$$

которое является измеримым и сечение которого при каждом $x \in \mathcal{X}$ является замкнутым. При $a \in [-\infty, 0)$ нижнее множество уровня пусто, а при $a = +\infty$ нижнее множество уровня совпадает с $Y \times \mathcal{X}$. Поэтому по определению функция $(y, x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x))$ является нормальным интеграном. А значит, и функция

$$(y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x)) \tag{П.4}$$

— нормальный интегрант. Таким образом, согласно теореме 1 функция $x \mapsto \mapsto \Phi(u, x)$ является измеримой. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Как было отмечено при доказательстве теоремы 2,

$$\delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x)) \leqslant 0$$

тогда и только тогда, когда $Q(u, y, x) \leqslant 0$. Поэтому нижнее множество уровня $a \in [0, +\infty)$ функции $(u, y, x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x))$ совпадает с множеством

$$\{(u, y, x) \in Y \times \mathcal{X} \mid Q(u, y, x) \leqslant 0\}, \tag{П.5}$$

которое является измеримым и сечение которого при каждом $x \in \mathcal{X}$ является замкнутым. Измеримость и замкнутость множеств уровня $a \in [-\infty, 0) \cup \cup \{+\infty\}$ проверяется тривиально. Таким образом, функция $(u, y, x) \mapsto \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x))$ — нормальный интегрант. Поэтому и функция

$$(u, y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x)) \tag{П.6}$$

— также нормальный интегрант. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 6. Заметим, что

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\} = \mathbf{P}\left\{\tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u, X)) \leqslant 0\right\}, \tag{П.7}$$

где

$$\tilde{\delta}_A(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \in A; \\ 1, & \text{если } q \notin A. \end{cases} \tag{П.8}$$

Построим нижние множества уровня функции $(u, x) \mapsto \tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u, x))$:

$$\begin{aligned} &\left\{(u, x) \in U \times \mathcal{X} \mid \tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u, x)) \leqslant a\right\} = \\ &= \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a < 0; \\ \{(u, x) \in U \times \mathcal{X} \mid \Phi(u, x) \leqslant \varphi\}, & \text{если } 0 \leqslant a < 1; \\ U \times \mathcal{X}, & \text{если } a \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{П.9}$$

Таким образом, нижние множества уровня содержатся в сигма-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r) \times \mathcal{F}$, и их сечения при фиксированных $x \in \mathcal{X}$ являются замкнутыми.

Отсюда следует, что функция $(u,x)\mapsto\tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u,x))$ является нормальным интегрантом, а значит, является полунепрерывной снизу по $u\in U$ для всех $x\in\mathcal{X}$ и измеримой по x для всех u, при этом согласно (П.8) она принимает только конечные значения. Поэтому согласно теореме 5 функция вероятности $u\mapsto P_\varphi(u)$ является полунепрерывной сверху для всех $\varphi\in\mathbb{R}^*$.

Для доказательства полунепрерывности функции квантили проверим равенство

$$U_P \triangleq \{u\in U \mid P_\varphi(u)\geqslant\alpha\} = U_\Phi \triangleq \{u\in U \mid \varphi_\alpha(u)\leqslant\varphi\} \tag{П.10}$$

для всех $\varphi\in\mathbb{R}^*$ и $\alpha\in(0,1]$. Равенство (П.10) известно как лемма Розенблатта, ее доказательство для случая, когда функция потерь принимает лишь конечные значения, можно найти в [9, лемма 2.10]. Пусть $u\in U_P$, т.е. выполнено неравенство $P_\varphi(u)\geqslant\alpha$. По определению квантили $\varphi_\alpha(u) = \min\{\tilde{\varphi}\in\mathbb{R}^* \mid P_{\tilde{\varphi}}(u)\geqslant\alpha\}$, а значит, $\varphi_\alpha(u)\leqslant\varphi$. Заметим, что данное неравенство выполнено и при бесконечных значениях φ или $\alpha=1$, так как функция квантили всегда определена (но может принимать бесконечные значения). Таким образом, $u\in U_\Phi$ и $U_P\subset U_\Phi$. Пусть теперь $u\in U_\Phi$. Тогда $\psi\triangleq\varphi_\alpha(u)\leqslant\varphi$. Заметим, что $\psi\in\mathbb{R}^*$ для любых $\varphi\in\mathbb{R}^*$, $\alpha\in(0,1]$. Из монотонности функции вероятности получаем, что $\alpha\leqslant P_\psi(u)\leqslant P_\varphi(u)$, поэтому $U_\Phi\subset U_P$. Равенство $U_P=U_\Phi$ доказано.

При полунепрерывности функции вероятности множества уровня U_P замкнуты. Из равенства (П.10) следует, что множества уровня функции квантили также замкнуты. А значит, функция квантили полунепрерывна снизу. Теорема 6 доказана.

Доказательство следствия 1. Из теоремы 4 следует, что функция $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом. Тогда по теореме 6 функция $u\mapsto P_\varphi(u)$ полунепрерывна сверху, а функция $u\mapsto\varphi_\alpha(u)$ полунепрерывна снизу. Таким образом, утверждение следует из теоремы Вейерштрасса. Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 7. Пусть $(u,y(\cdot))\in U\times\mathcal{Y}$. Заметим, что

$$\Phi_2(u,y(x),x)+\delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y(x),x))\geqslant$$
$$\geqslant\inf_{y\in Y}\left\{\Phi_2(u,y,x)+\delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x))\right\}=\Phi(u,x)$$

для всех $x\in\mathcal{X}$. Поэтому $\overline{P}_\varphi(u,y(\cdot))\leqslant P_\varphi(u)$, а $\bar{\varphi}_\alpha(u,y_u(\cdot))\geqslant\varphi_\alpha(u)$, откуда следует, что

$$\sup_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}}\overline{P}_\varphi(u,y(\cdot))\leqslant P_\varphi(u),\qquad \inf_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}}\bar{\varphi}_\alpha(u,y_u(\cdot))\geqslant\varphi_\alpha(u).$$

Покажем, что полученые неравенства выполнены как равенства. Так как функции $(y,x)\mapsto\Phi_2(u,y,x)$ и $(y,x)\mapsto Q(u,y,x)$ — нормальные интегранты и в силу предположения об ограниченности множеств уровня функции потерь справедливо, что

$$Y^*(u,x)\triangleq\operatorname{Arg}\min_{y\in Y}\{\Phi_2(u,y,x)\mid Q(u,y,x)\leqslant 0\}\neq\varnothing, \tag{П.11}$$

если $\Phi(u,x) < +\infty$. По теореме 1 существует измеримая функция $x \mapsto y_u(x)$ такая, что $y_u(x) \in Y^*(u,x)$ при $\Phi(u,x) < +\infty$. Доопределим функцию $x \mapsto \mapsto y_u(x)$ для случая $\Phi(u,x) = +\infty$ так, чтобы $y_u(x) \in Y$. Легко видеть, что $P_\varphi(u) = \overline{P}_\varphi(u, y_u(\cdot))$ и $\varphi_\alpha(u) = \bar{\varphi}_\alpha(u, y_u(\cdot))$. Таким образом, выполнены доказываемые равенства (12) и (13). Теорма 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Согласно теореме 2, при выполнении условия теоремы функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ является измеримой, поэтому задача (5) сформулирована корректно.

Пусть $u \in U$ и $S \in \mathcal{F}_\alpha$. Справедливо, что

$$P_{\Psi(u,S)}(u) = \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \Psi(u,S)\} \geqslant \mathbf{P}(S) \geqslant \alpha.$$

Поэтому

$$\Psi(u,S) \geqslant \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\} = \varphi_\alpha(u). \tag{П.12}$$

Покажем, что равенство в (П.12) достигается. Определим множество

$$S_u \triangleq \{x \in \mathcal{X} \colon \Phi(u,x) \leqslant \varphi_\alpha(u)\}. \tag{П.13}$$

Легко видеть, что

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\} = \sup_{x \in S_u} \Phi(u,x) = \Psi(u, S_u).$$

Таким образом, доказываемое равенство (16) выполнено. Теорема 8 доказана.

Доказательство следствия 2. По теореме 4 функция $(u,x) \mapsto \mapsto \Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом. Отсюда по теореме 9 следует выполнение соотношений (24) и (25). Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 10. Для $\varphi^*_\alpha \in \mathbb{R}^1$ теорема 10 доказана в [23]. Заметим, что условие $\Phi(u,x) > -\infty$ и полунепрерывность снизу функции $u \mapsto \Phi(u,x)$ исключают возможность $\varphi^*_\alpha = -\infty$.

Проведем доказательство для случая $\varphi^*_\alpha = +\infty$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ и последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, в которой $u_n \in U_\alpha^{(n)}$, если $\varphi_n < +\infty$, и $u_n \in U$, если $\varphi_n = +\infty$. Введем обозначение

$$\bar{\varphi} \triangleq \liminf_{n \to \infty} \varphi_n. \tag{П.14}$$

При доказательстве аналогичной теоремы в [23] показано, что $\bar{\varphi} > -\infty$ и при конечном значении $\bar{\varphi}$ существует бесконечное множество индексов K, для которого

$$\limsup_{\substack{n \to \infty \\ n \in K}} P^{(n)}_{\varphi_n}(u_n) \leqslant P_{\bar{\varphi}}(\bar{u}) \quad (\mathbf{P}'\text{-п.н.}), \tag{П.15}$$

где $\bar{u}$ — предельная точка последовательности $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. Заметим, что неравенство (П.15) остается верным при $\bar{\varphi} = +\infty$, так как $P_{+\infty}(\bar{u}) = 1$.

Так как $P^{(n)}_{\varphi_n}(u_n) \geqslant \alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то для предельной точки выполнено соотношение $P_{\bar\varphi}(\bar u) \geqslant \alpha$, откуда следует, что

$$\bar\varphi = \liminf_{n\to\infty} \varphi_n \geqslant \varphi^* = +\infty \quad (\mathbf{P}'\text{-п.н.}), \tag{П.16}$$

а значит, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*_\alpha$ ($\mathbf{P}'$-п.н.). Теорема 10 доказана.

Доказательство теоремы 11. В случае $\varphi = +\infty$ утверждение тривиально. Будем считать, что $\varphi \in \mathbb{R}^1$.

Пусть $u \in U$ и $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$. Проверка неравенства $\overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \leqslant P_\varphi(u)$ производится так же, как и при доказательстве теоремы 7. Теперь покажем, что в этом неравенстве может быть достигнуто равенство. Выберем измеримую функцию $x \mapsto y_u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{gathered} y_u(x) \in Y^*(u,x), \text{ если } Y^*(u,x) \neq \varnothing; \\ y_u(x) \in Y, \text{ если } \Phi(u,x) = +\infty; \\ q^\top(x) y_u(x) \leqslant \varphi \text{ и } A(x)u + B(x)y_u(x) \geqslant b(x), \text{ если } \Phi(u,x) = -\infty, \end{gathered}$$

для всех $x \in \mathcal{X}$. По теореме 1 существует измеримая функция $x \mapsto y_u(x)$ такая, что $y_u(x) \in Y^*(u,x)$. Существование измеримой функции $y_u(x)$, определенной для x, при которых $\Phi(u,x) = -\infty$, и удовлетворяющей сформулированным условиям, следует также из теоремы 1, если в качестве функции $f(\cdot)$ рассмотреть нормальный интегрант

$$(y,x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(q^\top(x)y - \varphi) + \delta_{[0,+\infty]}\left(\min_{i=\overline{1,l}} (A(x)u + B(x)y - b(x))_i\right). \tag{П.17}$$

Нетрудно видеть, что $P_\varphi(u) = \overline{P}_\varphi(u, y_u(\cdot))$. Таким образом, доказываемое равенство получено.

Существование оптимальной стратегии в задаче (4) в случае непустого компактного множества U следует из полунепрерывности сверху критериальной функции и теоремы Вейерштрасса, а существование оптимальной стратегии в задаче (10) — из доказанной эквивалентности задач (4) и (10). Теорема 11 доказана.

Доказательство теоремы 12. Пусть $u \in U$ и $\varphi^*_u \triangleq \varphi_\alpha(u) \neq -\infty$. Неравенство $\varphi_\alpha(u) \leqslant \bar\varphi_\alpha(u, y(\cdot))$ для всех $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ проверяется так же, как и при доказательстве теоремы 7. Выберем измеримую функцию $x \mapsto y_u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{gathered} y_u(x) \in Y^*(u,x), \text{ если } Y^*(u,x) \neq \varnothing; \\ y_u(x) \in Y, \text{ если } \Phi(u,x) = +\infty; \\ q^\top(x) y_u(x) \leqslant \varphi^*_u \text{ и } A(x)u + B(x)y_u(x) \geqslant b(x), \text{ если } \Phi(u,x) = -\infty, \end{gathered}$$

для всех $x \in \mathcal{X}$. Существование указанной функции $x \mapsto y_x(u)$ следует из теоремы 1. Для случая $\Phi(u,x) = -\infty$ теорему 1 следует применить к нормальному интегранту

$$(y,x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(q^\top(x)y - \varphi^*_u) + \delta_{[0,+\infty]} \min_{i=\overline{1,l}} (A(x)u + B(x)y - b(x))_i\,. \tag{П.18}$$

Легко видеть, что $\varphi_\alpha(u) = \bar{\varphi}_\alpha(u, y_u(\cdot))$.

Рассмотрим случай, когда $\varphi_\alpha(u) = -\infty$ в некоторой точке $u \in U$. Выбирая φ_u^* сколь угодно малым, можно построить решение задачи (11) со сколько угодно малым значением критериальной функции, поэтому

$$\inf_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) = -\infty.$$

Поскольку в силу определения $\bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) > -\infty$ для всех $u \in U$ и $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$, то инфимум в задаче (11) не достигается.

Существование оптимальной стратегии в задаче (5) в случае компактного множества U следует из полунепрерывности снизу функции квантили и теоремы Вейерштрасса. Теорема 12 доказана.

Доказательство теоремы 13. Пусть u_n^φ — оптимальная стратегия в задаче (35). Обозначим оптимальное значение целевой функции задачи (36) через P^* и покажем, что $P^* = P_\varphi(u_n^\varphi)$. Для этого построим вектор допустимых стратегий в задаче (36). Пусть $\bar{y}_k$ — некоторый элемент множества

$$\left\{ y \in Y \mid c^\top(x_k)u + q^\top(x_k)y \leqslant \varphi,\ A(x_k)u + B(x_k)y \geqslant b(x_k) \right\}, \tag{П.19}$$

если оно непусто, и $\bar{y}_k = 0$, если данное множество пусто. Если множество (П.19) при заданном k непусто, то определим $\bar{\delta}_k = 1$ и $\bar{\delta}_k = 0$, если при заданном k множество (П.19) пусто. В силу определения констант L_1 и L_2 вектор стратегий $(u_n^\varphi, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{\delta})$ является допустимым в задаче (36) и обеспечивает значение $P_\varphi(u_n^\varphi)$ критериальной функции. Таким образом, $P^* \geqslant P_\varphi(u_n^\varphi)$.

Пусть теперь $(u, y_1, \ldots, y_n, \delta)$ — оптимальная стратегия в задаче (36). Если $\delta_k = 1$, то

$$c^\top(x_k)u + q^\top(x_k)y_k \leqslant \varphi \tag{П.20}$$

и

$$A(x_k)u + B(x_k)y_k \geqslant b(x_k), \tag{П.21}$$

поэтому

$$c^\top(x_k)u + \inf_{y\in Y} \left\{ q^\top(x_k)y \mid A(x_k)u + B(x_k)y \geqslant b(x_k) \right\} \leqslant \varphi.$$

Таким образом, $P^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k \leqslant P_\varphi(u_n^\varphi)$, а значит, $P^* = P_\varphi(u_n^\varphi)$. Из полученного равенства и первой части доказательства видно, что значение u_n^φ является оптимальным значением u в задаче (36). Для доказательства того, что оптимальное значение u в задаче (36) оптимально в (35), предположим противное, а именно: $P_\varphi(u) < P_\varphi(u_n^\varphi)$. Но из неравенств (П.20) и (П.21) следует, что $P_\varphi(u) \geqslant P^* = P_\varphi(u_n^\varphi)$. Полученное противоречие доказывает теорему 13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birge J.R., Louveaux F.* Introduction to Stochastic Programming. N.Y.: Springer, 2011.
2. *Kall P., Mayer J.* Stochastic Linear Programming: Models, Theory and Computation. N.Y.: Springer, 2011.
3. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Boston: Kluwer Acad. Publishers, 1995.
4. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009.
5. *Wets R.J.-B.* Stochastic Programs with Fixed Recourse: the Equivalent Deterministic Program // SIAM Rev. 1974. V. 16. No. 3. P. 309–339.
6. *Frauendorfer K.* Stochastic Two-Stage Programming. Berlin—Heidelberg: Springer, 1992.
7. *Kulkarni A.A., Shanbhag U.V.* Recourse-Based Stochastic Nonlinear Programming: Properties and Benders-SQP Algorithms // Comput. Optim. Appl. 2012. V. 51. No. 1. P. 77–123.
8. *Kibzun A.I., Kan Y.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester—N.Y.—Brisbane—Toronto—Singapore: John Wiley & Sons, 1996.
9. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
10. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // АиТ. 1995. № 1. С. 83–93.

    Kibzun A.I., Naumov A.V. Two-Stage Quantile Linear Programming Problem // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 1. P. 68–76.
11. *Schultz R., Tiedemann S.* Conditional Value-at-Risk in Stochastic Programs with Mixed-Integer Recourse // Math. Program. Ser. B. 2006. V. 105. P. 365–386.
12. *Норкин В.И., Кибзун А.И., Наумов А.В.* Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50. № 5. С. 34–48.

    Norkin V.I., Kibzun A.I., Naumov A.V. Reducing Two-Stage Probabilistic Optimization Problems with Discrete Distribution of Random Data to Mixed-Integer Programming Problems // Cybernet. Syst. Anal. 2014. V. 50. No. 5. P. 679–692.
13. *Sen S.* Relaxation for Probabilistically Constrained Programs with Discrete Random Variables // Oper. Res. Lett. 1992. V. 11. P. 81–86.
14. *Ruszczyński A.* Probabilistic Programming with Discrete Distributions and Precedence Constrained Knapsack Polyhedra // Math. Program. 2002. V. 93. P. 195–215.
15. *Luedtke J., Ahmed S., Nemhauser G.* An Interger Programming Approach for Linear Programs with Probabilistic Constraints // Math. Program. 2010. V. 122. P. 247–272.
16. *Saxena A., Goyal V., Lejeune M.A.* MIP Reformulations of the Probabilistic Set Covering Problem // Math. Program. 2010. V. 121. P. 1–31.
17. *Богданов А.Б., Наумов А.В.* Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке // АиТ. 2006. № 12. С. 36–42.

    Bogdanov A.B., Naumov A.V. Solution to a Two-step Logistics Problem in a Quantile Statement // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 12. P. 1893–1899.

18. *Кибзун А.И., Тарасов А.Н.* Стохастическая модель функционирования системы закупки электроэнергии на участке железной дороги // АиТ. 2018. № 3. С. 44–60.

Kibzun A.I., Tarasov A.N. Stochastic Model of the Electric Power Purchase System on a Railway Segment // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 3. P. 425–438.

19. *Artstein Z., Wets R.J.-B.* Consistency of Minimizers and the SLLN for Stochastic Programs // J. Convex Anal. 1996. V. 2. P. 1–17.

20. *Pagnoncelli B.K., Ahmed S., Shapiro A.* Sample Average Approximation Method for Chance Constrained Programming: Theory and Applications // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 142. P. 399–416.

21. *Campi M.C., Garatti S.* A Sampling-and-Discarding Approach to Chance-Constrained Optimization: Feasibility and Optimality // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 148. P. 257–280.

22. *Higle J.L., Sen S.* Statistical Approximations for Stochastic Linear Programming Problems // Ann. Oper. Res. 1999. V. 85. P. 173–192.

23. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* О сходимости выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными критериями // АиТ. 2018. № 2. С. 19–35.

Ivanov S.V., Kibzun A.I. On the Convergence of Sample Approximations for Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 216–228.

24. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Ioffe A.D., Tihomirov V.M. Theory of Extremal Problems. Amsterdam: North-Holland, 1979.

25. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Variational Analysis. Berlin: Springer, 2009.

26. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: МЦНМО, 2017.

Shiryaev A.N. Probability-1. N.Y.: Springer, 2016.

27. *Женевская И.Д., Наумов А.В.* Метод декомпозиции для решения двухэтапных задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием // АиТ. 2018. № 2. С. 36–50.

Zhenevskaya I.D., Naumov A.V. The Decomposition Method for Two-Stage Stochastic Linear Programming Problems with Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 229–240.

28. *Kibzun A.I.* Comparison of Two Algorithms for Solving a Two-Stage Bilinear Stochastic Programming Problem with Quantile Criterion // Appl. Stochast. Models Business Industry. 2015. V. 31. No. 6. P. 862–874.

29. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2017. Т. 23. № 3. С. 134–143.

Ivanov S.V., Kibzun A.I. Sample Average Approximation in a Two-Stage Stochastic Linear Program with Quantile Criterion // Proc. Steklov Institut. Math. 2018. V. 303. Suppl. 1. P. 107–115.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 27.08.2018

После доработки 21.01.2019

Принята к публикации 07.02.2019