*Автоматика и телемеханика, № 6, 2019*

# *Интеллектуальные системы управления, анализ данных*

**© 2019 г. М.А. ГОРЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (griefer@ccas.ru),**
**Ф.И. ЕРЕШКО, д-р техн. наук (fereshko@yandex.ru)**
**(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва)**

## ИНФОРМИРОВАННОСТЬ И ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача управления организационной системой в условиях внешней неопределенности. Исследуется вопрос о целесообразности децентрализации управления в зависимости от доступного объема информации о неопределенных факторах. Изучена качественная структура оптимальных стратегий при централизованном и децентрализованном способах управления.

*Ключевые слова*: информационная теория иерархических систем, децентрализация управления, максимальный гарантированный результат.

**DOI:** 10.1134/S0005231019060096

### 1. Введение

Проблемы информированности и децентрализации являлись одними из главных в теории принятия решений и привлекали внимание мыслителей всех эпох (см., например, [1]). В экономической теории к этим вопросам можно отнести понятие “невидимой руки” рынка Адама Смита [2]. В математической экономике, исследовании операций и управлении следует выделить две фундаментальные работы К. Эрроу.

В модели конкурентного равновесия Эрроу–Дебре [3] отражена идея децентрализации, поскольку доказана теорема о существовании конкретного значения неконтролируемого фактора – цены, при которой в системе производители – потребители существует экономическое равновесие: оптимальный спрос потребителей не превосходит оптимального предложения производителей. Выбор цен не осуществляется централизованным действием. При этом оптимальный выбор потребителей представляет собой оптимум Парето при заданных функциях полезности.

В работе К. Эрроу по теории выбора [4] устанавливается роль диктатора – высшего авторитета в группе активных участников при выборе ими альтернатив: его отсутствие при достаточно естественных предположениях о профилях предпочтений участников не приводит к выбору приемлемой для всех альтернативы, что может рассматриваться как определенная иллюстрация необходимости централизации в управлении.

В теории математического программирования одна из ключевых идей связана с декомпозицией исходной задачи (алгоритмы Данцига – Вулфа, Корнаи – Липтака) [5], особенно при больших размерностях задач, что с точки зрения исследования операций и теории игр есть процедура децентрализации в принятии решений, а в терминах экономических интерпретаций – передача властных полномочий при планировании производственной деятельности от центрального органа к подчиненным подсистемам. Однако в этих работах целевые установки подсистем возникали формально, как следствие формальных преобразований функций Лагранжа, в то время как цели подсистем могут быть непосредственно (имманентно) присущи игрокам, и несовпадение внутренних и внешне задаваемых целей может приводить к дискомфорту игроков. Это несовпадение требует дальнейших исследований.

В играх многих лиц, в которых взаимодействия имели иерархический характер, к фундаментальным работам следует отнести работы Гермейера Ю.Б. и его учеников, обзор которых содержится в монографии [6] и в работах [7–9].

В работах Гермейера Ю.Б., Моисеева Н.Н. [10–13] данная тематика составила содержание информационной теории иерархических систем, в которой они выдвинули тезис о том, что иерархия возникает тогда, когда для эффективного управления системой необходимо обрабатывать слишком большой объем информации о внешней среде. В этом случае лицо, принимающее решения, (Центр), может делегировать часть своих полномочий по выбору управлений подчиненным. Разумеется, при этом подчиненные, выбирая управления, могут (и будут) преследовать свои цели. Был поставлен вопрос: при каких условиях Центр от такой децентрализации может выиграть?

Отметим также работы [14–17], в которых была развита техника формализации конфликтных взаимодействий в условиях внешней неопределенности. Рассмотренные там постановки стимулировали дальнейшие исследования в этом направлении (некоторые результаты и дальнейшие ссылки можно найти в [8, 9]).

В работах по теории активных систем и теории организационных систем используются постановки теоретико-игровых задач отмеченного класса для описания реальных процессов принятия решений и выбора различных механизмов управления [18, 19].

Из известных зарубежных работ следует отметить близкие постановки [20–27]. В них рассматривается взаимодействие выделенного игрока и группы подчиненных, однако совсем не учитывается неопределенность внешних факторов. Соответственно ими не используется техника анализа иерархических игр.

Настоящая работа написана на основе идей Гермейера Ю.Б. и Моисеева Н.Н. [10–13]. В ней исследуется вопрос о целесообразности децентрализации управления в зависимости от объема доступной оперирующей стороне информации о “внешней среде”.

Для измерения количества информации используется способ, впервые предложенный в [28]. Эффективность управления оценивается максимальным гарантированным результатом оперирующей стороны.

Для простоты принимаются следующие предположения, обеспечивающие наличие “веерной структуры” у рассматриваемой системы управления:

- считается, что множество управлений представимо в виде декартова произведения нескольких более простых множеств;
- предполагается, что в децентрализованном варианте управление осуществляется без обратной связи, т.е. элемент верхнего уровня не имеет информации об управлениях, выбранных остальными элементами;
- при децентрализации управления считается, что элементы нижнего уровня имеют полную и, следовательно, одинаковую информацию о внешних неопределенных факторах.

В этих условиях оказывается, что элементы нижнего уровня принимают решения в условиях полной информации, и их поведение легко описать. Отказ от любого из этих предположений приводит к тому, что у элементов нижнего уровня появляется возможность и необходимость взаимодействовать между собой. Как следствие возникает целый ряд интересных и важных постановок задач. Но это уже тема для отдельного исследования.

## 2. Управляемая система

Рассмотрим простейшую модель принятия решений в условиях неопределенности. Управление рассматриваемой системой осуществляется путем выбора управления $w$ из множества $W$. Кроме того, на результат управления влияет значение неопределенного фактора $\alpha$, выбор которого не контролируется лицом, принимающим решение. Параметр $\alpha$ может принимать любое значение из множества $A$. Целью управления является максимизация значения $g(w, \alpha)$ функции $g : W \times A \to \mathbb{R}$ (как обычно $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел).

Дабы избежать в дальнейшем малоинтересных технических проблем, сделаем следующие стандартные предположения. Будем считать, что множества $W$ и $A$ наделены топологиями и компактны. Функцию $g$ будем считать непрерывной на декартовом произведении $W \times A$.

Чтобы полученные далее результаты были более наглядны, предположим, что рассматриваемая управляемая система “технологически структурирована”. А именно, множество $W$ может быть представлено, как декартово произведение

$$W = U \times V^1 \times V^2 \times \ldots \times V^n.$$

Таким образом, любое управление $w \in W$ может быть записано в виде $w = (u, v^1, v^2, \ldots, v^n)$, где $u \in U$, $v^i \in V^i$, $i = 1, \ldots, n$. Такую форму записи, когда она удобна, будем использовать без особых оговорок.

## 3. Модель централизованного управления

Будем считать, что выбор управления $w \in W$ осуществляет одно лицо, принимающее решения, (Центр). При этом Центр может получать достоверную информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора $\alpha$, но объем информации, которую он способен получить и своевременно обработать, ограничен. Предположим, Центр способен переработать $l$ бит информации. Выбор содержания этой информации – это право Центра. Предполагается, что Центр действует в интересах всей системы, следовательно, $g$ – это функция выигрыша Центра.

Сделанные предположения могут быть формализованы следующим образом.

Введем обозначение. Здесь и далее $\Phi(X,Y)$ будет обозначать семейство всех функций, отображающих множество $X$ в множество $Y$.

Поскольку Центру доступны $l$ бит информации, эта информация может быть закодирована словами $s=(s_1,\ldots,s_l)$, где каждый символ $s_i$, $i=1,\ldots,l$ принадлежит множеству $\{0,1\}$. Таким образом, все сообщения о значении неопределенного фактора, которые Центр может получить, принадлежат множеству $S=\{0,1\}^l$ (декартовой степени множества $\{0,1\}$).

Выше сделано предположение о том, что содержание информации, закодированной словом $s$, (семантику сообщения $s$) выбирает Центр. Это значит, что для каждого сообщения $s$ Центр может указать некоторое множество $\Pi(s)\subset A$ так, что, получив сообщение $s$, Центр может быть уверен, что реализовавшееся значение $\alpha$ принадлежит множеству $\Pi(s)$. Удобнее пользоваться другим, эквивалентным способом формализации. Будем считать, что для каждого значения $\alpha\in A$ центр вправе выбрать сообщение $P(\alpha)\in S$, которое соответствует реализации значения параметра $\alpha$. Таким образом, Центр фактически выбирает функцию $P\in\Phi(A,S)$.

Кроме того, для каждого сообщения $s\in S$ Центр вправе выбрать свое управление $w\in W$, т.е., по сути, Центр выбирает функцию $w_*\in\Phi(S,W)$.

Подводя итоги, скажем, что стратегиями Центра являются пары $(w_*,P)$ из множества $\Phi\left(S,W\right)\times\Phi\left(A,S\right)$. Если Центр выберет такую стратегию $(w_*,P)$ и реализуется значение неопределенного фактора $\alpha$, то выигрыш Центра составит $g(w_*(P(\alpha)),\alpha)$.

Если значение неопределенного фактора $\alpha$ Центру заранее не известно, то выбор стратегии $(w_*,P)$ гарантирует ему получение выигрыша, равного

$$\inf_{\alpha\in A} g(w_*(P(\alpha)),\alpha),$$

а его максимальный гарантированный результат составит

$$R_0=\sup_{(w_*,P)\in\Phi(S,W)\times\Phi(A,S)}\inf_{\alpha\in A} g(w_*(P(\alpha)),\alpha).$$

В предыдущей формуле присутствуют сразу два функциональных пространства. Это делает формулу неэффективной. Но это же обстоятельство позволяет ее упростить.

Запишем последнюю формулу в виде

$$R_0=\sup_{w_*\in\Phi(S,W)}\sup_{P\in\Phi(A,S)}\inf_{\alpha\in A} g(w_*(P(\alpha)),\alpha).$$

Теперь можно поменять местами супремум и инфимум:

$$R_0 = \sup_{w_* \in \Phi(S,W)} \inf_{\alpha \in A} \sup_{s \in S} g(w_*(s), \alpha).$$

Обозначим: $m = 2^l$. Слово $s = (s_1, \ldots, s_l) \in S$ можно естественным образом отождествить с натуральным числом из множества $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, которое имеет двоичную запись $s_1, \ldots, s_l$. В дальнейшем такое отождествление будем делать без особых оговорок.

Обозначим: $w_s = w_*(s)$. Тогда максимальный гарантированный результат Центра может быть записан в виде

$$R_0 = \sup_{(w_0, w_1 \ldots, w_{m-1}) \in W^m} \inf_{\alpha \in A} \sup_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha).$$

Теперь стандартные теоремы анализа позволяют убедиться, что верхние и нижние грани в предыдущей формуле достигаются.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 1. *Максимальный гарантированный результат Центра равен*

$$R_0 = \max_{(w_0, w_1 \ldots, w_{m-1}) \in W^m} \min_{\alpha \in A} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha).$$

Оптимальная стратегия Центра в данной задаче существует. Построить ее можно следующим образом.

Фиксируем любой набор $(w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}) \in W^m$, доставляющий максимум выражению

$$\min_{\alpha \in A} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha),$$

и положим $w_*(s) = w_s,\ s = 0, 1, \ldots, m-1$. Для каждого $\alpha \in A$ выберем любое значение $s$, доставляющее максимум функции $g(w_s, \alpha)$, и положим $P(\alpha) = s$. Тем самым будет определена функция $P \in \Phi(A, S)$. Стратегия $(w_*, P)$ – искомая.

*З а м е ч а н и е.* Полученный результат показывает, что сложность решаемой задачи очень быстро растет с ростом объема информации $l$. Понятно, что это объективная трудность, и дальнейшего упрощения формула из теоремы 1 в общем случае не допускает. В самом деле, "большое" количество управлений $w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}$ так или иначе найти нужно, и от этого никуда не денешься. Возникает соблазн искать эти управления как-нибудь "последовательно", но и это, вообще говоря, не получается. Из содержательных соображений это достаточно ясно. Аналогичный формальный пример приведен в [28]. Идеи, использованные при его построении, могут быть применены и в данном, более простом случае.

## 4. Некоторые технические детали

Центральным моментом в доказательстве теоремы 1 явилось использование следующего известного факта: если $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, то

$$\sup_{\varphi \in \Phi(Y,X)} \inf_{y \in Y} f(\varphi(y), y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$$

(см., например, [29], с. 36).

Этот факт стал, наверное, первым инструментом в теории игр. В каком-то виде он есть уже в книге [30]. В [31] он играет центральную роль. Он же составляет, по существу, основу метода динамического программирования.

В терминах рассмотренной выше модели он может быть проинтерпретирован следующим образом. Если Центр не имеет никакой информации о неопределенном факторе, то его максимальный гарантированный результат равен

$$\max_{w\in W}\min_{\alpha\in A} g(w,\alpha).$$

Если же Центр получает точную информацию о значении неопределенного фактора, то его максимальный гарантированный результат становится равным

$$\sup_{\varphi\in\Phi(A,W)}\inf_{\alpha\in A} g(\varphi(\alpha),\alpha)=\min_{\alpha\in A}\max_{w\in W} g(w,\alpha).$$

В данной статье рассматриваемый факт тоже будет активно использоваться, но в несколько иной форме.

Пусть функция $f$ определена на множестве $X$ и принимает действительные значения. Тогда утверждение $\forall x\ f(x)\leqslant 0$ равносильно неравенству $\sup_{x\in X} f(x)\leqslant 0$. Аналогично, утверждение $\exists x\ f(x)\leqslant 0$ эквивалентно условию $\inf_{x\in X} f(x)\leqslant 0$.

Со строгими неравенствами дело обстоит чуть сложнее. Утверждение $\forall x\ f(x)<0$ превращается в такое условие: $\sup_{x\in X} f(x)\leqslant 0$, если верхняя грань не достигается, и $\sup_{x\in X} f(x)<0$ в противном случае.

В задачах, связанных с иерархическими играми, строгие неравенства естественным образом появляются. И, если приходится использовать несколько операторов супремума, подобного рода оговорки "накапливаются". По этой причине удобнее использовать кванторы, а не операторы супремума и инфимума, а к более привычным терминам переходить уже в самом конце преобразований.

В терминах кванторов обсуждаемый в данном разделе факт принимает такую форму: если $f: X\times Y\to\mathbb{R}$, то утверждение $\forall\varphi\in\Phi\,(Y,X)\,\exists y\in Y$: $f(\varphi(y),y)\leqslant 0$ равносильно утверждению $\exists y\in Y\forall x\in X\ f(x,y)\leqslant 0$.

Такого рода преобразования будут активно использоваться в дальнейшем.

## 5. Модель децентрализованного управления

Рассмотрим иную схему управления той же системой.

Предположим, что Центр передоверяет выбор управления $v^i\in V^i$ некоторому агенту, которого в дальнейшем будем называть агентом $i$ ($i=1,\ldots,n$). Согласно одному из предположений информационной теории иерархических систем [10] у такого агента при этом появятся собственные интересы. Примем еще одну гипотезу, отражающую технологическую структурированность управляемой системы. Будем считать, что интересы агента $i$ описываются стремлением к максимизации функции $h^i(u,v^i,\alpha)$ (т.е. не зависят от выборов других агентов).

Право выбора управления $u \in U$ Центр оставляет за собой. При этом, как и в предыдущей модели, до окончательного выбора своего управления он может рассчитывать на получение $l$ бит информации о неопределенном факторе и содержание этой информации вправе выбирать он сам.

Таким образом, стратегиями Центра будут пары $(u_*, P)$ функций $u_* \in \Phi(S, U)$ и $P \in \Phi(A, S)$. При этом выигрыши Центра и агентов будут определяться выражениями $g(u_*(P(\alpha)), v^1, v^2, \ldots, v^n, \alpha)$ и $h^i(u_*(P(\alpha)), v^i, \alpha)$, $(i = 1, \ldots, n)$ соответственно.

Будем считать, что Центр обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает и сообщает агентам свою стратегию $(u_*, P) \in \Phi(S, U) \times \Phi(A, S)$.

В таком случае агенту $i$ в момент принятия решения известно значение неопределенного фактора $\alpha$ и стратегия $(u_*, P)$, а значит, и значение $u_*\left(P\left(\alpha\right)\right)$, т.е. "физическое" управление, которое должен будет выбрать Центр. Таким образом, для этого агента задача принятия решений превращается в задачу оптимизации. Считая его рациональным, можно предположить, что он выберет свое управление из множества

$$BR^i\left(u_*, P, \alpha\right) = \left\{ v^i \in V^i: \; h^i\left(u_*(P(\alpha)), v^i, \alpha\right) = \max_{v^i \in V^i} h^i\left(u_*(P(\alpha)), v^i, \alpha\right) \right\}.$$

Тогда один из основных принципов теории исследования операций предписывает Центру ориентироваться на максимальный гарантированный результат, определяемый следующим образом.

*Определение 1. Максимальным гарантированным результатом Центра в рассматриваемой модели называется число*

$$R_1 = \sup_{(u_*, P) \in \Phi(S,U) \times \Phi(A,S)} \min_{\alpha \in A} \min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \ldots$$
$$\ldots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^1, \ldots, v^n, \alpha).$$

*Замечание.* При сделанных выше топологических предположениях максимум в определении множества $BR^i\left(u_*, P, \alpha\right)$ достигается, а само это множество компактно. Соответственно, достигаются и минимумы в определении максимального гарантированного результата. Доказательства этих фактов стандартны, а потому опускаются.

Можно подойти к формализации тех же предположений с другой стороны. Поскольку до выбора управления агента $i$ стратегия Центра уже известна, для него все управления разбиваются на два класса: выгодные и невыгодные. Вполне естественно предположить, что это разделение происходит по пороговому принципу: существует такое значение $\lambda^i$, что управления, выбор которых гарантирует получение выигрыша, большего или равного $\lambda^i$, являются выгодными, а все прочие – невыгодными. Считая агентов рациональными, Центр может рассчитывать на то, что каждый из них выберет какое-то выгодное управление, а в остальном должен быть осторожным. Таким образом, приходим к следующему определению.

*О п р е д е л е н и е 2. Число $\gamma$ называется гарантированным результатом Центра в рассматриваемой модели, если существует стратегия $(u_*, P)$ и для любого $\alpha \in A$ существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ такие, что выполняются условия:*

*1°. для любого $i$ существует управление $v_0^i \in V^i$, для которого выполняется неравенство $h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i$;*

*2°. для любых $\left(v^1, \ldots, v^n\right) \in V^1 \times \ldots \times V^n$ либо $g(u_*(P(\alpha)), v^1, \ldots, v^n, \alpha) \geqslant \gamma$, либо существует $i = 1, \ldots, n$, для которого $h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^i, \alpha\right) < \lambda^i$. Точная верхняя грань множества гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом Центра.*

Временно обозначим максимальный гарантированный результат Центра в смысле определения 2 через ${R_1}'$.

Использование двух определений для одного понятия оправдывается следующим результатом.

*Л е м м а 1. Имеет место равенство ${R_1}' = R_1$.*

Доказательство леммы приводится в Приложении.

Определение 2 весьма удобно для работы. Перепишем его на языке исчисления предикатов. Число $\gamma$ является гарантированным результатом, если выполняется условие

$$\exists\left(u_*, P\right) \in \Phi\left(S, U\right) \times \Phi\left(A, S\right) \forall \alpha \in A \exists\left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right):$$

$$\left[\forall i\ \exists v_0^i \in V^i:\ h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i\right] \&$$

$$\& \left[\forall\left(v^1, \ldots, v^n\right) \in V^1 \times \ldots \times V^n\right.$$

$$\left.\left(g\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \geqslant \gamma \vee \exists i : h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^i, \alpha\right) < \lambda^i\right)\right].$$

Данное условие можно переписать в виде

$$\exists u_* \in \Phi\left(S, U\right) \exists P \in \Phi\left(A, S\right) \forall \alpha \in A \exists\left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right):$$

$$\left[\forall i\ \exists v_0^i \in V^i:\ h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i\right] \&$$

$$\& \left[\forall\left(v^1, \ldots, v^n\right) \in V^1 \times V^2 \times \ldots \times V^n\right.$$

$$\left.\left(g\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \geqslant \gamma \vee \exists i : h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^i, \alpha\right) < \lambda^i\right)\right].$$

Теперь можно поменять местами кванторы общности и существования, как это описано в разделе 4:

$$\exists u_* \in \Phi\left(S, U\right) \forall \alpha \in A \exists s \in S \exists\left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right):$$

$$\left[\forall i\ \exists v_0^i \in V^i:\ h^i\left(u_*\left(s\right), v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i\right] \&$$

$$\& \left[\forall\left(v^1, \ldots, v^n\right) \in V^1 \times \ldots \times V^n\right.$$

$$\left.\left(g\left(u_*\left(s\right), v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \geqslant \gamma \vee \exists i : h^i\left(u_*\left(s\right), v^i, \alpha\right) < \lambda^i\right)\right].$$

Чтобы избавится от функции $u_*$, поступим так же, как в разделе 3. Положим $u_*(s) = u_s$. Тогда предыдущее условие можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\exists\left(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\right) \in U^m \forall \alpha \in A \exists j=0,1, \ldots, m-1 \; \exists\left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right): \\ \left[\forall i \exists v_0^i \in V^i: \; h^i\left(u_j, v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i\right] \& \left[\forall\left(v^1, v^2, \ldots, v^n\right) \in V^1 \times \ldots \times V^n\right. \\ \left.\left(g\left(u_j, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \geqslant \gamma \vee \exists i: h^i\left(u_j, v^i, \alpha\right)<\lambda^i\right)\right] .\end{gathered} \tag{1}$$

Таким образом, получен следующий результат.

*Теорема 2. Максимальный гарантированный результат Центра в рассматриваемой модели равен точной верхней грани чисел $\gamma$, удовлетворяющих условию* (1).

Запишем полученный результат в более привычной форме, с операторами максимумов и минимумов вместо кванторов. Прямому применению идей, изложенных в разделе 4, мешает операция дизъюнкции в формуле (1). Эта трудность обходится следующим стандартным приемом.

Введем обозначение

$$\Lambda(u, \alpha, \gamma)=\left\{\left(v^1, \ldots, v^n\right) \in V^1 \times \ldots \times V^n: \; g(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha)<\gamma\right\} .$$

Тогда условие (1) равносильно следующему:

$$\begin{gathered}\exists\left(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\right) \in U^m \forall \alpha \in A \exists j=0,1, \ldots, m-1 \; \exists\left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right): \\ \left[\forall i \; \exists v_0^i \in V^i: \; h^i\left(u_j, v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i\right] \& \\ \& \left[\forall\left(v^1, \ldots, v^n\right) \in \Lambda\left(u_j, \alpha, \gamma\right) \exists i: h^i\left(u_j, v^i, \alpha\right)<\lambda^i\right] .\end{gathered}$$

Теперь, заменяя кванторы операторами максимумов и минимумов, получим следующее утверждение.

*Теорема 3. Число $\gamma$ является гарантированным результатом Центра в рассматриваемой модели тогда и только тогда, когда либо*

$$\max_{(u_1,\ldots,u_m)\in U^m} \min_{\alpha\in A} \max_{\lambda^1,\ldots,\lambda^n} \max_{j=1,\ldots,m} \min\left\{\left[\min_{i=1,\ldots,n} \max_{v_0^i\in V^i}(h^i(u_j, v_i^0, \alpha)-\lambda^i)\right],\right.$$
$$\left.\left[\inf_{(v^1,\ldots,v^n)\in\Lambda(u_j,\alpha,\gamma)} \max_{i=1,\ldots,n}(\lambda^i - h(u_j, v^i, \alpha)\right]\right\} > 0,$$

*либо*

$$\max_{(u_1,\ldots,u_m)\in U^m} \min_{\alpha\in A} \max_{\lambda^1,\ldots,\lambda^n} \max_{j=1,\ldots,m} \min\left\{\left[\min_{i=1,\ldots,n} \max_{v_0^i\in V^i}(h^i(u_j, v_i^0, \alpha)-\lambda^i)\right],\right.$$
$$\left.\left[\inf_{(v^1,\ldots,v^n)\in\Lambda(u_j,\alpha,\gamma)} \max_{i=1,\ldots,n}(\lambda^i - h(u_j, v^i, \alpha)\right]\right\} = 0,$$

*и инфимум в этой формуле не достигается.*

Тот же результат можно переписать в несколько иной форме. Условие (1) записывается в чуть более сложной, но эквивалентной форме

$$\exists\left(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1}\right)\in U^m\forall\alpha\in A\exists j=0,1,\ldots,m-1\;\exists\left(\lambda^1,\ldots,\lambda^n\right):$$
$$\left[\exists\left(v_0^1,\ldots,v_0^n\right)\in V^1\times\ldots\times V^n\forall i:\right.$$
$$\left.\left(h^i\left(u_j,v_0^i,\alpha\right)\geqslant\lambda^i\&g\left(u_j,v_0^1,\ldots,v_0^n,\alpha\right)\geqslant\gamma\right)\right]\& \tag{2}$$
$$\&\left[\forall\left(v^1,\ldots,v^n\right)\in V^1\times\ldots\times V^n\right.$$
$$\left.\left(g\left(u_j,v^1,\ldots,v^n,\alpha\right)\geqslant\gamma\vee\exists i:h^i\left(u_j,v^i,\alpha\right)<\lambda^i\right)\right].$$

Введем обозначения

$$\overline{\Lambda}\left(u,\alpha,\gamma\right)=\left\{\left(v^1,\ldots,v^n\right)\in V^1\times\ldots\times V^n:\,g(u,v^1,\ldots,v^n,\alpha)\geqslant\gamma\right\},$$
$$\lambda_*^i(u,\alpha,\gamma)=\max_{v^i\in\overline{\Lambda}(u,\alpha,\gamma)}h^i(u,v^i,\alpha).$$

Чтобы первая часть условия (2) выполнялась, необходимо и достаточно, чтобы были справедливы неравенства $\lambda^i\leqslant\lambda_*^i(u,\alpha,\gamma)$. А вторую часть условия (2) выполнить тем проще, чем больше значения $\lambda^i$. Поэтому условие (2) равносильно следующему:

$$\exists\left(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1}\right)\in U^m\forall\alpha\in A\exists j=0,1,\ldots,m-1:$$
$$\left[\forall\left(v^1,\ldots,v^n\right)\in V^1\times\ldots\times V^n\right.$$
$$\left.\left(g\left(u_j,v^1,\ldots,v^n,\alpha\right)\geqslant\gamma\vee\exists i:h^i\left(u_j,v^i,\alpha\right)<\lambda_*^i(u_j,\alpha,\gamma)\right)\right].$$

Далее, действуя, как и в предыдущем случае, получим следующее утверждение.

*Теорема 4. Число $\gamma$ является гарантированным результатом Центра в рассматриваемой модели тогда и только тогда, когда либо*

$$\max_{(u_1,\ldots,u_m)\in U^m}\min_{\alpha\in A}\max_{j=1,\ldots,m}\left[\inf_{(v^1,\ldots,v^n)\in\Lambda(u_j,\alpha,\gamma)}\max_{i=1,\ldots,n}\left(\lambda_*^i(u_j,\alpha,\gamma)-h(u_j,v^i,\alpha)\right)\right]>0,$$

*либо*

$$\max_{(u_1,\ldots,u_m)\in U^m}\min_{\alpha\in A}\max_{j=1,\ldots,m}\left[\inf_{(v^1,\ldots,v^n)\in\Lambda(u_j,\alpha,\gamma)}\max_{i=1,\ldots,n}\left(\lambda_*^i(u_j,\alpha,\gamma)-h(u_j,v^i,\alpha)\right)\right]=0,$$

*и инфимум в этой формуле не достигается.*

*Замечание.* Трудно сказать, какая из двух последних теорем удобнее при практических вычислениях. Но в любом случае иметь две формы одного результата не лишне.

Исходя из полученных результатов нетрудно построить и стратегию Центра, позволяющую наверняка получить выигрыш $\gamma$, если $\gamma$ – гарантированный результат.

Фиксируем набор $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in U^m$, существование которого гарантировано условием (1). Положим $u_*(s) = u_s$, $s = 0, 1, \ldots, m-1$. Пусть задано произвольное $\alpha \in A$. Тогда в силу условия (1) и выбора управлений $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ найдутся значения $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$, для которых

$$\begin{gathered}\exists j = 0, 1, \ldots, m-1 : \left[\forall i \exists v_0^i \in V^i :\ h^i\left(u_j, v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i\right] \& \\ \& \left[\forall \left(v^1, \ldots, v^n\right) \in V^1 \times \ldots \times V^n \right. \\ \left.\left(g\left(u_j, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \geqslant \gamma \vee \exists i : h^i\left(u_j, v^i, \alpha\right) < \lambda^i\right)\right].\end{gathered} \tag{3}$$

Фиксируем произвольное $j$, существование которого предусмотрено этим условием, и положим $P(\alpha) = j$. Функция $P$, а с ней и стратегия $(u_*, P)$ будут определены.

Пусть такая стратегия выбрана Центром и реализовалось некоторое значение $\alpha \in A$. Тогда каждый из агентов выберет такое управление $v_0^i$, что для соответствующего данному $\alpha$ значению $\lambda^i$ будет выполнено неравенство $h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v_0^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i$. Но тогда в силу последней строки условия (3) будет справедливо неравенство $g(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v_0^1, \ldots, v_0^n, \alpha) \geqslant \gamma$. Таким образом, независимо от значения $\alpha$ Центр получит выигрыш, не меньший $\gamma$, т. е. стратегия $(u_*, P)$ – искомая.

## 6. Явное выражение для максимального гарантированного результата

Обратимся к задаче вычисления максимального гарантированного результата. Соответствующие формулы можно было бы вывести из полученных выше результатов аналогично тому, как это было сделано в [28], но проще воспользоваться определением 1, используя найденное решение в качестве подсказки.

При любом выборе стратегии $(u_*, P)$ множество значений функции $u_*\left(P\left(\alpha\right)\right)$ состоит из $m$ точек (некоторые из которых могут совпадать). Фиксируем набор $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in U^m$. Если Центр выберет управление $u_s$ и реализуется значение неопределенного фактора $\alpha$, то агент $i$ может выбрать любое управление из множества

$$E^i(u_s, \alpha) = \left\{v^i \in V^i :\ h^i(u_s, v^i, \alpha) = \max_{\omega^i \in V^i} h^i(u_s, \omega^i, \alpha)\right\},$$

поэтому Центр вправе рассчитывать на получение результата

$$\min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \min_{v^2 \in E^2(u_s,\alpha)} \ldots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \ldots, v^n, \alpha).$$

Разумеется, управление $u_s$ стоит выбирать так, чтобы максимизировать эту величину, и при наихудшем значении $\alpha$ центр вправе рассчитывать на результат

$$\min_{\alpha \in A} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \min_{v^2 \in E^2(u_s,\alpha)} \ldots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \ldots, v^n, \alpha).$$

Выбор набора $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in U^m$ – это тоже прерогатива Центра. Таким образом, получаем следующий результат.

Т е о р е м а 5. *Максимальный гарантированный результат Центра в рассматриваемой модели равен*

$$R_1 = \sup_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1})\in U^m} \min_{\alpha\in A} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} \min_{v^1\in E^1(u_s,\alpha)} \ldots \min_{v^n\in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \ldots, v^n, \alpha).$$

Общая схема доказательства теоремы приведена выше. Несложные технические детали опустим.

## 7. Сравнение двух способов управления

Естественным образом возникает вопрос о сравнении эффективности двух способов управления. Поскольку исследование проводится в интересах Центра, мерой эффективности можно считать его максимальный гарантированный результат. Разумно проводить сравнение при одном и том же значении объема доступной Центру информации $l$.

Конечно, ответ существенным образом зависит от того, насколько хорошо интересы агентов согласованы с интересами Центра.

Начнем рассмотрение со случая, когда интересы Центра и агентов “совпадают”, а именно $g(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} h^i(u, v^i, \alpha)$. В этом случае максимальный гарантированный результат Центра при децентрализованном способе управления равен

$$R_1 = \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1})\in U^m} \min_{\alpha\in A} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} \max_{(v^1,\ldots,v^n)\in V^1\times\ldots\times V^n} g(u_s, v^1, \ldots, v^n, \alpha).$$

Поэтому $R_1 \geqslant R_0$, причем в нетривиальных случаях неравенство строгое.

Теперь обратимся к случаю, когда интересы агентов и Центра “противоположны”, т.е. $g(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha) = -\sum\limits_{i=1}^{n} h^i(u, v^i, \alpha)$ . В этом случае

$$R_1 = \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1})\in U^m} \min_{\alpha\in A} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} \min_{(v^1,\ldots,v^n)\in V^1\times\ldots\times V^n} g(u_s, v^1, \ldots, v^n, \alpha).$$

Следовательно, $R_1 \leqslant R_0$ и опять в типичном случае неравенство будет строгим.

Эти оценки не зависят от значения $l$. В промежуточных случаях такая зависимость появляется. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем обозначать максимальные гарантированные результаты Центра при централизованном и децентрализованном способах управления через $R_0(l)$ и $R_1(l)$ соответственно.

Сразу же можно отметить, что при увеличении $l$ множество стратегий Центра (в обеих моделях) расширяется. Поэтому обе величины $R_0(l)$ и $R_1(l)$ с ростом $l$ не убывают.

Сравнение этих величин удобно начать с рассмотрения “предельного” случая, когда Центр в момент выбора своего управления точно знает значение неопределенного фактора. В этом случае его максимальный гарантированный результат при централизованном способе управления равен

$$R_0\,(\infty) = \min_{\alpha\in A}\max_{u\in U}\max_{v^1\in V^1}\max_{v^2\in V^2}\ldots\max_{v^n\in V^n} g(u, v^1, \ldots, v^n),$$

а при децентрализованном составит

$$R_1\,(\infty) = \min_{\alpha\in A}\max_{u\in U}\min_{v^1\in E^1(u,\alpha)}\min_{v^2\in E^2(u,\alpha)}\ldots\min_{v^n\in E^n(u,\alpha)} g(u, v^1, \ldots, v^n).$$

Следовательно, $R_0\,(\infty) \geqslant R_1\,(\infty)$, и опять-таки в общем случае неравенство строгое.

Разумеется, при любом $l$ имеют место неравенства $R_0\,(l) \leqslant R_0\,(\infty)$ и $R_1\,(l) \leqslant R_1\,(\infty)$.

Использование термина “предельный” оправдано следующим результатом.

*Лемма 2. Имеет место равенство* $\lim\limits_{l\to\infty} R_0(l) = R_0\,(\infty)$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Таким образом, если выполняется неравенство $R_0\,(\infty) > R_1\,(\infty)$, то при достаточно больших $l$ будет справедливо неравенство $R_0\,(l) > R_1\,(l)$.

Подведем итоги. В нетривиальных случаях картина такова. Если интересы агентов “плохо согласованы” с интересами Центра, то всегда выгоднее централизованное управление. Если же интересы Центра и агентов “хорошо согласованы”, то при больших значениях $l$ выгоднее централизация управления, а при малых значениях $l$ предпочтительнее децентрализованное управление.

Точный результат можно сформулировать так.

*Теорема 6. Все управляемые системы можно разбить на два класса. Для игр одного класса для всех от $l$ справедливо неравенство $R_0(l) \geqslant R_1(l)$. Для игр второго класса существует такое натуральное $L$, что для всех $l \geqslant L$ имеет место неравенство $R_1(l) > R_0(l)$. Оба класса не пусты.*

## 8. Заключение

Сформулирована задача о возможной децентрализации управления системой при наличии неопределенности и приводится ее решение на примере простой модели. Выводы последнего раздела дают начальные основания для дальнейшего исследования в области централизации – децентрализации в предложенной постановке.

Естественно рассмотреть постановки, когда подсистемы, подобно Центру, недостаточно информированы о неконтролируемых факторах; здесь предполагалась их полная информированность. Постановка задачи и ее формальный анализ в таком случае сильно усложнится. Весьма важный вопрос о согласованности интересов Центра и подсистем. На первый взгляд, достаточно хорошо отражает факт согласованности наличие малой величины меры разности между функцией цели Центра и линейной свертки с весами системы критериев подсистем. Однако такой подход должен содержать также гипотезы и механизмы коалиционного решения подсистем, что представляет собой совсем нетривиальный вопрос.

Возможно, удастся продвинуться в дальнейших исследованиях в случае линейных зависимостей. Линейные задачи удобно рассматривать в стандартных постановках моделей линейных производственных процессов (Канторович – Купманс) при разных формах задания неопределенных факторов, опираясь на развитый аппарат множителей и функций Лагранжа и теоремы типа Куна – Таккера. К настоящему времени установлены различные варианты эффективности процедур децентрализации в линейных случаях и построены соответствующие примеры.

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

*Доказательство леммы 1.* Докажем сначала неравенство ${R_1}' \geqslant R_1$. Фиксируем произвольное $\gamma < R_1$. Тогда существует стратегия Центра $(u_*, P)$, для которой

$$\min_{\alpha\in A}\min_{v^1\in BR^1(u_*,P,\alpha)}\min_{v^2\in BR^2(u_*,P,\alpha)}\ldots\min_{v^n\in BR^n(u_*,P,\alpha)} g(u,v^1,\ldots,v^n,\alpha)\geqslant\gamma$$

и для любого $\alpha\in A$ выполняется условие

$$\min_{v^1\in BR^1(u_*,P,\alpha)}\min_{v^2\in BR^2(u_*,P,\alpha)}\ldots\min_{v^n\in BR^n(u_*,P,\alpha)} g(u,v^1,\ldots,v^n,\alpha)\geqslant\gamma.$$

Положим $\lambda^i=\max\limits_{v^i\in V^i} h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v^i,\alpha\right),\ i=1,\ldots,n$. Тогда для любого $v_0^i$ из множества $BR^i\left(u_*,P,\alpha\right)$ выполняется условие $h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v_0^i,\alpha\right)\geqslant\lambda^i$ (для всех $i=1,\ldots,n$), следовательно, пункт $1^\circ$ определения 2 выполнен. Более того, если $h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v^i,\alpha\right)\geqslant\lambda^i$, то $v^i\in BR^i\left(u_*,P,\alpha\right)$. Поэтому если неравенства $h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v^i,\alpha\right)\geqslant\lambda^i$ выполняются при всех $i=1,\ldots,n$, то справедливо неравенство $g(u_*(P(\alpha)),v^1,\ldots,v^n,\alpha)\geqslant\gamma$. Значит, выполняется и пункт $2^\circ$ этого определения.

Таким образом, $\gamma$ – гарантированный результат в смысле определения 2 и потому ${R_1}'\geqslant\gamma$. В силу произвольности $\gamma$ справедливо нужное неравенство ${R_1}'\geqslant R_1$.

Докажем обратное неравенство $R_1\geqslant {R_1}'$. Пусть $\gamma$ – гарантированный результат в смысле определения 2. Тогда существует такая стратегия $(u_*, P)$, что

$$\begin{gathered}\forall\alpha\in A\exists\left(\lambda^1,\ldots,\lambda^n\right):\left[\forall i\ \exists v_0^i\in V^i:\ h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v_0^i,\alpha\right)\geqslant\lambda^i\right]\&\\ \&\left[\forall\left(v^1,\ldots,v^n\right)\in V^1\times\ldots\times V^n\right.\\ \left.\left(g\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v^1,\ldots,v^n,\alpha\right)\geqslant\gamma\vee\exists i:h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v^i,\alpha\right)<\lambda^i\right)\right].\end{gathered}$$

Фиксируем любую такую стратегию и произвольное $\alpha\in A$. Для некоторых $\lambda^1,\ldots,\lambda^n$ будет выполнено условие

$$\begin{gathered}\left[\forall i\ \exists v_0^i\in V^i:\ h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v_0^i,\alpha\right)\geqslant\lambda^i\right]\&\\ \&\left[\forall\left(v^1,\ldots,v^n\right)\in V^1\times\ldots\times V^n\right.\\ \left.\left(g\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v^1,\ldots,v^n,\alpha\right)\geqslant\gamma\vee\exists i:h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right),v^i,\alpha\right)<\lambda^i\right)\right].\end{gathered}\tag{П.1}$$

Если $h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^i_0, \alpha\right) \geqslant \lambda^i$, то тем более $\max\limits_{v^i \in V^i} h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i$. Поэтому для любого $v^i \in BR^i\left(u_*, P, \alpha\right)$ выполнено неравенство

$$h^i\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^i, \alpha\right) \geqslant \lambda^i.$$

Следовательно, в силу условия (П.1), если $v^1 \in BR^1\left(u_*, P, \alpha\right), \ldots, v^n \in \in BR^n\left(u_*, P, \alpha\right)$, то $g\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \geqslant \gamma$. Значит,

$$\min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \min_{v^2 \in BR^2(u_*, P, \alpha)} \ldots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha) \geqslant \gamma,$$

и в силу произвольности $\alpha$

$$\min_{\alpha \in A} \min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \min_{v^2 \in BR^2(u_*, P, \alpha)} \ldots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha) \geqslant \gamma.$$

Тем более

$$R_1 = \sup_{(u_*, P) \in \Phi(S, U) \times \Phi(A, S)} \min_{\alpha \in A} \min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \ldots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha) \geqslant \gamma.$$

А поскольку $\gamma$ – произвольный гарантированный результат, выполняется неравенство $R_1 \geqslant {R_1}'$.

Лемма доказана.

*Доказательство леммы 2.* Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Для любого $\alpha \in A$ найдется $w \in W$, для которого

$$g(w, \alpha) > \min_{\alpha \in A} \max_{w \in W} g(w, \alpha) - \varepsilon = R_0\left(\infty\right) - \varepsilon.$$

Поэтому открытые множества $O\left(w\right) = \{\alpha \in A : g(w, \alpha) > R_0\left(\infty\right) - \varepsilon\}$ покрывают множество $A$. Но множество $A$ компактно, следовательно, можно выбрать конечное число элементов $w_0, w_1, \ldots, w_p$ множества $W$ так, что множества $O\left(w_0\right), O\left(w_1\right), \ldots, O\left(w_p\right)$ будут по-прежнему покрывать $A$.

Но тогда

$$\min_{\alpha \in A} \max_{s=0,1,\ldots,p-1} g(w_s, \alpha) > R_0\left(\infty\right) - \varepsilon$$

и тем более

$$\max_{(w_0, w_1, \ldots, w_{p-1}) \in W^p} \min_{\alpha \in A} \max_{s=0,1,\ldots,p-1} g(w_s, \alpha) > R_0\left(\infty\right) - \varepsilon.$$

А если $l$ таково, что $m = 2^l \geqslant p$, то

$$R_0(l) = \max_{(w_0, w_1 \ldots, w_{m-1}) \in W^m} \min_{\alpha \in A} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha) \geqslant$$

$$\geqslant \max_{(w_0, w_1 \ldots, w_{p-1}) \in W^p} \min_{\alpha \in A} \max_{s=0,1,\ldots,p-1} g(w_s, \alpha) > R_0\left(\infty\right) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ лемма доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. https://en.wikipedia.org/wiki/Decentralization
2. *Блауг М.* Путеводитель по “Богатству народов” / Экономическая мысль в ретроспективе. М.: Дело, 1994.
3. *Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О.* Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир, 1995.
4. *Клима Р., Ходж Дж.* Математика выборов. М.: МЦНМО, 2007.
5. Итеративные методы в теории игр и программировании / Под ред. Беленького В.З. и Волконского В.А. М.: Наука, 1974.
6. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
7. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И.* Игры с иерархической структурой / Математическая энциклопедия. Т.2. М.: Сов. энциклопедия, 1979. С. 477–481.
8. *Горелик В.А., Кононенко А.Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.
9. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991.
10. *Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем / Пробл. прикл. мат. и механики. М.: Наука, 1971.
11. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
12. *Моисеев Н.Н.* Иерархические структуры и теория игр // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1973. № 6. С. 1–11.
13. *Моисеев Н.Н.* Информационная теория иерархических систем // Тр. I Всесоюзн. конф. по исследованию операций. Минск: 1974. С. 95–99.
14. *Кукушкин Н.С.* Об одной игре с неполной информацией // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 210–216.
15. *Ерешко Ф.И., Кононенко А.Ф.* Решение игры с правом первого хода при неточной информации о цели партнера // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 217–221.
16. *Ватель И.А., Кукушкин Н.С.* Оптимальное поведение игрока, обладающего правом первого хода, при неточном знании интересов партнера // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 303–310.
17. *Кононенко А.Ф.* Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. Т. 13. № 2. С. 311–317.
18. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
19. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005.
20. *Hurwicz L.* On informationally decentralized systems / Decision and organization. Amsterdam: North-Holland Press, 1972. P. 297–336.
21. *Itoh H.* Incentives to help in multi-agent situations // Econometrica. 1991. V. 59. No. 3. P. 611–636.
22. *Myerson R.B.* Optimal coordination mechanisms in generalized principal–agent problems // J. Mat. Econom. 1982. V. 10. No. 1. P. 67–81.
23. *Poitevin M.* Can the Theory of Incentives Explain Decentralization? // Canad. J. Econom. 2000. V. 33. P. 878–906.
24. *Coase R.* The Problem of Social Cost // J. Law Econom. 1960. V. 3. P. 1–44.
25. *Fudenberg D., Tirole J.* Game Theory. Cambridge: M.I.T. Press, 1991.

26. *Melamud N., Mookherjee D., Reichelstein S.* Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts // Rand J. Econom. 1995. V. 26. P. 654–672.

27. *Alonso R., Dessein W., Matouschek N.* When Does Coordination Require Centralization? // Amer. Econom. Rev. 2008. V. 98. P. 145–179.

28. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // АиТ. 2011. № 3. С. 124–144.
*Gorelov M.A.* Maximal Guaranteed Result for Limited Volume of Transmitted Information // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 580–599.

29. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1983.

30. *Bachet de Meziriac.* Problemes plaisants et delectables, qui se font par les nombres. Lyon, 1612.

31. *Цермело Э.* О применении теории множеств к теории шахматной игры / Матричные игры. М.: Наука, 1961. С. 167–172.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.*

Поступила в редакцию 04.12.2017

После доработки 09.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018