

# Управление в социально-экономических системах

© 2019 г. С.А. ВАВИЛОВ, д-р физ.-мат. наук (savavilov@inbox.ru)  
(Санкт-Петербургский государственный университет),  
К.С. КУЗНЕЦОВ (kostas.92@mail.ru)  
(Санкт-Петербургский государственный университет)

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ СРЕДНЕВЗВЕШЕННОЙ ЦЕНОЙ ПРОДАЖ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ НА ТОВАРНЫХ БИРЖАХ

Предложен метод управления средневзвешенной ценой продаж производителя на товарных биржах. Актуальность поставленной задачи обусловлена необходимостью для производителя хеджировать свою прибыль от резкого падения рыночных цен. Рассматриваются приложения предложенного управления к совершению торговых операций на реальных товарных биржах с целью демонстрации его эффективности.

*Ключевые слова:* товарные биржи, случайные процессы, управление продажами.

DOI: 10.1134/S0005231019060084

### 1. Введение

Нестабильность поведения цен на современных товарных рынках, включающих в себя торговлю нефтью, газом, древесиной и прочими широко востребованными товарами общественного потребления, заставляет пересмотреть ряд устоявшихся в течение длительного времени и ставших привычными взаимоотношения между продавцами товара и его покупателями. Прежде всего, это касается отказа от заключения долгосрочных контрактов, когда покупатель, сознавая всю непредсказуемость будущего поведения рыночной стоимости товара, предпочитает осуществлять его приобретение в рамках специализированных бирж с обязательной поставкой купленного товара за относительно короткий промежуток времени. Весьма убедительно описанная тенденция проявляется, например, во взаимоотношениях производителей и поставщиков российского природного газа и их европейских потребителей. В настоящее время в Европе существует 13 хранилищ газа (хабов) и организованных при них 7 специализированных бирж, торгующих различными объемами газа с его обязательной двухдневной поставкой начиная с момента заключения сделки. Торговые операции при этом характеризуются высокой ликвидностью и суммарным объемом, охватывающим значительную часть мировой торговли газом. Разумеется, что подобный поворот событий требует от продавца-производителя товара определенной реакции, связанной с построением собственной стратегии управления продажами, обеспечивающей, по крайней мере, хеджирование получаемой денежной выручки от резкого

«проседания» рыночной стоимости товара. Одной из таких стратегий может служить построение управления, связанного с увеличением средневзвешенной цены продаваемого данным производителем товара.

Разумеется, что подобная стратегия требует совершения продавцом товара не только неравномерных по объему сделок, связанных с продажей товара, но и так называемых «реверсов», отвечающих покупкам того же самого товара, совершаемым в определенных объемах и в определенное время. Цель настоящей работы заключается в описании одного из возможных способов реализации указанной стратегии и демонстрации ее эффективности на примере осуществления торгов в газовой отрасли на Европейской энергетической бирже<sup>1</sup>.

## 2. Формализация постановки задачи

Будем исходить из того, что на заданном промежутке времени  $[0, T]$  цены биржевых сделок  $x_t$ ,  $t \in [0, T]$  относительно единицы рассматриваемого товара удовлетворяют следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$(1) \quad dx_t = c(t, x_t) dt + \sigma_t x_t dW_t,$$

$\sigma_t = \sigma(t, \omega)$  – коэффициент волатильности, представляющий собой неизвестную, вообще говоря случайную, функцию времени, не зависящую от  $x_t$ ,  $W_t$  – стандартный винеровский процесс [1]. Структура коэффициента сноса  $c(t, x_t)$  в данной работе не требует отдельной спецификации, однако предполагается, что реализации случайного процесса  $x_t$  не принимают отрицательных значений с вероятностью единица и, кроме того, задача Коши для уравнения (1) имеет единственное сильное решение [2]. Вопрос об адекватности выбранной модели ценообразования для рассматриваемой ниже задачи управления обсуждается отдельно в Приложении 1. В дальнейшем соответствующими буквами, но только с волной будем обозначать наблюдаемые реализации рассматриваемых случайных процессов, как например  $\tilde{x}_t$  и  $x_t$ .

Под средневзвешенной ценой продаж производителя на промежутке времени  $[0, T]$  будем понимать величину

$$\tilde{x}_T^{av} = \frac{\tilde{V}_T}{\tilde{a}_T},$$

где  $\tilde{V}_T$  – вырученный на промежутке времени  $[0, T]$  объем денежных средств,  $\tilde{a}_T$  – количество проданных на том же промежутке времени единиц товара.

Под целью управления будем понимать такое количество продаваемого на промежутке времени  $[0, t]$ , где  $t \in [0, T]$ , единиц товара  $\tilde{a}_t$  ( $\tilde{a}_0 = 0$ ,  $\tilde{a}_t < 0$ , при  $t > 0$  и  $\tilde{a}_t$  отвечает реализации цены  $\tilde{x}_t$ ), которое бы обеспечило выполнение условия

$$(2) \quad \tilde{x}_T^{av} > \max_{t \in [0, T]} \tilde{x}_t,$$

<sup>1</sup> European Energy Exchange AG: [Электронный ресурс]. Лейпциг, 2017. URL: <https://www.eex.com> (дата обращения: 15.05.2017).

при этом при построении управления  $\tilde{a}_t$  в качестве обратной связи могут быть использованы только цены совершаемых биржевых сделок на промежутке времени  $[0, t]$ . Другими словами, исходим из того, что коэффициенты в уравнении (1) не поддаются оценке, по крайней мере, с требуемой степенью точности в режиме реального времени. Интуитивно понятно, что обеспечить выполнение условия (2) можно только за счет наращивания некоторой спекулятивной прибыли (точное определение будет дано ниже), возникающей в результате постепенного реинвестирования в товар некоторой части высвобождающихся в результате продаж наличных денег с последующей перепродажей товара, исходя из динамики биржевых сделок начиная с момента начала управления. В следующем разделе будет построено одно из указанных возможных управлений, которое при выполнении определенных условий обеспечит справедливость неравенства (2).

### 3. Построение управления

Далее будем следовать непрерывной модели финансовых рынков [3] и, в частности, подходу, связанному с построением управления альтернативного стратегии самофинансирования, учитывающего процесс реинвестирования денег в товар, первоначально предложенному в [4] и затем подробно изложенному в [5] (см. также [6]), но только в отличие от упомянутой статьи [5] для случая короткой позиции и применительно к операциям на товарной бирже.

Введем в рассмотрение случайную функцию, исходя из формулы

$$(3) \quad f_t = a_t x_t + m_t,$$

где  $a_t = a(t, \omega)$  является измеримой случайной функцией, определяющей количество единиц товара, проданного на промежутке времени  $[0, t]$ ;  $m_t = m(t, \omega)$  – измеримая случайная функция, явное выражение для которой будет дано ниже. Будем исходить из управления функцией  $f_t$ , определяемого на каждый момент времени соотношением

$$(4) \quad df_t = a_t dx_t + l(t, x_t) dt,$$

где  $dx_t$  является правой частью уравнения (1). Второе слагаемое в (4) будем интерпретировать как вырученный в результате продаж и выведенный из процесса управления за интервал времени  $[t, t + dt]$  объем наличных денег. Зависимость  $l(t, x_t)$  в дальнейшем будет выступать в роли управляющей функции. Применяя к левой и правой частям соотношения (3) процедуру вычисления стохастического дифференциала, получим формулу

$$df_t = a_t dx_t + x_t da_t + da_t dx_t + dm_t.$$

Последнее соотношение с использованием зависимости (4) может быть переписано в виде

$$dm_t = -x_{t+dt} da_t + l(t, x_t) dt,$$

где  $x_{t+dt} = x_t + dx_t$ , или в интегральной форме

$$(5) \quad m_t = - \int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau + \int_0^t l(\tau, x_\tau) d\tau.$$

Определим понятие «спекулятивной прибыли», полученной в результате совершенных на промежутке времени  $[0, t]$  торговых операций, следующим образом:

$$(6) \quad p_t = a_t x_t - \int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau,$$

при этом здесь будет рассматриваться случай короткой позиции, когда  $a_t < 0$  при  $t > 0$ .

С учетом (3)–(5) зависимость (6), как нетрудно проверить, эквивалентна соотношению

$$(7) \quad p_t = f_t - \int_0^t l(\tau, x_\tau) d\tau.$$

Поясним понятие «спекулятивной прибыли» в данной конкретной ситуации более подробно. Предположим, что на фиксированные моменты времени  $1, \dots, n$  по ценам  $x_1, \dots, x_n$  было продано или куплено  $b_1, \dots, b_n$  единиц товара, при этом  $b_i < 0$  отвечает продаже,  $b_i > 0$  соответствует покупке указанного его количества  $|b_i|$ . Будем исходить из того, что имеет место короткая позиция. Последнее означает выполнение неравенства  $\sum_{i=1}^j b_i < 0$  для любого  $j = 1, \dots, n$ . Тогда понятно, что сумма денежных средств, вырученная в результате указанных торговых операций, определится соотношением  $-\sum_{i=1}^n x_i b_i$ .

С другой стороны, интеграл  $-\int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau$  представляет собой непрерывный аналог указанного соотношения, при этом символ  $x_{\tau+d\tau}$  означает, что при представлении данного интеграла в виде предела соответствующих сумм подынтегральная величина вычисляется на правом конце соответствующих интервалов разбиения. Одновременно имеет место тождество

$$-\int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau = a_t x_t - \int_0^t x_{\tau+d\tau} da_\tau + |a_t| x_t,$$

т.е., другими словами, вырученная сумма денег на интервале времени  $[0, t]$  состоит из «спекулятивной прибыли» и суммы денег, полученной от реализации товара на момент времени  $t$ .

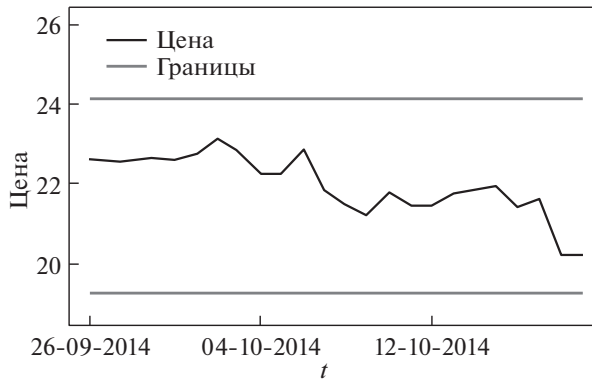


Рис. 1. Выбор ценового коридора.

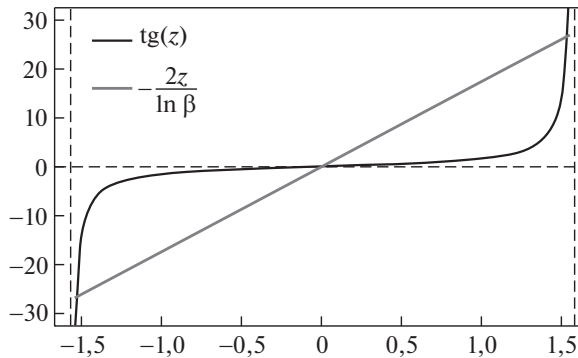


Рис. 2. Выбор корня трансцендентного уравнения.

Обратим внимание на то, что отличие модели (3), (4) от моделей управления с потреблением [7, 8] заключается в том, что величина  $m_t$ , как видно из (5), отвечает процессу реинвестирования, когда денежные средства, выручаемые в процессе совершения спекулятивных операций, вкладываются в покупку определенного количества единиц товара. Несмотря на то, что  $m_t$  не входит явно в (7), ее отсутствие привело бы к тому, что в (7) величина  $f_t$  равнялась бы  $a_t x_t$ . Это означало бы отсутствие указанного выше эффекта реинвестирования и, как следствие, спекулятивной прибыли.

Введем в рассмотрение ценовой коридор  $[a, b]$ , первоначально полагая, что наблюдаемые значения стоимости единицы товара, т.е. реализация случайного процесса  $\tilde{x}_t$  на всем промежутке времени  $t \in [0, T]$ , будут находиться в указанном ценовом коридоре и, соответственно,  $\tilde{x}_t \in [a, b]$ . Ниже укажем на способ расширения ценового коридора в процессе совершения торговых операций при возникновении такой необходимости, т.е. в ситуации, когда наблюдаемое значение цены  $\tilde{x}_t$  пересечет одну из его границ. Кроме того, для удобства вычислений нормируем цену единицы товара на величину верхней границы ценового коридора и, соответственно, в процессе дальнейшего изложения будем полагать, что  $\tilde{x}_t \in (\beta, 1)$ , где  $\beta = a/b$ , как это показано на рис. 1.

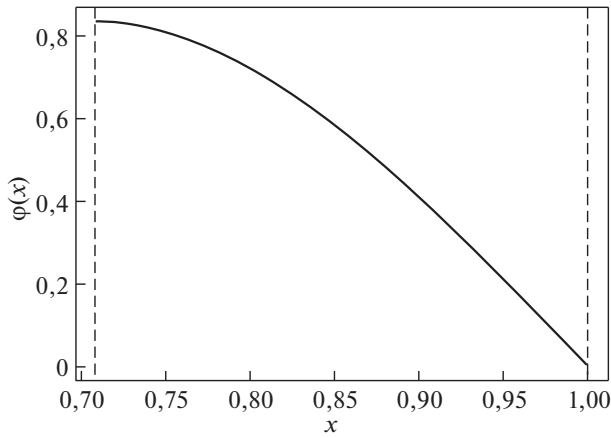


Рис. 3.  $\varphi(x)$  – решение задачи (8).

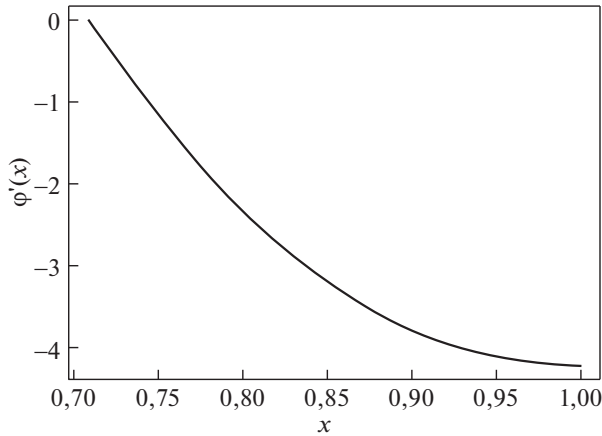


Рис. 4.  $\varphi'(x)$  – производная от решения задачи (8).

Далее, введем в рассмотрение зависимость  $\varphi(x)$ , отвечающую первой собственной функции задачи Штурма–Лиувилля

$$(8) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\lambda_1^2}{x^2}\varphi = 0,$$

$$\varphi(1) = \varphi'(\beta) = 0.$$

Нетрудно убедиться [9], что в качестве первой собственной функции можно выбрать  $\varphi(x) = \sqrt{x} \sin(b \ln x)$ , при  $b = \frac{z^+}{\ln \beta} < 0$ , где  $z^+ > 0$  является минимальным по модулю, строго положительным корнем трансцендентного уравнения  $\operatorname{tg} z = -\frac{2z}{\ln \beta}$ , как это показано на рис. 2, при этом, очевидно, должно выполняться неравенство  $-\frac{2}{\ln \beta} > 1$ , что требует выбора достаточно узкого ценового коридора, а именно, величина  $\beta$  должна удовлетворять неравенству  $\frac{1}{e^2} < \beta < 1$ .

Кроме того, на рис. 3 и 4 приведены соответственно графики функций  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x)$ .

Первое собственное число  $\lambda_1$ , отвечающее первой собственной функции задачи (8), удовлетворяет зависимости  $\lambda_1^2 = b^2 + \frac{1}{4}$ , при этом заметим, что  $\varphi'(1) = b < 0$ . Зададим теперь динамику изменения количества единиц товара  $a_t$ , проданного на интервале времени  $[0, t]$ , следующим образом:

$$(9) \quad \tilde{a}_t = \int_0^t \frac{u_0(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(x_t)|_{x_t=\tilde{x}_t},$$

где  $u_0(\tau) > 0$  представляет собой произвольную кусочно-непрерывную функцию.

*Теорема.* Пусть цена  $x_t$  следует стохастическому дифференциальному уравнению (1), при этом коэффициент волатильности  $\sigma_t = \sigma(t, \omega)$  как случайная функция не зависит от процесса  $x_t$ . Тогда если количество единиц проданного товара во времени задается формулой (9), то «спекулятивная прибыль» определяется соотношением

$$(10) \quad \tilde{p}_t = \int_0^t \frac{u_0(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi(\tilde{x}_t) - \int_0^t u_0(\tau) e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_\tau^t \tilde{\sigma}_s^2 ds} d\tau,$$

при этом зависимость

$$(11) \quad \tilde{V}_T = \tilde{p}_T + |\tilde{a}_T| \tilde{x}_T$$

определяет общий объем вырученных на временном интервале  $[0, T]$  наличных денег.

Доказательство теоремы приведено в Приложении 2.

*Замечание.* Отметим, что выбор именно первой собственной функции задачи Штурма–Лиувилля (8) обеспечивает ее отличие от нуля внутри ценового коридора  $(\beta, 1)$  и, как следствие, отсутствие сингулярностей в знаменателях формул (9) и (10). Также заметим, что, как это было анонсировано ранее, управление  $a_t$ , определяемое формулой (9), не содержит в явном виде коэффициенты стохастического дифференциального уравнения (1).

Обратим внимание на то, что средневзвешенная цена реализованного товара на интервале времени  $[0, T]$  в количестве  $|a_T|$  может быть вычислена исходя из соотношения

$$(12) \quad \tilde{x}_T^{av} = \tilde{x}_T + \frac{\tilde{p}_T}{|\tilde{a}_T|}.$$

Из (12) видно, что при одном и том же объеме проданного товара  $|\tilde{a}_T|$  большая средневзвешенная цена отвечает большей спекулятивной прибыли. В то же время анализ соотношения (10) показывает, что увеличению средневзвешенной цены способствуют два фактора. Первый фактор является временным и связан с увеличением средневзвешенной цены с ростом времени при

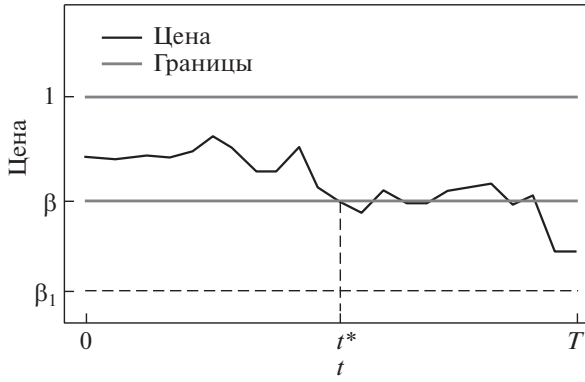


Рис. 5. Расширение ценового коридора.

условии, что наблюдаемое значение цены  $\tilde{x}_t$  остается в одном и том же ценовом коридоре. Второй фактор увеличения обусловлен влиянием коэффициента волатильности, при котором второй интеграл в (10) экспоненциально убывает при его росте. При этом выполнение неравенства

$$\tilde{x}_T^{av} = \tilde{x}_T + \frac{\tilde{p}_T}{|\tilde{a}_T|} > \max_{t \in [0, T]} |\tilde{x}_t|$$

обеспечивает достижение цели управления (2). Наконец заметим, что выбор соответствующей функции  $\varphi(x)$  в формулировке теоремы обеспечивает желаемый рост средневзвешенной цены при падении котировок, что следует из (9), (10). Действительно, как видно из графиков функций  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x)$ , изображенных соответственно на рис. 3, 4, падение котировок  $\tilde{x}_t$  приводит к росту  $\tilde{p}_t$  и одновременно к уменьшению  $|\tilde{a}_t|$ . Кроме того, обратит внимание на тот факт, что рост котировок приводит к увеличению объема продаж.

Рассмотрим теперь вопрос о расширении ценового коридора в случае возникновения такой необходимости. Предположим, что на момент времени  $t^*$  наблюдаемое значение цены  $\tilde{x}_t$  пересекает нижнюю границу ценового коридора, как это показано на рис. 5. Вариант пересечения верхней границы коридора рассматривается аналогично.

В любом из этих двух случаев выбирается новый ценовой коридор, отвечающий интервалу  $(\beta_1, 1)$ . Обозначим первую собственную функцию задачи Штурма–Лиувилля (8) для нового ценового коридора через  $\varphi_1(x)$ . Выберем вместо  $u_0(\tau)$  новую управляющую функцию  $u_1(\tau)$  на временном интервале  $[0, t^*]$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^t \frac{u_1(\tau)}{\varphi_1(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi_1'(x_t) \Big|_{x_t = \tilde{x}_t} = \tilde{a}_t^*$$

для всех  $t \in [0, t^*]$ , где зависимость  $\tilde{a}_t^*$  отвечает уже совершенным на промежутке времени  $[0, t^*]$  торговым сделкам. Поставленная таким образом задача



сводится к рассмотрению уравнения Вольтерры первого рода

$$\int_0^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t)$$

относительно неизвестной функции  $x(\tau) = u_1(\tau)$ . Здесь

$$K(t, \tau) = \frac{\varphi_1'(x_t) |_{x_t=\tilde{x}_t}}{\varphi(\tilde{x}_\tau)}, \quad f(t) = \tilde{a}_t^*.$$

Последнее уравнение решается на основе стандартных методов теории некорректных задач в пространстве  $L_2$  на компактном множестве функций ограниченной вариации [10]. Соответственно, при  $t > t^*$  функция управления  $u_1(t) > 0$  может, как и ранее, быть выбрана произвольным образом в классе кусочно-непрерывных функций.

#### 4. Пример реализации построенного управления на реальных биржевых площадках

На рис. 6 приводится график цен биржевых сделок, отвечающих их усредненным значениям за одну дневную торговую сессию в европейской валюте на временном интервале с 1 октября 2014 г. по 30 сентября 2015 г. за 1 МВт·ч торгуемой энергии. На этом же графике приведена и динамика средневзвешенной цены за одну единицу того же товара, полученной в результате построенного выше управления (9). Здесь управляющая функция  $u_0(\tau)$  первоначально полагается всюду постоянной, при этом ценовой коридор выбирается симметричным относительно первой совершенной системой управления сделки и шириной, равной двум евро. В дальнейшем граница ценового коридора расширяется по мере необходимости на один евро в зависимости от «пробития» ценой его верхней или нижней границы. При этом  $u_0(\tau)$  заменяется на управляющую функцию  $u_1(\tau)$  для определенных выше значений



Рис. 6. График средневзвешенной цены.

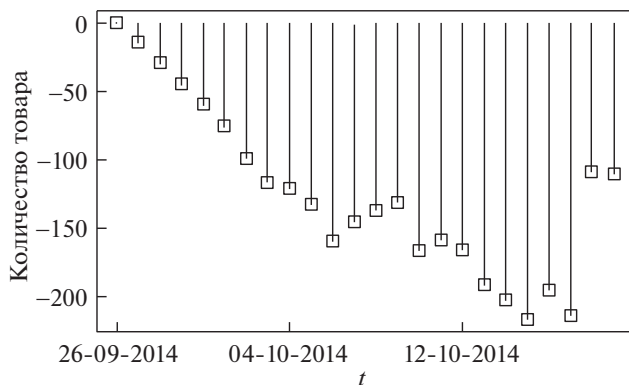


Рис. 7. Количество проданных единиц товара.

аргумента  $\tau$ , принадлежащих промежутку  $[0, t^*]$ . Кроме того на рис. 7 приведен график изменения количества проданного товара, из которого ясно виден процесс совершения соответствующих «реверсов».

## 5. Заключение

Анализ применения управления (9) на современных биржевых рынках торговли газом демонстрирует эффективный метод повышения средневзвешенной цены продаваемого товара в случае резкого уменьшения его рыночной цены. Даже нарушение выполнения условия (2) на некотором достаточно малом подмножестве временного интервала  $[0, T]$  не делает построенное управление менее эффективным поскольку априори «угадать», что именно соответствующие цены будут максимально возможными по отношению к средневзвешенной цене на момент времени  $T$ , не представляется возможным. Однако здесь возникает проблема, связанная с планируемым объемом продаж газа на фиксированном промежутке времени. Приведенная конструкция указывает на то, что проданное количество товара в результате проведения соответствующих торговых операций становится случайным и вопросы, касающиеся конкретизации выбора управляющей функции  $u_0(\tau)$ , своевременного закрытия позиций, а также планирования поставок товара, приобретают самостоятельный характер.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вопрос об адекватности используемой в данной работе модели ценообразования (1), по существу, сводится к вопросу об адекватности вычисления спекулятивной прибыли по формуле (10) при изменении количества проданного товара, определяемого соотношением (9). Заметим, что вычисление спекулятивной прибыли по формуле (6) не использует конкретную модель ценообразования и осуществляется непосредственно исходя из изменения количества проданного товара  $\tilde{a}_t$  и реестра биржевых сделок  $\tilde{x}_t$ . Поэтому без потери общности полагаем в (9)  $u_0(\tau) \equiv 1$  и вычисляем спекулятивную прибыль по формуле (6) для заданной реализации цены  $\tilde{x}_t$ . С другой стороны



Рис. 8. Графики спекулятивной прибыли, вычисленные по формулам (6) и (7).

ту же самую величину находим с использованием формулы (10), которая получена на основе модели ценообразования (1), при этом интегральная волатильность в (10) вычисляется на основе робастных алгоритмов оценивания, описанных в [11, 12]. Существенно отметить, что относительная погрешность вычисления искомой величины по формуле (10), как показывает анализ графиков на рис. 8, не превышает 7%. Здесь необходимо уточнить, что вычисления проводились с учетом того, что из упомянутых внешних источников были доступны и, соответственно, использовались лишь цены закрытия торговых сессий, что, разумеется, существенно огрубляло точность сделанных расчетов. В то же время для высоколиквидных активов, например акций из категории “голубые фишки”, торгуемых как на российском, так и на американском фондовом рынках, аналогичная величина, полученная на основе полных “intraday” данных о котировках, составляет доли процента и меньше. Кроме того заметим, что теорема будет оставаться справедливой и в случае процесса диффузии со скачками, рассмотренного в [13], а также при использовании модели Хестона [14], когда управляющие винеровские процессы в указанной модели являются независимыми или когда используемый в ней коэффициент “волатильность волатильности” равен нулю.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Доказательство теоремы.

Будем искать неизвестную функцию  $f_t$  в виде  $f_t = f(t, x_t)$ , где  $x_t$  удовлетворяет уравнению (1). Применяя к функции  $f(t, x_t)$  формулу Ито и сравнивая ее с соотношением (4), получим зависимости

$$(П.2.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 x_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} = l(t, x_t);$$

$$(П.2.2) \quad a_t = \frac{\partial f}{\partial x_t}.$$

Управление  $l(t, x_t)$  будем искать в виде

$$(П.2.3) \quad l(t, x_t) = r(t) \varphi(x_t),$$

где  $\varphi(x_t)$  представляет собой первую собственную функцию, отвечающую первому собственному числу  $\lambda_1$  задачи Штурма–Лиувилля (8). Структура функции  $r(t)$  будет определена ниже. Зададим начальные и граничные условия:

$$(П.2.4) \quad f(0, x_t) = 0,$$

$$(П.2.5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_t \rightarrow \beta,$$

$$(П.2.6) \quad f(t, x_t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_t \rightarrow 1.$$

С учетом соотношения (П.2.3) будем искать решение смешанной задачи (П.2.4)–(П.2.6) для уравнения (П.2.1) методом разделения переменных (поскольку в силу условия теоремы  $\sigma_t$  не зависит от  $x_t$ ) в виде

$$f(t, x_t) = K(t) \varphi(x_t),$$

где  $K(t)$  представляет собой неизвестную функцию. В результате несложных преобразований получим соотношение

$$(П.2.7) \quad f(t, x_t) = \int_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_{\tau}^t \sigma_s^2 ds} r(\tau) d\tau \cdot \varphi(x_t).$$

Зависимости (П.2.2), (П.2.7) определяют количество проданного товара исходя из формулы

$$(П.2.8) \quad \tilde{a}_t = \left( \frac{\partial f}{\partial x_t} \right) \Big|_{x_t = \tilde{x}_t} = \int_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_{\tau}^t \sigma_s^2 ds} r(\tau) d\tau \cdot \varphi'(x_t) \Big|_{x_t = \tilde{x}_t}.$$

Недостатком формулы (П.2.8) является то, что в нее в качестве обратной связи для вычисления  $\tilde{a}_t$  входят не только цены совершаемых по данному товару сделок, но и волатильность  $\tilde{\sigma}_t$ . Для устранения возникшей проблемы введем в рассмотрение следующую процедуру. Разобьем отрезок  $[0; t]$  на  $n$  частей следующим образом:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ . Определим функцию  $r(\tau)$  как предел поточечно сходящейся к ней последовательности функций  $r_n(\tau)$ , задаваемых соотношением

$$(П.2.9) \quad r_n(\tau) = \frac{u_n(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_{\tau}^{t_i} \sigma_s^2 ds},$$

где  $\tau \in (t_{i-1}, t_i]$ ,  $u_n(\tau)$  – заданные функции, при этом последовательность  $u_n(\tau)$  при  $n \rightarrow \infty$  в условиях равномерного дробления отрезка  $[0; t]$  предполагается поточечно сходящейся к некоторой функции  $u(\tau) \geq 0$ . Подставляя в (П.2.8) вместо  $r(\tau)$  последовательность (П.2.9), получим

$$\tilde{a}_{t_j} = \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{u_n(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(x_t) \Big|_{x_t = \tilde{x}_{t_j}},$$

или

$$\tilde{a}_{t_j} = \int_0^{t_j} \frac{u_n(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(x_t) \Big|_{x_t=\tilde{x}_{t_j}}.$$

Осуществляя предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  и исходя из условия равномерного дробления отрезка  $[0; t]$ , окончательно получим формулу, определяющую непрерывное распределение количества проданного товара во времени при наблюдаемом значении цены  $\tilde{x}_t$ :

$$(П.2.10) \quad \tilde{a}_t = \int_0^t \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi'(x_t) \Big|_{x_t=\tilde{x}_t}.$$

Исходя, в свою очередь, из соотношений (7), (П.2.3), (П.2.7), (П.2.9) и рассуждая аналогичным образом, приходим к формуле для величины «спекулятивной прибыли», отвечающей наблюдаемым значениям цены  $\tilde{x}_t$  на момент времени  $t$ :

$$(П.2.11) \quad \tilde{p}_t = \int_0^t \frac{u(\tau)}{\varphi(\tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \varphi(\tilde{x}_t) - \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_\tau^t \tilde{\sigma}_s^2 ds} u(\tau) d\tau.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
2. *Бородин А.Н.* Случайные процессы. СПб.: Лань, 2013.
3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998.
4. *Vavilov S.A.* On the probability models to control the investor portfolio / Asymptotic methods in probability and statistics with applications. Ed. by Balakrishnan N., Ibragimov I.A., Nevzorov V.B. Boston: Birkhauser, 2001. P. 535-547.
5. *Vavilov S.A., Ermolenko K.Yu.* On the new stochastic approach to control the investment portfolio // IAENG I. J. A. M. 2008. V. 38. I. 1. P. 54-62.  
(URL: [http://www.iaeng.org/IJAM/issues\\_v38/issue\\_1/IJAM\\_38\\_1\\_09.pdf](http://www.iaeng.org/IJAM/issues_v38/issue_1/IJAM_38_1_09.pdf))
6. *Вавилов С.А., Ермоленко К.Ю.* Финансовая математика. Стохастический анализ. М.: Юрайт, 2016.
7. *Флеминг У., Ричел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.
8. *Karatzas I., Lehoczky J.P., Shreve S.E.* Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a "Small investor" on a Finite Horizon // SIAM J. Control Optim. 1987. V. 25. No. 6. P. 1557-1586.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
10. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

11. *Zhang L., Mykland A., Ait-Sahalia Y.* A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility With Noisy High-Frequency Data // J. Amer. Stat. Ass. 2005. V. 100. No. 472. P. 1394–1411.
12. *Вавилов С.А., Ермоленко К.Ю.* Об одном подходе к проблеме непараметрического оценивания в статистике случайных процессов на основе метода некорректной задачи // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2007. Т. 351. С. 117–129.
13. *Merton R.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // J. Finan. Econom. 1976. V. 3. P. 125–144.
14. *Heston S.L.* A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency option // Rev. Financ. Stud. 1993. V. 6. No. 2. P. 327–343.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.*

Поступила в редакцию 08.12.2016

После доработки 09.01.2019

Принята к публикации 07.02.2019