Автоматика и телемеханика, № 7, 2019

Обзоры

© 2019 г. **А.С. АНДРЕЕВ, д-р физ.-мат. наук (andreevas@ulsu.ru),**
Н.О. СЕДОВА, д-р физ.-мат. наук (sedovano@ulsu.ru)
(Ульяновский государственный университет)

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА–РАЗУМИХИНА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Представлена история развития и современное состояние теории устойчивости систем с запаздыванием, построенной на основе одного из эффективных обобщений прямого метода Ляпунова – метода, использующего "классические" функции в сочетании с условием Разумихина.

Ключевые слова: уравнения с запаздыванием, устойчивость, прямой метод Ляпунова, условие Разумихина.

DOI: 10.1134/S0005231019070018

1. Введение

Математическое описание различных систем с учетом присущего им последействия, запаздывания различного вида и происхождения в последние десятилетия стало привычным. Если поначалу недостаток теоретической базы приводил к стремлению всевозможными способами избежать явного присутствия запаздывания в математической модели, то в последнее время ситуация изменилась на противоположную и запаздывание теперь, например, намеренно вводится в структуру регулятора для улучшения его характеристик или упрощения реализации.

Непрерывные модели систем с запаздыванием описываются функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ) запаздывающего и нейтрального типов как с обыкновенными, так и с частными производными. В данном обзоре будут рассматриваться уравнения запаздывающего типа с обыкновенными производными.

Для уравнений, записанных в нормальной форме, учет запаздывания в этом случае означает, что искомая функция $x(t)$ зависит от одного скалярного аргумента ("времени") и величина производной $\dot{x}(t)$ определяется значениями $x(s)$ при $t - r(t) \leqslant s \leqslant t$. Здесь $0 \leqslant r(t) \leqslant +\infty$ определяет величину запаздывания. Если существует $r > 0$ такое, что $r(t) \leqslant r$ для всех t, то соответствующее уравнение называют уравнением с конечным (или ограниченным) запаздыванием, если $r(t)$ – неограниченная при $t \to +\infty$ функция, то

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках Государственного задания по НИР (проект 9.5994.2017/БЧ) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-730022).

говорят о неограниченном запаздывании или если в уравнение входят значения $x(s)$ при всех $s \leqslant t$, то запаздывание считается бесконечным.

Отдельные дифференциальные уравнения с запаздыванием были рассмотрены еще в XVIII в. в трудах Эйлера и Бернулли, а систематически были впервые изучены В. Вольтеррой [1, 2] при рассмотрении задач математической биологии и механики. Затем, в начале XX в., такие уравнения возникли в математических моделях, связанных с устойчивостью и управлением различными техническими устройствами (см., например, [3, 4] и библиографию в [5]). Широкие возможности применения таких уравнений в качестве математических моделей разнообразных и важных для приложений процессов стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений с запаздыванием на современном уровне строгости.

Начиная с середины XX в. это развитие происходило очень интенсивно. За несколько десятилетий появились десятки монографий, посвященных уравнениям с запаздыванием, в основном на английском языке. Среди них стоит особо выделить книгу Дж. Хейла, которая была издана в 1977 г. и затем появилась в русском переводе [6]. Эта книга на тот момент была самым разносторонним изложением различных аспектов теории ФДУ, в том числе уравнений с запаздыванием, и стала основой многих дальнейших исследований. Цитируемость [6] не падает и сегодня.

В России история теории уравнений с запаздыванием связана прежде всего с именами А.Д. Мышкиса, Н.Н. Красовского, Н.В. Азбелева, В.Б. Колмановского, В.Р. Носова, Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина. Работы этих авторов не только стали значительным вкладом в теорию, но и привлекли внимание к изучаемой ими тематике, вызвали интерес и вдохновили последующие поколения исследователей. Несмотря на впечатляющие темпы развития теории уравнений с запаздыванием, актуальность этой темы не иссякла; более того, появление новых сфер приложения и новых мощных вычислительных инструментов привело к новой волне интереса к уравнениям с запаздыванием: начало XXI в. часто характеризуют как “delay boom” [7].

Исследования показали, что уравнения с запаздыванием обладают существенными особенностями и к ним неприменимы напрямую результаты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Изучение систем с запаздыванием сопряжено со значительными трудностями, а построение точных решений возможно лишь в исключительных частных случаях. С другой стороны, при должном осмыслении поведение таких уравнений во многом можно характеризовать на основе методов и конструкций, до определенной степени аналогичных существующим в теории ОДУ.

При построении теории уравнений с запаздыванием важнейшее значение имеет тот факт, что получить даже частные точные решения даже очень простых по структуре уравнений (например линейных) удается лишь в исключительных случаях; в этом смысле ситуация еще более сложная, чем с ОДУ. Поэтому первостепенное значение приобретают качественные методы исследования в “тандеме” с современными вычислительными средствами.

Среди качественных свойств эволюционной системы, интересных как теоретику, так и практику, – устойчивость в ее различных определениях. Здесь под устойчивостью будем понимать классическую устойчивость в смысле Ляпунова и обсуждать методы исследования этой устойчивости, основанные на идеях А.М. Ляпунова. Замечательность этих идей, как известно, в том, что развитые на их основе подходы и теоретические построения на практике не требуют нахождения решений исследуемых уравнений, кроме того, они могут быть адаптированы и к другим важным задачам, связанным с исследованием поведения системы.

Проблема распространения прямого метода Ляпунова на задачи устойчивости уравнений с запаздыванием возникла в 50-х гг. XX в. прошлого столетия и с тех пор исследуется достаточно активно. Истоками этих исследований можно считать статьи Н.Н. Красовского [8] и Б.С. Разумихина [9], в которых были сформулированы два подхода к этой задаче.

Первый из подходов основан на идее обобщения метода Ляпунова путем использования знакоопределенных функционалов, заданных на отрезках интегральных линий. Этот подход разрабатывался не только Н.Н. Красовским и его учениками, но и многими другими исследователями, в том числе зарубежными (см., например, [10–24]), и получил широкое распространение. Название "функционалы Ляпунова–Красовского" или просто функционалы Красовского стало общепринятым термином современной теории устойчивости.

Стремление сохранить знакоопределенные функции в качестве меры возмущений привело к другому пути построения теории устойчивости систем с последействием. При этом оказалось, что формальное перенесение формулировок теорем типа Ляпунова на случай уравнений с запаздыванием имеет весьма ограниченное применение на практике, и конструктивные результаты в этом направлении были получены на основе дополнительных ограничений относительно производной функции Ляпунова [8, 9]. Эти дополнительные ограничения (в том числе затем модифицированные) стали называться условием Разумихина, а конечномерные функции, используемые при исследовании устойчивости решений уравнений с запаздыванием, получили название функций Ляпунова–Разумихина (интересно, что название это возникло изначально в англоязычных публикациях, см. [25–40] и др.).

Именно это направление, история его развития и особенности применения и являются предметом настоящего обзора.

Надо сказать, что функционалы Красовского можно рассматривать как естественное обобщение конечномерных функций Ляпунова с точки зрения функциональной трактовки решений уравнений с запаздыванием, для которых фазовое пространство является бесконечномерным. Многие исследователи, обращаясь к устойчивости уравнений с запаздыванием, пишут о методе функционалов как о безальтернативном варианте прямого метода для таких уравнений. "Адаптация" же обычных функций к новому типу уравнений и необходимость дополнительных условий представляются несколько искусственными. Возможно, определенную роль сыграл и тот факт, что первоначальная версия Разумихина теоремы об асимптотической устойчивости потребовала уточнения в общем случае (подробнее см. об этом в подразделе 2.2). Как бы то ни было, поначалу метод не вызвал энтузиазма, особенно в отечественной научной среде. Однако в 1970-х гг. метод начал активно развиваться, преимущественно зарубежными математиками, и был обобщен для других классов уравнений с запаздыванием, а также распространен на анализ других, отличных от классической устойчивости, свойств решений.

Данный обзор посвящен исключительно развитию метода функций с условием Разумихина в применении к исследованию устойчивости по Ляпунову решений уравнений с запаздыванием. Объектом рассмотрения является детерминированная нелинейная система общего вида в нормальной форме с непрерывной по фазовой переменной правой частью, а для простоты изложения предполагается, что на устойчивость исследуется нулевое решение. Другие виды систем обсуждаться не будут (ограничимся лишь некоторыми ссылками). Кроме того, обзор включает только результаты, основанные на использовании "канонической" скалярной функции для общего нелинейного уравнения; методы, сочетающие условие Разумихина с использованием специальной структуры (например, анализ устойчивости по первому приближению), заслуживают отдельного рассмотрения и остаются за пределами данного обзора. Этими ограничениями и отчасти научными интересами авторов определяется выбор излагаемого материала. Тем не менее количество публикаций, заслуживающих упоминания в связи с рассматриваемой (довольно узкой) темой, велико, и список литературы не может претендовать на полноту. В список вошли прежде всего те публикации, результаты которых обсуждаются в статье, а также несколько публикаций обзорного характера с обширной библиографией; в ряде случаев предпочтение было отдано наиболее новым или общедоступным источникам.

Основное содержание обзора состоит из двух частей. В первой части рассматривается уравнение с конечным запаздыванием. В подразделе 2.1 приводятся основные понятия, определения и утверждения, необходимые для дальнейшего изложения и "классические" теоремы метода Ляпунова–Разумихина. В подразделе 2.2 обсуждаются основные направления развития метода. В подразделе 2.3 излагается концепция метода предельных уравнений и демонстрируются возможности применения этого метода в исследовании асимптотической устойчивости, а подраздел 2.4 демонстрирует некоторые подходы к использованию метода функций в установлении неустойчивости. Заключительный подраздел 2.5 посвящен сочетанию метода функций с идеями принципа сравнения.

Содержание второй части составляет менее подробный обзор аналогичных результатов для уравнений с неограниченным и бесконечным запаздыванием, с акцентом на возникающие в этом случае особенности. В подразделе 3.1 обсуждаются понятия и свойства, существенные с точки зрения устойчивости, в частности фундаментальное определение допустимого пространства. Подраздел 3.2 содержит обзор способов обобщения условия Разумихина с учетом неограниченности запаздывания.

Отметим, что в стремлении унифицировать обозначения и терминологию и не перегружать изложение вид некоторых формулировок изменен по сравнению с первоисточниками.

2. Уравнения с конечным запаздыванием

2.1. Основные определения и первоначальные результаты

Пусть $\mathrm{R}^+ = [0, +\infty)$, R^n — действительное линейное пространство n-векторов с нормой $|\cdot|$, $r > 0$ — фиксированная постоянная. Определим пространство $C := C([-r, 0], \mathrm{R}^n)$ функций φ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : -r \leqslant s \leqslant 0\}$ и множества $C_a = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < a\}$ и $\bar{C}_a = \{\varphi \in C : \|\varphi\| \leqslant a\}$ для произвольного числа $a > 0$.

Если $x(t) \in C([\alpha - r, \alpha + \beta), \mathrm{R}^n)$ $(\alpha \in \mathrm{R}^+,\ \beta > 0)$, то элемент $x_t \in C$ для каждого $t \in [\alpha, \alpha + \beta)$ определяется равенством $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \leqslant s \leqslant 0$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad f(t, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $f : \mathrm{R}^+ \times C_H \to \mathrm{R}^n$ для некоторого $H \in (0, +\infty]$.

Предположим, что для каждой начальной точки $(\alpha_0, \varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_H$ существует непродолжаемое решение уравнения (1), определенное для $t \in [\alpha_0 - r, \beta)$ $(\beta > \alpha_0)$ и такое, что $x_{\alpha_0} = \varphi$ (будем обозначать его $x(t; \alpha_0, \varphi)$). Из условия $f(t, 0) \equiv 0$ следует существование нулевого решения $x(t; \alpha_0, 0) \equiv 0$ для любого $\alpha_0 \in \mathrm{R}^+$.

Заметим, что в отличие от ОДУ роль начальной точки играет не конечномерный вектор, а функция (“предыстория”, элемент пространства C). Фазовое пространство уравнения (1) становится при этом функциональным бесконечномерным. Это свойство оказалось краеугольным камнем всей теории уравнений с запаздыванием.

Отразилось это свойство, в том числе на свойствах устойчивости, начиная с определений: по форме определения не отличаются от известных определений для ОДУ, но начальные возмущения оцениваются теперь не в векторном, а в функциональном пространстве. Приведем здесь используемые далее определения для полноты изложения.

О п р е д е л е н и е 1. Нулевое решение уравнения (1) *называется устойчивым, если для любого начального момента $\alpha \in \mathrm{R}^+$ и любого малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$, такое что для всех $\varphi \in C_\delta$ и всех $t \geqslant \alpha$ выполняется неравенство $|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon$. Если число δ не зависит от начального момента α, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$, то нулевое решение уравнения* (1) *равномерно устойчиво.*

О п р е д е л е н и е 2. Нулевое решение уравнения (1) *называется:*

1) *притягивающим, если для любого $\alpha \in \mathrm{R}^+$ существует число $\Delta = \Delta(\alpha) > 0$, для любого малого $\varepsilon > 0$ и каждого $\varphi \in C_\Delta$ найдется значение $T = T(\varepsilon, \alpha, \varphi) > 0$, такое что для всех $t \geqslant \alpha + T$ справедливо неравенство $|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon$;*

2) *эквипритягивающим, если $T = T(\alpha, \varepsilon) > 0$, т.е. число T можно выбрать одним и тем же для всех $\varphi \in C_\Delta$;*

3) *равномерно притягивающим, если существует* $\Delta > 0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется значение* $T = T(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех* $\varphi \in C_\Delta$ *и всех* $t \geqslant \alpha + T$ *выполняется неравенство* $|x(t;\alpha,\varphi)| < \varepsilon$.

Определение 3. *Нулевое решение уравнения* (1) *называется:*

1) *асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее*;

2) *эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчивое и эквипритягивающее*;

3) *равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчивое и равномерно притягивающее.*

Пусть $G_H = \{x \in \mathrm{R}^n : |x| < H\}$. Функцией Ляпунова назовем скалярную функцию $V(t,x) \in C^1(\mathrm{R} \times G_H, \mathrm{R}^+)$, удовлетворяющую равенству $V(t,0) = 0$ для всех $t \in \mathrm{R}^+$, а ее производной в силу уравнения (1) – функционал $V' \in C(\mathrm{R}^+ \times C_H, \mathrm{R})$, определяемый соотношением:

$$V'(t,\varphi) = \frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial x_i} f_i(t,\varphi).$$

Заметим, что условие непрерывной дифференцируемости функции V предполагается здесь для простоты и может быть ослаблено (с корректировкой определения производной в силу уравнения). Более того, многие из приводимых далее утверждений в оригинале обоснованы при несколько иных предположениях относительно правой части уравнения по сравнению с принятыми в данном обзоре. Соответствующие изменения будут обсуждаться лишь в принципиально важных случаях.

Если $x(t;\alpha_0,\varphi_0)$ — некоторое решение (1), определенное для всех $t \geqslant \alpha_0$, то функция $v(t) = V(t, x(t;\alpha_0,\varphi_0))$ представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию и $\frac{dv(t)}{dt} = V'(t, x_t(\alpha_0,\varphi_0))$.

При исследовании устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) традиционно используются знакопостоянные и знакоопределенные функции. Если $V(t,0) = 0$ и $V(t,x) \geqslant 0$ (или $V(t,x) \leqslant 0$) для всех $(t,x) \in \mathrm{R}^+ \times G_H$, то функция V называется знакопостоянной. Знакоопределенные функции удобно определять при помощи следующего класса, широко используемого в современных качественных исследованиях:

$$\mathcal{K} = \Big\{\sigma \in C(\mathrm{R}^+, \mathrm{R}^+),\ \sigma(u) \text{ строго возрастает и } \sigma(0) = 0\Big\}.$$

(такие функции также называют функциями типа Хана [41]). Функция $V(t,x)$ является положительно определенной, если $V(t,0) = 0$ и существует функция $a \in \mathcal{K}$ такая, что $a(|x|) \leqslant V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathrm{R}^+ \times G_{H_0}$ при некотором $H_0 \leqslant H$. Аналогично отрицательно определенная функция определяется соотношениями $V(t,0) = 0$ и $V(t,x) \leqslant -c(|x|)$, $c \in \mathcal{K}$. Условие существования бесконечно малого высшего предела, которое также часто требуется от функции Ляпунова, опять же удобно выражать через функцию из класса $\mathcal{K}$ неравенством $V(t,x) \leqslant b(|x|)$, $b \in \mathcal{K}$.

Первые попытки применения конечномерных функций для исследования устойчивости уравнений с запаздыванием были предприняты Л.Э. Эльсгольцем (см. [42]) и представляли собой непосредственное обобщение классических теорем Ляпунова. Например, достаточные условия устойчивости нулевого решения уравнения (1) выглядели так: существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x) : \mathrm{R}^+ \times G_H \to \mathrm{R}^+$ и функции $a, b \in \mathcal{K}$ такие, что $a(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|x|)$ и $V'(t,\varphi) \leqslant 0$ для всех $t \in \mathrm{R}^+$, $x \in G_H$ и $\varphi \in C_H$. Справедливость этого утверждения сомнения не вызывает: оно легко доказывается повторением доказательства классической теоремы Ляпунова. Однако если в прямом методе Ляпунова для ОДУ условие монотонности функции Ляпунова вполне естественно, то при использовании функций в случае уравнений с запаздыванием это требование оказывается слишком ограничительным и построить соответствующую функцию Ляпунова представляется возможным лишь в исключительных случаях.

Рассмотрим для примера простейший вариант – линейное уравнение с постоянными коэффициентами: $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r)$ при $b \neq 0$. Естественной для его исследования является функция $V(x) = x^2/2$. Производная этой функции равна

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = ax^2(t) + bx(t)x(t-r) = (x(t)\ x(t-r)) \begin{pmatrix} a & \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{b}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-r) \end{pmatrix},$$

т.е. представляет собой квадратичную форму, которая не может быть ни знакоопределенной, ни даже знакопостоянной ни при каких значениях параметров.

Таким образом, чтобы гарантировать знакоопределенность производной, необходимо “компенсировать” слагаемое $x(t-r)$.

Как же это сделать? В рамках решения этой проблемы была предложена модификация, позволившая сделать конструктивными результаты об устойчивости, использующие функции Ляпунова.

Идея этой модификации состоит в следующем. Условие неположительности производной функции Ляпунова необходимо для доказательства того, что все решения, начинающиеся в малой окрестности нуля, не пересекут границу этой окрестности. При этом нет необходимости в том, чтобы функция V все время не возрастала вдоль решения: если окрестность задана неравенством $V(x) \leqslant l$, то достаточно, чтобы производная была неположительной лишь в те моменты, когда $V(x(t)) = l$ (при этом предполагается, что $V(x(t+s)) < l$ при $s < 0$, т.е. t – первый момент выхода на границу окрестности). Таким образом, достаточно проверять знак производной V' в каждый момент времени не на всем множестве C_H, а только на его подмножестве вида $\Omega_t(V) = \{\varphi \in C_H\ :\ V(t+s,\varphi(s)) \leqslant V(t,\varphi(0)),\ -r \leqslant s \leqslant 0\}$.

Эти соображения привели к доказательству следующей теоремы.

Теорема 1 [9]. *Если существует функция $V(t,x)$ такая, что для некоторой функции $a(u) \in \mathcal{K}$ и всех $t \in \mathrm{R}^+$ выполняются условия:*

1) $V(t,x) \geqslant a(|x|)$ *для* $x \in \mathrm{R}^n$,

2) $V'(t,\varphi) \leqslant 0$ *для* $\varphi \in \Omega_t(V)$,

то нулевое решение уравнения (1) *устойчиво. Если, кроме того, существует функция* $b \in \mathcal{K}$ *такая, что* $V(t,x) \leqslant b(|x|)$ *при* $(t,x) \in \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^n$, *то нулевое решение уравнения* (1) *равномерно устойчиво.*

Аналогичный результат об асимптотической устойчивости, с заменой неравенства для производной на $V'(t,\varphi) \leqslant -c(|\varphi(0)|)$, $c \in \mathcal{K}$, был представлен Б.С. Разумихиным в [9].

Однако позднее в [43] был построен пример, демонстрирующий, что в такой формулировке результат в общем случае неверен (но верен при определенных дополнительных условиях, см. далее). В то же время Н.Н. Красовским в [8] была предложена несколько иная формулировка достаточных условий асимптотической устойчивости, которая стала отправной точкой для многих дальнейших исследований и приложений.

Отличие теоремы Н.Н. Красовского от результата Б.С. Разумихина состояло в использовании вместо множества $\Omega_t(V)$ "чуть более широкого" множества

$$\Omega_t(V,\eta) = \Big\{\varphi \in C_H \, : \, V(t+s,\varphi(s)) \leqslant \eta(V(t,\varphi(0))), \ -r \leqslant s \leqslant 0\Big\},$$

в котором функция $\eta \in \mathcal{K}$ такая, что $\eta(u) > u$ для $u > 0$.

Итак, в приведенных обозначениях теорема Н.Н. Красовского имеет следующий вид.

Теорема 2 [8]. *Если существует функция* $V(t,x)$ *такая, что для некоторых функций* $a(u), b(u), c(u), \eta(u) \in \mathcal{K}$ ($\eta(u) > u$ *при* $u > 0$) *и всех* $t \in \mathrm{R}^+$ *выполняются условия:*

1) $a(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|x|)$ *для* $x \in \mathrm{R}^n$,

2) $V'(t,\varphi) \leqslant -c(|\varphi(0)|)$ *для* $\varphi \in \Omega_t(V,\eta)$,

то нулевое решение уравнения (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Тем не менее, как уже упоминалось, техника использования функций Ляпунова для анализа уравнений с запаздыванием с учетом дополнительных условий при оценке производной (независимо от конкретного вида этих условий) стала применяться под названием метода функций Ляпунова–Разумихина или просто метода Разумихина.

Вернемся теперь к рассмотренному выше линейному уравнению, добавив зависимость параметров от времени: $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-h(t))$. Для функции $V(x) = x^2/2$ при $\varphi \in \Omega(V) = \{\varphi : |\varphi(s)| \leqslant |\varphi(0)|, \ s \in [-r,0]\}$ имеем $V'(t,\varphi) = \varphi(0)(a(t)\varphi(0) + b(t)\varphi(-h(t))) \leqslant \varphi^2(0)(a(t) + |b(t)|)$. Следовательно, если параметры непрерывны и ограничены и $a(t) + |b(t)| \leqslant 0$, то в силу теоремы 1 нулевое решение уравнения равномерно устойчиво. Если же $a(t) + |b(t)| \leqslant -\varepsilon < 0$, то для некоторых $q > 1$ и $\delta > 0$ выполняется соотношение $a(t) + q|b(t)| \leqslant -\delta < 0$, и нулевое решение уравнения равномерно асимптотически устойчиво в силу теоремы 2 (можно взять $\eta(r) = q^2 r$, $c(r) = -2\delta r^2$).

Заметим, что в приведенном примере оценки коэффициентов, обеспечивающие устойчивость, не зависят от величины запаздывания, поэтому запаздывание в рассмотренном уравнении может быть произвольным (любой ограниченной функцией времени). Такая особенность характерна для метода функций и удобна с точки зрения приложений, поскольку для реальных объектов часто оказывается, что наличие запаздывания очевидно, но величина его неизвестна. Отметим, что получить условия устойчивости для уравнений с переменным запаздыванием, не зависящих от диапазона значений ни самой функции запаздывания, ни скорости ее изменения, не удается с использованием функционала даже для такого простого уравнения.

В целом ряде задач преимущество метода функций перед функционалами состоит в том, что построение функций и проверка их знакоопределенности оказывается гораздо проще, чем построение функционалов, обладающих заданными свойствами. Вычисление производной функции в силу уравнения также не вызывает трудностей, тем более если функция непрерывно дифференцируема. Использование функций более естественно в задачах анализа геометрических характеристик уравнения, например для оценки областей притяжения или множеств достижимости [44, 45]. Наконец, метод функций до сих пор остается единственным методом, позволяющим получать условия устойчивости для систем с быстро меняющимся запаздыванием (например, такими являются системы с сетевым управлением) [7].

С другой стороны, во многих задачах учет характеристик запаздывания может привести к менее ограничительным параметрическим условиям устойчивости (например, если величина запаздывания постоянна и мала), и в таких случаях зависимость функционалов Ляпунова–Красовского от "предыстории" дает им преимущества перед методом функций. Для некоторых классов уравнений разработаны процедуры трансформации квадратичных функций в квадратичные функционалы (см. ссылки в [46]) и другие методы построения подходящих для анализа устойчивости функционалов [47]; для линейных стационарных систем как запаздывающего, так и нейтрального типов на основе комбинации метода функционалов с идеей Б.С. Разумихина удалось разработать конструктивные методы, позволяющие получать не только достаточные, но и необходимые условия экспоненциальной устойчивости и неустойчивости [48, 49].

Таким образом, нельзя говорить о явном преимуществе одного из двух описанных направлений прямого метода; все зависит от конкретного уравнения и его изучаемых свойств. Поэтому уже более шестидесяти лет оба направления – метод функций и метод функционалов – продолжают развиваться и использоваться, не конкурируя между собой.

2.2. Основные направления развития метода

Прямой метод Ляпунова, начиная с классического его варианта, развивается главным образом вдоль двух траекторий.

Во-первых, это расширение области применимости метода, распространение его на другие постановки задач и анализ новых свойств систем. В рамках только задачи анализа свойств устойчивости уравнения вида (1), помимо наиболее используемой в приложениях классической устойчивости по Ляпунову с применением функций Ляпунова–Разумихина исследовались и другие виды устойчивости, для которых пришлось так или иначе модифицировать условия классических теорем ([50–53] и др.).

Во-вторых, это попытки ослабления условий, налагаемых на функцию Ляпунова и ее производную. Причина активных исследований в этом направлении – известное “противоречие” между универсальностью теорем метода в приложении к широкому классу нелинейных систем, с одной стороны, и трудностями практического применения, т.е. построения подходящей функции Ляпунова для конкретной задачи. Именно это направление рассматриваемого метода будет главным образом обсуждаться далее.

Б.С. Разумихиным [54–56] большое внимание уделяется практическому применению теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости и их обобщений, полученных на основе уточнений множества, на котором оценивается производная функции Ляпунова. Эти уточнения основаны на следующем соображении: для устойчивости нулевого решения фактически достаточно, чтобы производная функции $V(t, x)$ была неположительна на множестве $\Omega(x, t)$ отрезков интегральных линий x_t, удовлетворяющих условию $x(t) = x$ и содержащихся в $\Omega_t(V)$ (Б.С. Разумихин назвал это множество воронкой интегральных линий с вершиной в точке (x, t)). А.Д. Мышкис в [57] эту идею оформил (для автономного уравнения) в следующей теореме.

Теорема 3. Предположим, что существует положительно определенная функция Ляпунова $V : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^+$ *и натуральное число* N *такое, что* $V'(x_t) < 0$ *для любой непрерывной функции* $x(t) : [-(N+1)r, 0] \to \mathrm{R}^n$*, для которой* $V(x(t)) < V(x(0))$ *для всех* $t \in [-(N+1)r, 0)$ *и которая удовлетворяет уравнению для* $t \in [-Nr, 0]$*. Тогда нулевое решение уравнения* (1) *устойчиво.*

Итак, множество $\Omega_t(V)$ можно рассматривать как грубую оценку множества $\Omega(x, t) \subset \Omega_t(V)$. Более точные оценки можно получить из дополнительных условий, вытекающих из свойств исследуемого уравнения на множестве $\Omega_t(V)$. Прежде всего, такими условиями являются двусторонние оценки производных $\dot{x}$, $\ddot{x}, \ldots$ решений.

Например, если $V(x) = x^2/2$, то вдоль интегральных линий уравнения $\dot{x}(t) = -bx(t-r)$ $(b > 0)$, удовлетворяющих условиям $V(x(t+s)) \leqslant V(x(t))$ при $s \in [-2r, 0]$ и $x(t) > 0$, справедлива оценка $\dot{x}(t+s) \leqslant bx(t)$, $s \in [-2r, 0]$. Отсюда $x(t-r) \geqslant (1-br)x(t)$. Следовательно, если $0 \leqslant br \leqslant 1$, то $-bx(t-r)x(t) = V'(x_t) \leqslant 0$. Проведя аналогичные рассуждения для случая $x(t) < 0$, делаем вывод об устойчивости нулевого решения уравнения.

Подходы, описанные в [56], были позднее оформлены в виде так называемого метода преобразований, позволяющего расширить область устойчивости. Идея метода состоит в использовании при оценке производной функции Ляпунова дополнительной информации о решении, получаемой из уравнения; например, $x(t-r)$ выражается по формуле конечных приращений Лагранжа или по формуле Тейлора через $x(t)$ и значения производных в точках t и $t-\tau$, где $\tau \in [0, r]$, с последующим исключением всех производных с помощью той же системы. В [56] описанные методы проиллюстрированы на ряде примеров, в которых приведены довольно сложные вычисления для последовательного уточнения оценок множества $\Omega(x, t)$. Однако способы такого уточнения не очевидны даже для простых скалярных уравнений и квадратичной функции, а в более сложных случаях громоздкость вычислений может стать серьезным препятствием.

Дальнейшее развитие метод преобразований получил главным образом в публикациях E. Fridman (см. ссылки в [7]), где на некоторых классах систем с запаздыванием показано, как использование различных форм записи исходного уравнения (не всегда, кстати, эквивалентных) позволяет по крайней мере в линейном случае уточнить оценки производной функции или функционала в силу уравнения и улучшить параметрические условия устойчивости.

Следует отметить, что не только оценка области устойчивости, но и процедура построения самой функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям классических теорем, может превратиться в довольно сложную задачу. Многие специалисты в области математики и механики работали над этой проблемой; в настоящее время известны некоторые классы уравнений, для которых функцию (или функционал) Ляпунова можно построить, используя вполне определенный алгоритм. Понятно, что чем более узкий класс уравнений рассматривается, тем больше принципиальная возможность получить точные и эффективно проверяемые признаки. Однако в общем случае не существует не только формального алгоритма, но и никаких конкретных рекомендаций.

Поэтому даже доказательство "обратных" теорем прямого метода (гарантирующих, что не только существование функции с заданными свойствами влечет за собой тот или иной вид устойчивости, но и наоборот, см., например, [58]) не решает проблему практического применения классических теорем.

Одна из возникающих трудностей заключается в том, что требования, предъявляемые к вспомогательной функции, удобны для доказательств в теоремах (более того, для некоторых видов устойчивости существование функции с требуемыми свойствами является не только достаточным, но и необходимым условием), но не всегда удобны для изучения конкретных уравнений.

В случае когда в конкретном примере удается построить функцию, удовлетворяющую некоторым (но не всем!) условиям имеющейся теоремы, у исследователя согласно [59] есть выбор по крайней мере из трех возможностей: получить новый результат, ослабляющий требования к функции Ляпунова; построить новую функцию Ляпунова; рассмотреть другую задачу.

Оставив размышления о привлекательности третьего пути и сомнительных гарантиях второго, обратимся к сторонникам первого. А их, судя по количеству публикаций, посвященных различным обобщениям теорем прямого метода, оказалось довольно много.

Например, очень часто "естественная" функция Ляпунова для рассматриваемой системы не удовлетворяет требованию знакоопределенности производной. Иногда бывает довольно просто построить знакопостоянную функцию с монотонным поведением вдоль решения, а нахождение подходящей знакоопределенной функции встречается с большими трудностями.

Наконец, специфика метода функций Разумихина определяет еще один "камень преткновения": множество, на котором необходимо проверять знак производной функции, а точнее – два множества, поскольку они разные в классических условиях устойчивости и асимптотической устойчивости. Оценка производной на этих множествах не всегда удобна, поэтому были предприняты попытки заменить их некоторым "третьим" множеством. Модификация оценок функции V и ее производной при этом осуществлялась за счет дополнительных ограничений на функцию и (или) правую часть уравнения.

Например, в [39] предлагается вместо множества $\Omega_t(V,\eta)$ использовать множество $Q = \left\{\varphi : \max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} |\varphi(s)| < q|\varphi(0)|\right\}$, где $q > 1$, при условии, что функция V удовлетворяет условиям $u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(|x|)$ для некоторых функций $u, v \in \mathcal{K}$. Доказательство правомерности этой замены основывается на факте, что $Q \subset \Omega_t(V,\eta)$ для некоторой функции η. Однако эти множества не совпадают (хотя бы потому, что второе может зависеть от t, а первое не может), и результат в общем случае не может быть верным. Это отмечено в [60]. Сразу после заметки [60] публикуется "ответ" с исправленным вариантом теоремы [61], в котором добавляется требование, чтобы для фиксированного $q_1 > 1$ и некоторого $q_2 \geqslant 1/q_1$ из неравенства

$$\max_{r-\leqslant s\leqslant 0} V(t+s,\varphi(s)) < q_1 V(t,\varphi(0))$$

следовало неравенство

$$\|\varphi\| \leqslant q_1 q_2 |\varphi(0)| < u^{-1}[q_1 v(|\varphi(0)|)].$$

Это означает, что в принятых в этом абзаце обозначениях $\Omega_t(V,\eta) \subset Q$ при $\eta(u) = q_1 u$ и $q = q_1 q_2$, а это, очевидно, обеспечивает выполнение условий теоремы 2 при замене $\Omega_t(V,\eta)$ на Q. Однако предложенное условие фактически сужает класс функций V, применимых для исследования устойчивости.

В [62] авторы совсем отказываются от использования множеств $\Omega_t(V)$ и $\Omega_t(V,\eta)$, рассматривая систему вида $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t), x(t-r), t)$ с непрерывно дифференцируемыми функциями f и g, $f(0) = 0$, $g(x,0,t) \equiv 0$. Если тогда известна функция, гарантирующая равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы $\dot{x}(t) = f(x(t))$, то дополнительная оценка разности производных этой функций в силу исходной и "усеченной" систем обеспечивает асимптотическую устойчивость для системы с запаздыванием. Все эти ограничения делают приведенный результат справедливым лишь для очень узкого класса систем.

В целом, подобные результаты не получили широкого использования.

В других публикациях менее радикальное изменение классических условий позволило рассмотреть более общие виды систем.

Перед изложением соответствующих результатов вернемся к следующему вопросу: можно ли в теореме об асимптотической устойчивости множество $\Omega_t(V,\eta)$ заменить на $\Omega_t(V)$ (второе множество, очевидно, всегда является подмножеством первого, поэтому "выгоднее" проверять знак производной именно на нем).

Этот вопрос уже обсуждался в подразделе 2.1, там же приведена ссылка на опубликованный пример, демонстрирующий, что такая замена в общем случае неравноценна. С другой стороны, пример этот имеет весьма специальный вид и вряд ли может возникнуть в исследовании реальной системы. Если же рассматривать достаточно широкие классы систем, встречающихся в приложениях, то оказывается, что дополнительные ограничения на правую часть уравнения (1) делают рассматриваемую замену возможной.

Для начала обратим внимание на публикацию [36], в которой для функции $v(t) = V(t, x(t))$ предлагаются более общие по сравнению с теоремой 2 условия, удобные при анализе неавтономного уравнения (1): оценка производной вдоль решения $\dot{v}(t) \leqslant -c(t, v(t))$ при условии, что

$$\max_{-r \leqslant s \leqslant 0} v(t+s) \leqslant \tilde{\eta}(t, v(t)).$$

Здесь функция $c(t, u)$ положительно определена и не убывает при каждом фиксированном t, а функция $\tilde{\eta}(t, u) - u$ – положительная и неубывающая при $u > 0$. Если при этом существуют непрерывные функции $k(u)$ и $K(u)$, такие что для каждого фиксированного $u > 0$ выполняются условия

$$\tilde{\eta}(t, u) - u \geqslant k(u), \quad 0 \leqslant c(t, u) \leqslant K(u), \quad \int^{\infty} c(t, u) dt = \infty,$$

то $v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а при дополнительном условии положительной определенности и существования бесконечно малого высшего предела для функции $V(t, x)$ обеспечивается асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (1) (в ряде публикаций предлагались модификации и частные случаи этих условий; например, в [32] представлен результат об асимптотической устойчивости с оценкой $V' \leqslant -k(t)c(|\varphi(0)|)$ для $\varphi \in \Omega_t(V, \eta)$, где $c \in \mathcal{K}$, $k : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$, $\int_0^{+\infty} k(s)\, ds = \infty$).

В той же публикации [36] обосновано, что при некоторых дополнительных условиях в этом случае существует и “обычная” функция Ляпунова $w(t)$, для которой $v(t) \leqslant w(t) \leqslant \max\limits_{-r \leqslant s \leqslant 0} v(t+s)$ и $\dot{w}(t) \leqslant -c_1(t, w(t))$ при всех t. Этот важный с точки зрения теории результат, однако, мало полезен при решении конкретной задачи, подобно обратным теоремам прямого метода.

Интересно другое утверждение из [36], что указанные условия на производную $\dot{v}(t)$ будут при некоторых дополнительных условиях на $V(t, x)$ и $V'(t, x_t)$ справедливы в случае выполнения оценки

$$V'(t, x_t) \leqslant -c^*(t, V(t, x(t))) \quad \text{для} \quad x_t \in \Omega_t(V),$$

где функция $c^*(t, u)$ также положительно определена и не убывает при каждом фиксированном t. Для этого, во-первых, V' должна быть равномерно непрерывна по второму аргументу при фиксированном t, во-вторых, для некоторой функции $\eta^*(t, \varepsilon, u)$, свойства которой аналогичны свойствам функции $\tilde{\eta}(t, u)$, из условий $\varepsilon > 0$, $\max\limits_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t+s, \varphi(s)) \leqslant \eta^*(t, \varepsilon, V(t, \varphi(0)))$ следует существование $\psi \in C$ такого, что

$$\|\varphi - \psi\| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad V(t, \psi(0)) = \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t+s, \psi(s)) \geqslant V(t, \varphi(0)).$$

Это утверждение свидетельствует о том, что теорема Разумихина об асимптотической устойчивости верна при дополнительных условиях. Однако сформулированные условия довольно ограничительны, а корректная проверка уточненного в такой форме утверждения об асимптотической устойчивости требует нетривиальных усилий.

Первый конструктивный результат в этом направлении был получен для автономного уравнения (1), т.е. для случая $f = f(\varphi)$, на основе обобщенного принципа инвариантности [29]. Для формулировки соответствующего утверждения используем традиционные определения, которые приведем здесь для полноты изложения.

Определение 4. Точка $\psi \in C_H$ называется положительной предельной (или ω-предельной) точкой решения $x(t;\alpha,\varphi)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x_{t_n}(\alpha,\varphi) \to \psi$ при $n \to \infty$. Множество всех точек ψ называется положительным предельным (или ω-предельным) множеством и обозначается $\omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$.

Определение 5. Множество $M \subset C_H$ называется положительно инвариантным относительно уравнения (1), если при любых $\alpha_0 \in \mathrm{R}^+$ и $\varphi_0 \in M$ для всех $t \geqslant \alpha_0$ решение $x(t;\alpha_0,\varphi_0)$ этого уравнения определено и $x_t \in M$.

Множество $M(t) \subset C_H$ (зависящее от t) называется положительно инвариантным относительно уравнения (1), если при любых $\alpha_0 \in \mathrm{R}^+$ и $\varphi_0 \in M(\alpha_0)$ для всех $t \geqslant \alpha_0$ решение $x(t;\alpha_0,\varphi_0)$ этого уравнения определено и $x_t \in M(t)$.

Теорема 4 (принцип инвариантности, см. [29]). *Предположим, что в уравнении (1) $f(t,\varphi) = f(\varphi)$ и существует функция Ляпунова $V = V(x)$ такая, что $V'(\varphi) \leqslant 0$ для всех $\varphi \in C_H$ таких, что*

$$V(\varphi(0)) = \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(\varphi(s)).$$

Тогда для каждой начальной точки φ, определяющей ограниченное на $[-r,\infty)$ решение, $\omega^+(x_t(0,\varphi))$ содержится в максимально инвариантном относительно уравнения $\dot{x}(t) = f(x_t)$ подмножестве M_V множества

$$E_V = \left\{\varphi \in C_H : \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(x(t+s;0,\varphi)) = \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(\varphi(s)) \text{ для всех } t \geqslant 0\right\}.$$

Использование этого результата для анализа конкретных уравнений может оказаться довольно эффективным с точки зрения получения информации об асимптотических свойствах решений. Проиллюстрируем это примером из [29].

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = bx(t-r)(1-x(t)) - cx(t),$$

которое изучалось в целом ряде публикаций, в том числе в качестве модели распространения инфекции. Здесь все параметры предполагаются положительными. Пусть сначала $b = c$. Рассмотрим положительно инвариантное множество $G = \{\varphi \in C : \varphi(s) \geqslant 0,\ -r \leqslant s \leqslant 0\}$ и функцию $V(x) = x^2/2$. Тогда для $\varphi \in G \cap \Omega(V)$ получаем $V'(\varphi) \leqslant -b\varphi^2(0)\varphi(-r) \leqslant 0$. Найдем множество $E_V(G) = \left\{\varphi \in G : \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(x(t+s;0,\varphi)) = \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(\varphi(s)) \text{ для всех } t \geqslant 0\right\}$. Пусть $\varphi \in E_V(G)$, т.е. $\|\varphi\| = \|x_t(0,\varphi)\|$ для всех $t \in \mathrm{R}^+$. Заметим, что если $x_{t^*}(0,\varphi) \in \Omega(V)$, то $x(t^*-r) \leqslant x(t^*)$ и $V'(x_{t^*}(0,\varphi)) = 0$, откуда $x^2(t^*)x(t^*-r) = 0$, а значит, $x(t^*) = \|x_{t^*}(0,\varphi)\| = 0$. Учитывая, что $\varphi \in E_V(G)$, получаем отсюда $\varphi = 0$. В итоге $E_V(G) = M_V(G) = \{0\}$ и $x_t(0,\varphi) \to 0$ при $t \to +\infty$ для любой $\varphi \in G$.

Аналогичные рассуждения справедливы в случае $0 < b < c$. Если же $0 < c < b$, то уравнение имеет положительное равновесие в точке $1 - c/b$, и, используя ту же функцию Ляпунова и соответствующую замену переменной, можно показать, что все решения, начинающиеся в множестве $G_0 = \{\varphi \in C : \varphi(s) > 0,\ -r \leqslant s \leqslant 0\}$, асимптотически приближаются к этому равновесию.

Следует заметить, что приведенные результаты можно получить также и с помощью функционала Ляпунова. Однако, в отличие от метода функционалов используемый здесь подход непосредственно распространяется (в случае $0 < b \leqslant c$), к примеру, на более общее уравнение вида $\dot{x}(t) = bh(x(t-r))(1 - x(t)) - cx(t)$ с непрерывной функцией h такой, что $|h(u)| \leqslant |u|$ и $uh(u) > 0$, или вида $\dot{x}(t) = bh(x(t-r))(1-x(t)) - ch(x(t))$ со строго возрастающей функцией h ($h(0) = 0$).

Как следствие теоремы 4 в [29] была доказана теорема 5.

Теорема 5. Предположим, что в уравнении (1) $f(t,\varphi) = f(\varphi)$, $f(0) = 0$, *и существует функция Ляпунова* $V = V(x)$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что:*

1) $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ *для всех* $0 \neq |x| < \alpha$;

2) $V'(0) = 0$;

3) $V'(\varphi) < 0$ *для всех* $0 \neq \|\varphi\| < \alpha$ *таких, что* $\max\limits_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0))$.

Тогда нулевое решение уравнения $\dot{x}(t) = f(x_t)$ (*равномерно*) *асимптотически устойчиво.*

Интересно, что в теореме 5 требуется *знакоопределенность* производной V', в отличие от известного результата для автономных и периодических ОДУ. Для периодического уравнения (и периодической функции Ляпунова) это требование ослабляется в [12], где условия для производной в теореме об асимптотической устойчивости принимают вид: $V'(t,\varphi) \leqslant 0$ при $\varphi \in \Omega_t(V,\eta)$, множество $\{(t,\varphi) \in \mathrm{R}^+ \times \Omega_t(V,\eta) : V'(t,\varphi) = 0\}$ не содержит целых полутраекторий (исключая нулевое решение). Заметим, что при этом опять происходит возврат к множеству $\Omega_t(V,\eta)$.

Тем не менее оценка производной функции Разумихина на множестве $\Omega_t(V)$ может при некоторых дополнительных условиях оказаться достаточной для асимптотической устойчивости не только в автономном и периодическом случае, но и для некоторого более широкого класса неавтономных уравнений.

В [63] приводится доказательство теоремы Разумихина об асимптотической устойчивости из [9] (с множеством $\Omega_t(V)$) при условии, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица $|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \leqslant L\|\varphi - \psi\|$ при $t \in \mathrm{R}^+$ и $\varphi, \psi \in C_H$ (заметим, что пример из [43] не удовлетворяет этому условию), а функция Ляпунова имеет непрерывные ограниченные частные производные на множестве $\mathrm{R}^+ \times G_H$. Доказательство свойства притяжения в [63] проводится путем обоснования, что $l(t) = \sup\limits_{s \geqslant t} V(s, x(s))$ при $t \to +\infty$ (равномерность притяжения при этом не доказывается).

Другой путь, позволяющий в более общей форме выявить предельные свойства решений, обобщить на неавтономный случай принцип инвариантности и обосновать достаточные условия различных видов устойчивости (в частности, равномерной асимптотической), основан на использовании так называемого метода предельных уравнений. Отметим, что ослабить требование знакоопределенности при этом удается не только для производной V', но и для самой функции.

Метод предельных уравнений был впервые систематически изложен в [64] для ОДУ. Для уравнений с бесконечномерным фазовым пространством подробное изложение метода можно найти в [10, 65–67]. Одним из главных результатов применения этого метода с позиции теории устойчивости является обобщение свойства инвариантности положительного предельного множества решения на случай неавтономного уравнения. Результатам об устойчивости для уравнений с конечным запаздыванием, полученным на основе метода предельных уравнений, посвящен подраздел 2.3.

2.3. Анализ устойчивости с использованием метода предельных уравнений

Введем дополнительные предположения относительно правой части уравнения (1).

Предположение 1. Для каждого числа $q \in (0, H)$ существует неубывающая функция $\mu_q \in C(\mathrm{R}^+, \mathrm{R}^+)$, $\mu_q(0) = 0$, такая, что для любой функции $u \in C([a, b], \bar{C}_q)$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leqslant \mu_q(|t_2 - t_1|).$$

Это предположение, в частности, выполняется, если f ограничена на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times \bar{C}_q$, где $q \in (0, H)$.

Пусть $\{q_n\}$ – последовательность чисел, такая что $q_1 < q_2 < \cdots < q_n \to H$ при $n \to \infty$. Для каждого q_i определим множество $K_i \subset C$ всех функций $\varphi \in C$ таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-r, 0]$ справедливы оценки

$$|\varphi(s)| \leqslant q_i, \quad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leqslant \mu_{q_i}(|s_2 - s_1|).$$

Тогда множество K_i компактно. Положим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Пусть $\mathcal{F}_f = C(\mathrm{R}^+ \times \Gamma \to \mathrm{R}^n)$. Обозначим через f^τ сдвиг функционала f, определяемый равенством $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Тогда для $f \in \mathcal{F}_f$ семейство сдвигов $\mathcal{F}_f^0 = \{f^\tau : \tau \in \mathrm{R}^+\} \subset \mathcal{F}_f$.

Определим сходимость в $\mathcal{F}_f$ как равномерную на каждом компакте $K' \subset$ $\subset \mathrm{R}^+ \times \Gamma$. Заметим, что в силу определения области Γ эта сходимость метризуема [10].

В ряде последующих утверждений используется также следующее более сильное предположение.

Предположение 2. Функционал $f(t, \varphi)$ ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times K$, где $K \subset C_H$ — компакт.

В этом случае семейство сдвигов $\mathcal{F}_f^0$ предкомпактно в пространстве $\mathcal{F}_f$ и уравнению (1) можно сопоставить семейство предельных уравнений [10]

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t), \tag{2}$$

где $f^*(t,\varphi)$ есть предельный к f функционал, определенный в области $\mathrm{R}\times\Gamma$ как предел последовательности $\{f(t+t_k,\varphi) : t_k \to +\infty\}$, при этом сходимость равномерна на каждом множестве $[0,T]\times K$, где $T > 0$ и $K \subset \Gamma$ – компакт.

Предположение 3. Функционал $f(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица: для каждого компакта $K \subset C_H$ существует $l = l(K) > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ выполняется неравенство $|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| \leqslant l\|\varphi_2 - \varphi_1\|$.

Если указанное условие Липшица выполняется для функционала f, то любой предельный функционал f^* удовлетворяет аналогичному условию и решения уравнений (1) и (2) для каждой точки $(\alpha,\varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_H$ и $(\alpha,\varphi) \in \in \mathrm{R}^+ \times \Gamma$ соответственно единственны.

Заметим, что если $x(t;\alpha,\varphi)$ — решение (1), определенное на интервале $[\alpha - r, +\infty)$, то в условиях предположения 2 $x_t(\alpha,\varphi) \in \Gamma$ для $t \geqslant \alpha + r$. Поэтому для функционала, удовлетворяющего предположению 2, динамические свойства решений уравнений (1) и (2) не зависят от сужения области определения f на множество $\mathrm{R}^+ \times \Gamma$.

В предположениях 2 и 3 имеет место свойство инвариантности — теорема 6.

Теорема 6 [10]. *Пусть решение $x = x(t;\alpha,\varphi)$ определено и ограничено при всех $t \geqslant \alpha - r$, $|x(t;\alpha,\varphi)| \leqslant q < H$. Тогда множество $\omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ инвариантно по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$, а именно: для каждого элемента $\psi \in \omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ существует предельное уравнение $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$ такое, что для решения этого уравнения $x^*(t;0,\psi)$ выполняется соотношение $\{x_t^*(0,\psi) : t \in \mathrm{R}\} \subset \omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$.*

Замечание 1. Так как сдвиг $f_\tau(t,\varphi)$ при большом $\tau \geqslant T > 0$ определен для значений $(t,\varphi) \in [-T,+\infty) \times C_H$, то по построению уравнения (2) его областью определения можно принять $\mathrm{R}\times\Gamma$; решение $x_t^*(t;0,\psi)$ в теореме 6 также по построению продолжимо для всех $t \in \mathrm{R}$.

Задача об исследовании связи свойств устойчивости и предельного поведения решений исходной и предельных систем с запаздыванием изучалась многими авторами, см., например, [10, 65, 66, 68–72] и ссылки в них. Некоторые "устойчивоподобные" свойства "наследуются" всем семейством предельных уравнений [70], что позволяет сделать вывод о свойствах целого класса уравнений, изучив лишь одно. С практической точки зрения представляют интерес результаты, позволяющие на основе свойств предельных уравнений делать вывод о поведении решений исходного уравнения. Такие утверждения особенно удобно применять в тех случаях, когда предельные уравнения имеют более простую структуру, чем исходное, например являются автономными, и для уравнений с исчезающими в различных смыслах возмущениями.

Однако совместное использование свойств предельных уравнений и вспомогательных функций (функционалов) позволяет получить более мощный и гибкий метод исследования. Первой известной попыткой получить подобные утверждения на основе метода Разумихина была, вероятно, публикация [33].

Определим для функции Ляпунова следующие предельные множества уровня.

Определение 6. *Пусть $t_n \to +\infty$ есть некоторая последовательность, $t \in \mathrm{R}$, $c_0 \in \mathrm{R}$. Множество $N_\infty(t, c_0, t_n) \subset C_H$ есть множество точек $\varphi \in C_H$, для каждой из которых существует последовательность $\{\varphi_n \in C_H : \varphi_n \to \varphi$ при $n \to +\infty\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t_n + t + s, \varphi_n(s)) = c_0$. При этом $\varphi \in M_\infty(t, c_0, t_n) \subset N_\infty(t, c_0, t_n)$, если одновременно $\lim\limits_{n\to\infty} V(t_n + t, \varphi_n(0)) = c_0$.*

Пусть $U : \mathrm{R}^+ \times C_H \to \mathrm{R}$ есть функционал, ограниченный и равномерно непрерывный на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times K$, $K \subset C_H$ — компакт. Тогда семейство $\{U_\tau(t, \varphi) = U(\tau + t, \varphi), \tau \in \mathrm{R}^+\}$ предкомпактно в функциональном пространстве $\mathcal{F}_U = C(\mathrm{R}^+ \times \Gamma, \mathrm{R})$ с метризуемой компактно открытой топологией, и для него можно определить семейство предельных функционалов $U^* : \mathrm{R}^+ \times \Gamma \to \mathrm{R}$.

Будем говорить, что предельное уравнение (2) и предельный функционал U^* образуют предельную пару (f^*, U^*), если они определяются для одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$. По отношению к этой последовательности $t_n \to +\infty$ можно определить соответствующие множества $N_\infty(t, c, t_n)$ и $M_\infty(t, c, t_n)$. В приведенных обозначениях справедлива следующая теорема о локализации положительного предельного множества [10].

Теорема 7. *Предположим, что для правой части уравнения* (1) *справедливы предположения 2 и 3, кроме того:*

1) *существует функция $V : \mathrm{R} \times G_H \to \mathrm{R}$, ограниченная снизу на множестве $\mathrm{R}^+ \times G_{H_1}$ $(0 < H_1 < H)$, $V(t, x) \geqslant m(H_1)$ для $(t, x) \in \mathrm{R}^+ \times G_{H_1}$, производная которой $V'(t, \varphi) \leqslant 0$ для $t \in \mathrm{R}^+$, $\varphi \in \bar{C}_{H_1} \cap \Omega_t(V)$;*

2) *существует функционал $U : \mathrm{R}^+ \times C_H \to \mathrm{R}^+$, ограниченный и равномерно непрерывный на множествах $\mathrm{R}^+ \times K$ для каждого компакта $K \subset C_H$ и такой, что $|V'(t, \varphi)| \geqslant U(t, \varphi)$ для всех $(t, \varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_H$;*

3) *некоторое решение $x = x(t; \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \subset \mathrm{R}^+ \times C_H$, ограничено, $|x(t; \alpha, \varphi)| \leqslant H_1 < H$ для всех $t \geqslant \alpha - r$.*

Тогда существует значение $c_0 = \mathrm{const}$ такое, что для любой точки $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ существует предельная пара (f^*, U^*) такая, что решение $x^*(t;\ 0, \psi)$ предельного уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ обладает свойствами: $\{x_t^* | t \in \mathrm{R}\} \subset \omega^+(\alpha, \varphi)$; $x_t^* \in N_\infty(t, c_0, t_n)$ для всех $t \in \mathrm{R}$; для каждого $\tau \in \mathrm{R}$ существует $\theta \in [\tau - r, \tau]$, при котором $x_\theta^* \in M_\infty(\theta, c_0, t_n)$ и $U^*(\theta, x_\theta^*) = 0$.

Это утверждение можно рассматривать как обобщение принципа инвариантности (теорема 4). Замечательно, что схема доказательства теоремы 7 допускает некоторые вариации требований как к правой части уравнения, так и к функции Ляпунова (при этом меняются технические детали доказательств). В результате расширяются возможности применения соответствующего утверждения.

Рассмотрим, например, случай, когда для функции $V(t, x)$ выполнено следующее дополнительное предположение, аналогичное предположению 2.

Предположение 4. Функция $V(t,x)$ равномерно непрерывна и ограничена на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times \bar{G}_q$, $\bar{G}_q = \{x \in \mathrm{R}^n \,:\, |x| \leqslant q < H\}$.

В предположении 4 семейство сдвигов $\{V_\tau(t,x) = V(\tau + t, x),\ \tau \in \mathrm{R}^+\}$ предкомпактно в пространстве $\mathcal{F}_V = C(\mathrm{R}^+ \times G_H, \mathrm{R}^+)$ с открыто-компактной топологией.

Для $t, c \in \mathrm{R}$ и последовательности $t_n \to +\infty$ можно тогда определить множества:

$$N(t,c,V^*) = \left\{\varphi \in C_H \,:\, \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V^*(t+s,\varphi(s)) = c_0\right\},$$

$$M(t,c,V^*) = \Big\{\varphi \in N(t,c_0,V^*) \,:\, V^*(t,\varphi(0)) = c_0\Big\},$$

$$L(t,U^*) = \Big\{\varphi \in C_H \,:\, U^*(t,\varphi) = 0\Big\}.$$

В данных предположениях доказана, в частности, основная теорема из [33], которая принимает вид теоремы 8.

Теорема 8. Пусть $V(t,x) \in C^1(\mathrm{R} \times G_H, \mathrm{R})$ – функция, удовлетворяющая условию $V'(t,\varphi) \leqslant 0$ для $t \in \mathrm{R}^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$. Тогда для любой точки $\varphi \in C_H$ такой, что $x(t;\alpha,\varphi)$ определено и ограничено на $[\alpha - r, \infty)$, существует $c \in \mathrm{R}$ такое, что для $\psi \in \omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ справедливо $x_t^*(0,\psi) \in$ $\in N(t,c,V^*)$ для всех $t \in \mathrm{R}$, где f^* и V^* являются предельными к f и V для некоторой (одной и той же) последовательности $t_k \to +\infty$, $x^*(t;0,\psi)$ – решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$.

Замечание 2. В оригинале теорема 8 сформулирована для положительно инвариантного относительно уравнения (1) подмножества $D \subset C_H$. Здесь формулировка изменена для простоты. Заметим, что во всех приведенных в обзоре утверждениях шар C_H можно заменить его положительно инвариантным относительно уравнения подмножеством, внеся очевидные изменения в формулировки.

В то же время из теоремы 7 следует близкий результат, но с уточненной информацией о структуре положительного предельного множества: помимо $x_t^* \in N(t,c_0,V^*)$ для всех t, можно утверждать, что для каждого $t \in \mathrm{R}$ существует $\theta \in [t-r,t]$ такое, что $x_\theta^* \in M(\theta,c_0,V^*) \cap L(\theta,U^*)$ (см. [73]). Это последнее свойство осталось без внимания в формулировке теоремы 8, а именно оно играет важную роль в приложениях.

Если правая часть уравнения (1) и функция $V(t,x)$ являются периодическими с периодом $T > 0$, то функции, предельные к f, V и U, имеют вид $f(t+\tau,\varphi)$, $V(t+\tau,x)$ и $U(t+\tau,\varphi)$, где $0 \leqslant \tau < T$, а решения исходного и предельного уравнений связаны соотношением $x^*(t;\alpha,\varphi) = x(t+\tau;\alpha,\varphi)$. Поэтому в периодическом, в частности в автономном, случае теорему 7 можно сформулировать в терминах только исходного уравнения (сравните с теоремой 4).

Приведенные принципы инвариантности дают возможность получить достаточные условия асимптотической устойчивости, предъявляющие менее жесткие требования к функции Ляпунова. В частности, множество $\Omega_t(V,\eta)$

удается заменить на $\Omega_t(V)$ (заметим, что упомянутый выше контрпример из [43] не удовлетворяет предположению 2). Кроме того, накладывая дополнительные ограничения на предельные уравнения, условие отрицательной определенности производной в теоремах об асимптотической устойчивости (см. теорему 2) можно ослабить, требуя лишь ее неположительность.

Для этого дополнительно введем следующее определение.

Определение 7. Для последовательности $t_n \to +\infty$ и соответствующей предельной пары (f^*, U^*) определим множество $K_\infty(t_k, c)$, состоящее из решений $x^*(t; 0, \psi)$ уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ таких, что $x_t^* \in N_\infty(t, c, t_n)$ для всех $t \in \mathrm{R}$, и для каждого $\tau \in \mathrm{R}$ существует значение $\theta \in [\tau - r, \tau]$, такое что $x_\theta^* \in M_\infty(\theta, c, t_n) \cap L(\theta, U^*)$.

В предположениях 2 и 3 из теоремы 7 выводятся следующие результаты [10].

Теорема 9. Предположим, что существует функция Ляпунова $V = V(t, x)$ такая, что:

1) функция $V(t, x) \geqslant a_1(|x|)$ для всех $(t, x) \in \mathrm{R}^+ \times G_{H_1}$ $(0 < H_1 < H$, $\alpha_1(u) \in \mathcal{K})$, $V'(t, \varphi) \leqslant 0$ для каждой функции $\varphi \in C_{H_1} \cap \Omega_t(V)$;

2) существует функционал $U : \mathrm{R}^+ \times C_H \to \mathrm{R}^+$, ограниченный и равномерно непрерывный на множествах $\mathrm{R}^+ \times K$ с компактными $K \subset C_H$ и такой, что производная $|V'(t, \varphi)| \geqslant U(t, \varphi) \geqslant 0$ для всех $(t, \varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_{H_1}$;

3) для каждой последовательности $t_n \to +\infty$ и каждого $c \geqslant 0$ множество $K_\infty(t_n, c)$ состоит только из нулевого решения.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 10. Допустим, что выполнены условия 1 и 2 теоремы 9, а также условие

3) существует последовательность $t_n \to +\infty$, для которой при каждом $c > 0$ множество $K_\infty(t_n, c)$ пусто.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1) эквиасимптотически устойчиво. Если дополнительно выполняется предположение 4 и множество $K_\infty(t_n, c)$ пусто для любой последовательности $t_n \to +\infty$ и каждого $c > 0$, то нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Замечание 3. Заметим, что для асимптотической и эквиасимптотической устойчивости не требуется существование бесконечно малого высшего предела функции V (в теореме 10 оно следует из предположения 4). Кроме того, теорема 10 позволяет определить асимптотическую устойчивость нулевого решения, когда уравнение (1), а также функция $V(t, x)$ и функционал $U(t, \varphi)$ удовлетворяют условиям предкомпактности (т.е. предположениям 2 и 4) лишь на некоторой последовательности отрезков $[t_k, t_k + T_k]$ $(t_k \to +\infty,\ T_k \geqslant T_0 > r)$. Вне этих отрезков достаточно, чтобы правая часть уравнения (1) удовлетворяла только условиям существования решений. В этом случае предельная тройка (f^*, V^*, U^*) будет задаваться подпоследовательностью $t_{k_j} \to +\infty$ и предельные функции будут определены для $t \in [0, T]$, $T \geqslant T_0$.

П р и м е р 2. Для скалярного уравнения

$$\dot{x}(t) = -x^3(t) + f(t)\int\limits_{-1}^{0} x^3(t+s)ds, \tag{3}$$

$$\text{где}\quad f(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & t \in [0,1]; \\ 0, & t \in [2^{2k}, 2^{2k+1}]; \\ \sin(k+1)\pi t, & t \in [2^{2k+1}, 2^{2k+2}],\ k = 0,1,\ldots, \end{cases}$$

функция $f(t)$ не является равномерно непрерывной, однако на последовательности интервалов $[t_k, t_k + T_k]$, где $t_k = 2^{2k}$ и $T_k = 2^{2k}$, $f(t)$ удовлетворяет условиям предкомпактности и $f(t_k + t) \to f(t) \equiv 0$ при $k \to \infty$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$. Уравнение, предельное к (3), имеет вид $\dot{x}(t) = -x^3(t)$, производная функции $V(x) = x^2/2$ в силу уравнения (3) равна

$$V'(t, x_t) = -x^4(t) + x(t)f(t)\int\limits_{-1}^{0} x^3(t+s)ds,$$

и если $\varphi \in \Omega(V)$, то $V'(t,\varphi) \leqslant 0$, а $U(t,\varphi) = \varphi^4(0)$ при $t \in [2^{2k}, 2^{2k+1}]$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 10, и нулевое решение уравнения (3) эквиасимптотически устойчиво.

В статье [33] на основе теоремы 8 доказана теорема об асимптотической устойчивости, которая в принятых здесь обозначениях имеет вид теоремы 11.

Т е о р е м а 11. Пусть дополнительно к предположениям 2–4 функция $V(t,x)$ удовлетворяет условиям: $V(t,x) \geqslant a(|x|)$ для некоторой функции $a(u) \in \mathcal{K}$ и всех $x \in \mathrm{R}^n$, $V(t,0) \to 0$ при $t \to \infty$, $U(t,\varphi) = V'(t,\varphi) \leqslant 0$ для всех $(t,\varphi) \in \mathrm{R}^+ \times \Omega_t(V)$, и для любой последовательности $t_k \to +\infty$ $U^*(t,\psi) < 0$, если $\psi \in \omega^+(x_t(\alpha,\varphi)) \cap M(t,c,V^*) \setminus \{0\}$ (здесь $x(t;\alpha,\varphi)$ – решение уравнения (1), $\psi = \lim\limits_{k\to\infty} x_{t+t_k}(\alpha,\varphi)$, $V^*(t,x) = \lim\limits_{k\to\infty} V(t+t_k, x)$ и $U^*(t,\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} U(t+t_k,\varphi)$).

Тогда нулевое решение уравнения (1) эвентуально асимптотически устойчиво.

З а м е ч а н и е 4. Эвентуальная асимптотическая устойчивость означает, что начальный момент в определении устойчивости не произволен, а должен превышать некоторое число $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Если условие $V(t,0) \to 0$ при $t \to \infty$ заменить более традиционным условием $V(t,0) \equiv 0$, то условия теоремы 11 обеспечивают обычную асимптотическую устойчивость.

Теорема 11 является следствием теоремы 10, более того, в силу теоремы 10 в условиях теоремы 11 имеет место равномерная асимптотическая устойчивость.

Аналогичные результаты можно доказать для неавтономного уравнения (1), правая часть которого удовлетворяет лишь предположению 1. Этого предположения достаточно для свойства предкомпактности положительной орбиты ограниченного решения уравнения (1) [10], существенного для доказательства представленных теорем о локализации положительного предельного множества и об асимптотической устойчивости. Поэтому можно исключить из соответствующих формулировок предельные уравнения, а предельные множества рассматривать как состоящие из непрерывных отображений $\mathrm{R} \to C_H$, как в следующей теореме.

Теорема 12 ([10], см. также [74]). *Предположим, что функционал f удовлетворяет предположению 1 и выполняются условия 1–3 теоремы 7.*

Тогда существует число $c_0 \geqslant m(H_1)$, при котором для каждой последовательности $t_n \to +\infty$ и соответствующей предельной точки $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ можно определить непрерывное отображение $u : \mathrm{R} \to \bar{C}_{H_1}$ и функционал $U^* \in \mathfrak{F}_U$, такие что $\{u(t) \,|\, t \in \mathrm{R}\} \subset \omega^+(\alpha,\varphi)$ и $u(t) \in N_\infty(t, c_0, t_n)$ для всех $t \in \mathrm{R}$, кроме того, для каждого $\tau \in \mathrm{R}$ найдется значение $\theta \in [\tau - r, \tau]$ такое, что $u(\theta) \in M_\infty(\theta, c_0, t_n) \cap L(\theta, U^*)$.

Заметим, что на основе теоремы 7 и более общей теоремы 12 можно в ряде случаев сделать выводы об асимптотическом поведении решений уравнения.

Пример 3 [10]. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = a(t)(x(t-h) - x(t)) - x(t)x(t-h) \int\limits_{-h}^{0} b(t,s)(x(t+s) - x(t))^2 ds, \tag{4}$$

где коэффициенты $a(t)$ и $b(t,s)$ – ограниченные, равномерно непрерывные по $t \in \mathrm{R}^+$ функции, при этом $a(t) \geqslant 0$ и $b(t,s) \geqslant b_0 > 0$ для всех $t \in \mathrm{R}^+$, $s \in [-h, 0]$.

Множество $\{x : x \geqslant 0\}$ инвариантно относительно (4). Для производной функции $V = x^2$ вдоль решения, содержащегося в этом множестве, имеем оценку

$$V'(t,\varphi) \leqslant -2b_0 h \varphi^2(0)\varphi(-h) \inf_{-h \leqslant s \leqslant 0} (\varphi(s) - \varphi(0))^2 \leqslant 0,$$

если $\varphi^2(s) \leqslant \varphi^2(0)$ для $s \in [-h, 0]$. Отсюда следует, что рассматриваемое решение $x(t;\alpha_0,\varphi)$ ограничено для всех $t \geqslant \alpha_0 - h$.

По теореме 12 множество $\omega^+(\alpha,\varphi)$ решения $x = x(t;\alpha,\varphi)$ состоит из непрерывных кривых $u : \mathrm{R} \to C_H$ таких, что $\|u(t)\| = c_0$ для некоторого $c_0 \geqslant 0$ и для всех $t \in \mathrm{R}$, при этом существуют значения $\theta_0 \in [\tau - h, \tau]$, для которых

$$(u(\theta))(0) = c_0 \geqslant 0,$$

$$\begin{aligned} U^*(\theta, u(\theta)) = a^*(\theta)\Big|(u(\theta))(0)\Big|\Big|(u(\theta))(-h) - (u(\theta))(0)\Big| + \\ + \Big|\left(u^2(\theta)\right)(0)(u(\theta))(-h)\Big| \int\limits_{-h}^{0} b^*(\theta,s)\left((u(\theta))(s) - (u(\theta))(0)\right)^2 ds = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $a^*(t)$ и $b^*(t,s)$ – функции, предельные к $a(t)$ и $b(t,s)$. Функции $a^*(t)$ и $b^*(t,s)$ удовлетворяют тем же условиям, что и $a(t)$ и $b(t,s)$. Отсюда несложно найти, что равенства (5) возможны, только если $u(t) \equiv c_0 = \text{const} \geqslant 0$ для всех $t \in \mathrm{R}$. Следовательно, $x(t;\alpha,\varphi) \to c_0$ при $t \to +\infty$.

На основе теоремы 12 получаются также результаты об асимптотической устойчивости, аналогичные теоремам 9 и 10. При этом в формулировках изменяются только требования к предельным множествам уровня. Например, достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости можно записать в виде следующей теоремы.

Теорема 13 [74]. *Предположим, что существует функция Ляпунова $V = V(t,x)$, удовлетворяющая предположению 4 и такая, что:*

1) $V(t,x) \geqslant a_1(|x|)$ *для всех* $(t,x) \in \mathrm{R}^+ \times D_{H_1}$ (*где* $0 < H_1 < H$), $a_1 \in \mathcal{K}$, $V'(t,\varphi) \leqslant 0$ *для каждой функции* $\varphi \in C_{H_1} \cap \Omega_t(V)$;

2) *существует функционал* $U : \mathrm{R}^+ \times C_H \to \mathrm{R}^+$, *ограниченный, равномерно непрерывный на множествах вида* $\mathrm{R}^+ \times K$ *с компактными* $K \subset C_H$ *и такой, что производная* $|V'(t,\varphi)| \geqslant U(t,\varphi) \geqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_{H_1}$;

3) *для каждого* $c_0 > 0$ *и каждой пары* (V^*, U^*) *не существует непрерывного отображения* $u : \mathrm{R} \to C_{H_1} \cap N(t, c_0, V^*)$, *такого что для любого* $\tau \in \mathrm{R}$ *найдется* $\theta \in [\tau - h, \tau]$, *при котором* $u(\theta) \in M(\theta, c_0, V^*) \cap L(\theta, U^*)$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = f(a(t)x(t) - b(t)x(t - r(t))), \tag{6}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ с евклидовой нормой $|x|$, функция $f : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^n$ непрерывна, скалярное произведение $x \cdot f(y) < 0$ для любых $x, y \in \mathrm{R}^n$, таких что $x \cdot y > 0$; $|b(t)| \leqslant a(t)$ для $t \in \mathrm{R}$, $0 \leqslant r(t) \leqslant r$.

Положим $V(x) = |x|^2/2$. В силу неравенства

$$|b(t)(\varphi(0) \cdot \varphi(s))| \leqslant |b(t)||\varphi(0)| \cdot |\varphi(s)|$$

производная

$$V'(t,\varphi) = \varphi(0) \cdot f(a(t)\varphi(0) - b(t)\varphi(-r(t))) \leqslant 0$$

для $|\varphi(s)| \leqslant |\varphi(0)|$, $-r(t) \leqslant s \leqslant 0$, так что решение $x = 0$ уравнения (6) равномерно устойчиво.

Допустим также, что $a(t) \geqslant a_0(t)$, $|b(t)| \leqslant b_0(t)$, где $a_0(t), b_0(t)$ — некоторые ограниченные равномерно непрерывные функции по $t \in \mathrm{R}^+$ такие, что существует последовательность отрезков $I = \{[t_n, t_n + \gamma], \gamma > h\}$, на которых $b_0(t) \leqslant a_0(t) - \varepsilon$. Тогда, используя теорему 13, можно убедиться, что при $t_{n+1} - t_n \leqslant \nu = \text{const}$ и $\nu \geqslant \gamma$ нулевое решение системы (6) равномерно асимптотически устойчиво.

Дальнейшее развитие теоремы об устойчивости получают на основе использования так называемых вырожденных вспомогательных функций. Отличие их от классических функций Ляпунова заключается в том, что они не обязательно положительно определены, а лишь неотрицательны (знакопостоянны). Такое ослабление требований возможно за счет дополнительных требований к свойствам решений уравнения на "множестве вырождения" функции V.

Например, можно использовать следующие определения 8 и 9 из [10].

Определение 8. *Решение $x = 0$ устойчиво относительно предельного уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ и соответствующего множества $M_\infty(t, 0, t_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если*

$$\varphi \in \{\|\varphi\| < \delta\} \cap M_\infty(0, 0, t_n),$$

то решение $x = x(t; 0, \varphi)$ уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ для всех $t \geqslant -r$ удовлетворяет неравенству $|x(t; 0, \varphi)| < \varepsilon$. Решение $x = 0$ равномерно устойчиво относительно предельного семейства $\{f^*, M_\infty(t, 0, t_n)\}$, если число $\delta > 0$ можно выбрать одним и тем же для всех предельных уравнений.

Определение 9. *Нулевое решение асимптотически устойчиво относительно $(f^*, M_\infty(t, 0, t_n))$, если оно устойчиво соответственно определению 8 и при некотором значении $\Delta > 0$ для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что если*

$$\varphi \in \{\|\varphi\| < \Delta\} \cap M_\infty(0, 0, t_n),$$

то решение $x = x(t; 0, \varphi)$ уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ для всех $t \geqslant T$ удовлетворяет неравенству $|x(t; 0, \varphi)| < \varepsilon$. Нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво относительно предельного семейства $\{f^*, M_\infty(t, 0, t_n)\}$, если числа $\Delta > 0$ и $T > 0$ можно выбрать не зависящими от выбора предельного функционала f^*.

На основе введенных определений можно сформулировать утверждения об устойчивости нулевого решения уравнения (1), использующие знакопостоянные функции.

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 14 [10]. *Предположим, что выполняются предположения 2, 3 и существует функция Ляпунова V такая, что:*

1) $V'(t, \varphi) \leqslant 0$ *для всех* $t \in \mathrm{R}^+$ *и* $\varphi \in \Omega_t(V)$;

2) *нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво относительно предельного семейства* $\{f^*, M_\infty(t, 0, t_n)\}$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) *устойчиво. Если при этом* $V(t, x) \leqslant b(|x|)$, $b \in \mathcal{K}$, *то нулевое решение уравнения* (1) *равномерно устойчиво.*

Из теоремы 14 непосредственно следует теорема 15.

Теорема 15. *В условиях теорем 9 и 10 требование "$V(t, x) \geqslant a(|x|)$ для всех $(t, x) \in \mathrm{R}^+ \times G_H$, где $a(u) \in \mathcal{K}$" можно заменить следующим: нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво относительно предельного семейства $\{f^*, M_\infty(t, 0, t_n)\}$.*

Другие утверждения об асимптотической устойчивости в терминах знакопостоянных функций, использующие свойства предельных уравнений, представлены в [75].

Из приведенных результатов можно получить следствия, в которых не используются предельные уравнения и множества. Прежде всего это вполне очевидное утверждение для периодического (в частности, автономного) уравнения.

Теорема 16. Предположим, что для некоторого $T > 0$

$$f(t, \varphi) \equiv f(t + T, \varphi)$$

и существует функция Ляпунова $V : \mathrm{R}^+ \times G_H \to \mathrm{R}^+$*, такая что:*

1) $V(t + T, x) \equiv V(t, x)$;

2) $V'(t, \varphi) \leqslant 0$ *для всех* $t \in \mathrm{R}^+$ *и* $\varphi \in \Omega_t(V)$;

3) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\varphi \in C_H \,:\, V(s, \varphi(s)) \equiv 0,\ s \in [-r, 0]\}$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) *равномерно устойчиво. Если при этом множество* $\left\{\varphi \in C_H : \max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t+s, \varphi(s)) = V(t, \varphi(0)) > 0, V'(t, \varphi) = 0\right\}$ *не содержит решений уравнения* (1)*, то нулевое решение уравнения* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 16 обобщает теорему 5 на случай знакопостоянных V и V', а также развивает упомянутую теорему из [12] для периодических уравнений.

Пусть теперь правая часть уравнения (1) является почти периодической согласно следующему определению.

Определение 10 [76]. *Непрерывный функционал* $f : \mathrm{R} \times C_H \to \mathrm{R}^n$ *называется равномерно почти периодическим по* t*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *и каждого компакта* $K \subset C_H$ *существует число* $p = p(\varepsilon, K) > 0$*, такое что для любого* $a \in \mathrm{R}$ *найдется* $\tau \in [a, a + p]$*, при котором для всех* $t \in \mathrm{R}$ *и всех* $\varphi \in K$ *выполняется неравенство* $|f(t + \tau, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$.

Функционал $f(t, \varphi)$, равномерно почти периодический по t, удовлетворяет предположению 2, и все предельные к нему функционалы также являются равномерно почти периодическими [64]. Кроме того, функционал, удовлетворяющий предположению 3 и почти периодический по t для каждой фиксированной функции $\varphi \in C_H$, является равномерно почти периодическим по t (см. [76, лемма 2]). Далее, для равномерно почти периодического функционала $f(t, \varphi)$ существует предельный функционал $f^*(t, \varphi) \equiv f(t, \varphi)$. Таким образом, из теоремы 15 получаем результат для почти периодического случая, не использующий предельные множества и функции.

Теорема 17 [77]. *Предположим, что функционал* $f(t, \varphi)$ *– равномерно почти периодический по* t *и существует функция Ляпунова* $V : G_H \to \mathrm{R}$ *такая, что:*

1) $V'(t, \varphi) \leqslant 0$ *для всех* (t, φ)*:* $t \in \mathrm{R}^+$, $\varphi \in \Omega(V)$;

2) *нулевое решение уравнения* (1) *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\varphi \in C_H \,:\, V(\varphi(s)) \equiv 0,\ s \in [-r, 0]\}$;

3) *множество* $N = \left\{\varphi \in C_H : \max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) > 0, V'(t, \varphi) = 0\right\}$ *не содержит решений уравнения* (1).

Тогда нулевое решение уравнения (1) *эквиасимптотически устойчиво.*

В случае неавтономного уравнения во многих случаях при проверке условий относительно предельных множеств нет необходимости учитывать зависимость этих множеств от t и от последовательности $t_n \to +\infty$ и можно использовать упрощенные формулировки достаточных условий асимптотической устойчивости. Введем определение 11.

Определение 11 [78]. *Нулевое решение уравнения* (1) *называется равномерно притягивающим относительно множества* $\Lambda \subset C_H$, *если существует* $\Delta > 0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $T = T(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любой начальной точки* $(\alpha, \varphi) \in \mathrm{R}^+ \times [C_\Delta \cap \Lambda]$ *для решения* $x(t; \alpha, \varphi)$ *уравнения* (1) *справедливо неравенство* $|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon$, *как только* $t > \alpha + T$.

Нулевое решение уравнения (1) *называется* (*равномерно*) *асимптотически устойчивым относительно множества* $\Lambda \subset C_H$, *если условия* (*равномерной*) *асимптотической устойчивости* (*определения 1–3*) *выполняются для* $\varphi \in \Lambda$.

Если теперь для каждого действительного числа c и непрерывной функции $V(t, x)$ определить множество $V^{-1}_{\max}(\infty, c) = \Big\{\varphi \in C_H \mid \exists\, \varphi_n \to \varphi,\, t_n \to +\infty :$ $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) = \lim\limits_{n\to\infty} V(t_n, \varphi_n(0)) = c\Big\}$, то можно предложить следующие результаты, использующие знакопостоянную функцию Ляпунова [77].

Теорема 18. *Пусть правая часть уравнения* (1) *удовлетворяет предположению 1 и локальному условию Липшица. Предположим, что существует функция Ляпунова* $V : \mathrm{R}^+ \times G_H \to \mathrm{R}^+$ *такая, что:*

1) $V'(t, \varphi) \leqslant 0$ *для всех* $t \in \mathrm{R}^+$ *и* $\varphi \in \Omega_t(V)$;

2) *нулевое решение является равномерно притягивающим относительно множества* $V^{-1}_{\max}(\infty, 0)$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) *устойчиво. Если дополнительно* $V(t, x) \leqslant b(|x|)$ *для некоторой функции* $b \in \mathcal{K}$, *то нулевое решение уравнения* (1) *равномерно устойчиво.*

Теорема 19. *Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция* $V : \mathrm{R}^+ \times G_H \to \mathrm{R}^+$ *такая, что:*

1) *выполняются условия теоремы 18 и* $V(t, x) \leqslant b(|x|)$ *для некоторой функции* $b \in \mathcal{K}$;

2) $|V'(t, \varphi)| \geqslant U(t, \varphi) \geqslant 0$ *для всех* $(t, \varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_H$, *где* $U(t, \varphi)$ – *функционал, равномерно непрерывный на каждом множестве* $\mathrm{R}^+ \times K$, $K \subset C_H$ – *компакт;*

3) *пересечение множеств* $U^{-1}(\infty, 0) = \Big\{\varphi \in C_H \mid \exists \varphi_n \to \varphi,\ t_n \to +\infty :$ $\lim\limits_{n\to\infty} U(t_n, \varphi_n) = 0\Big\}$ *и* $V^{-1}_{\max}(\infty, c)$ *пусто при* $c > 0$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

На основании последних утверждений можно обосновать эффективные признаки устойчивости и алгоритмы построения стабилизирующих управлений для систем специальной структуры, например каскадных и цепных [79–81].

Замечание 5. Из всех приведенных результатов о, например, равномерной асимптотической устойчивости теоремы 13 и 19 сформулированы для наиболее общего класса неавтономных уравнений. Как соотносятся эти утверждения с другими приведенными результатами при выполнении соответствующих дополнительных условий?

Известно, что если нулевое решение уравнения равномерно асимптотически устойчиво, то это же справедливо и для каждого предельного уравнения (см., например, [10]). Поэтому нетрудно видеть, что в случае предкомпактности правой части уравнения (1) утверждение теоремы 19 является следствием теоремы 15, а в случае автономной или периодической правой части совпадает с теоремой 16. Из теоремы 19 следует, что если в условии 3 теоремы 17 равенство $V'(t,\varphi) = 0$ заменить соотношением $\varphi \in U^{-1}(\infty, 0)$, то получим достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) с равномерно почти периодической по t правой частью (заметим, что в отличие от автономного и периодического случаев асимптотическая устойчивость для такого уравнения не обязана быть равномерной). Наконец, теорема 19 развивает и уточняет результат об асимптотической устойчивости из [63].

Отметим, что теоремы, использующие предельные уравнения, дают более гибкие достаточные условия и могут оказаться более удобными в применении. Следующий пример иллюстрирует такую ситуацию.

Пример 5. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(t)(x_1(t) - 3x_2^2(t)) + f_1(t, x_t)x_2^2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a(t)(x_1(t)x_2(t) + x_2^3(t)) - f_1(t, x_t)x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = f_2(t, x_t) + f_3(t, x_t) - b(t)x_3^3(t), \end{cases} \tag{7}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $a_0 \leqslant a(t) \leqslant a_1 < 0$, $0 < b_0 \leqslant b(t) \leqslant b_1$ – равномерно непрерывны, функционалы $f_i(t, \varphi)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют предположениям 2, 3, $f_2(t, \varphi) \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно на каждом компакте, $f_3(t, \varphi) = 0$ при $\varphi = (0, 0, \varphi_3)$. В качестве функции Ляпунова возьмем знакопостоянную функцию $V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. Ее производная в силу системы (7) равна $V'(t, \varphi) = a(t)(\varphi_1(0) - \varphi_2^2(0))^2$ и тоже является знакопостоянной. Предельные системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a^*(t)(x_1(t) - 3x_2^2(t)) + f_1^*(t, x_t)x_2^2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a^*(t)(x_1(t)x_2(t) + x_2^3(t)) - f_1^*(t, x_t)x_2^2(t), \\ \dot{x}_3(t) = f_3^*(t, x_t) - b^*(t)x_3^3(t), \end{cases} \tag{8}$$

где $a^*(t) = \lim\limits_{t_k \to +\infty} a(t + t_k)$, $b^*(t) = \lim\limits_{t_k \to +\infty} b(t + t_k)$, $f_i^*(t, \varphi) = \lim\limits_{t_k \to +\infty} f_i(t + t_k, \varphi)$, $i = 1, 3$. Множество $L(t, U^*)$ есть $\{\varphi : \varphi_1(0) = \varphi_2^2(0)\}$. Подставляя $x_1(t) = x_2^2(t)$

в систему (8), получаем $\dot{x}_2(t) = -x_2(t)\dot{x}_1(t)$. С другой стороны, $\dot{x}_1(t) = 2x_2(t)\dot{x}_2(t)$. Поэтому $\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t) = 0$. Тогда для $x_1(t) = x_2^2(t)$ из первого уравнения (8) получаем $x_2^2(t) = 0 = x_1(t)$. Поэтому пересечение множеств $M(V^*, c)$ и $L(t, U^*)$ при $c > 0$ не содержит решений предельной системы (8) для любой последовательности $t_k \to +\infty$, определяющей предельные функционалы. На множестве $N = \{\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0\}$ система (8) принимает вид

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = -b^*(t)x_3^3(t). \end{cases}$$

Отсюда следует справедливость условия 2 теоремы 15.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 15 и, значит, нулевое решение системы (7) равномерно асимптотически устойчиво. Заметим, что условие 3 теоремы 19 в данном случае не выполняется, кроме того, без дополнительных предположений относительно функционала $f_2(t, \varphi)$ не очевидно равномерное притяжение точкой $x = 0$ решений системы (7) относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$.

Отметим, что использование метода предельных уравнений возможно не только в случае, когда правая часть удовлетворяет предположениям 2, 3. В частности, используемые при обосновании утверждений об устойчивости свойства решений исходного и предельного уравнений сохраняются при условии, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет более общим условиям типа Каратеодори [81]. В этих условиях допускается, в частности, отсутствие непрерывности правой части по t; при анализе управляемых систем это позволяет, например, рассматривать модели импульсных и цифровых регуляторов [82].

2.4. Задача о неустойчивости

Как известно, теоремы прямого метода позволяют получить достаточные условия не только устойчивости, но и неустойчивости нулевого решения дифференциального уравнения. Первые результаты о неустойчивости для уравнений с запаздыванием, использующие функционалы Ляпунова–Красовского, были опубликованы в [17, 18]. Аналогичные утверждения в терминах функций Ляпунова–Разумихина появились позднее [36, 83, 84]. В статье J. Kato [36] неустойчивость в смысле неограниченного возрастания доказана при условии положительной определенности производной функции V на некотором инвариантном относительно уравнения множестве, зависящем от t, замыкание которого включает нулевую функцию (в предположении, что сама функция принимает положительные значения в любой окрестности нуля). В частности, в качестве такого множества можно взять $\Omega_t(V, \eta)$. В статьях А.В. Прасолова [83, 84] в качестве определения неустойчивости было принято свойство, противоположное равномерной устойчивости, а доказанные теоремы были вполне аналогичны первой и второй теоремам Ляпунова о неустойчивости. Например, в [83, теорема 1] показано, что для неустойчивости нулевого решения достаточно существования функции Ляпунова, принимающей положительные значения в любой сколь угодно малой окрестности нуля, допускающей бесконечно малый высший предел и имеющей положительную на множестве $\Omega_t(V)$ производную. Отметим, что в теореме, аналогичной второй теореме Ляпунова об устойчивости, обоснована не только достаточность, но и необходимость условий, т.е. доказана еще одна “обратная теорема” прямого метода.

В предположении 1 справедливы также следующие теоремы 20 и 21 из [10].

Теорема 20. *Предположим, что:*

1) *существует функция $V \in C^1(\mathrm{R} \times G_H, \mathrm{R})$, $V(t,0) = 0$, принимающая при $t \in [\alpha - h, \alpha]$, $\alpha \in \mathrm{R}^+$, в любой достаточно малой окрестности точки $x = 0$ отрицательные значения, ограниченная снизу для $(t,x) \in \mathrm{R}^+ \times \bar{G}_{H_1}$;*

2) *$V'(t,\varphi) \leqslant -a(|\varphi(0)|)$ для некоторой функции $a \in \mathcal{K}$ и всех $t \in \mathrm{R}^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V,\eta)$ таких, что $V(t,\varphi(0)) < 0$.*

Тогда нулевое решение уравнения (1) неустойчиво.

Теорема 21. *Допустим, что для некоторого $H_1 \in (0,H)$ существует функция $V \in C^1(\mathrm{R} \times G_H, \mathrm{R})$, $V(t,0) = 0$, такая, что:*

1) *$V(t,x)$ ограничена снизу в области $\mathrm{R}^+ \times \bar{G}_{H_1}$, $V(t,x) \geqslant \nu_1 = \nu_1(H_1)$ для всех $(t,x) \in \mathrm{R}^+ \times \bar{G}_{H_1}$, и принимает при $t = \alpha_0 \geqslant 0$ в любой достаточно малой окрестности точки $x = 0$ отрицательные значения;*

2) *производная $V'(t,\varphi) \leqslant m < 0$ на множестве $\{(t,\varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_H : 0 \geqslant \geqslant V(t+s,\varphi(s)) \geqslant V(t,\varphi(0))\}$.*

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1) неустойчиво.

Условие 2 в теореме 21 здесь понимается в смысле следующего определения.

Определение 12. *Будем говорить, что для функции $V \in C(\mathrm{R}^+ \times C_H, \mathrm{R})$ производная $V'(t,\varphi) \leqslant m < 0$ на множестве $M \subset C_H$, если для любого компакта $K \subset C_H$, $t \in \mathrm{R}^+$ и $c < 0$ существует число $m = m(c) < 0$ такое, что $V'(t,\varphi) \leqslant m$ для всех $\varphi \in M \cap K$.*

Замечание 6 [10]. Условие 2 теоремы 21 выполняется, если $V(t,x) \leqslant \leqslant a_1(|x|)$ и $V'(t,\varphi) \leqslant -a_2(|\varphi(0)|)$ для всех $\{(t,\varphi) \in \mathrm{R}^+ \times C_H : 0 \geqslant V(t+s,\varphi(s)) \geqslant \geqslant V(t,\varphi(0))\}$.

Теоремы 20 и 21 дополняют результаты [36, 83, 84].

Дальнейшее развитие результатов о неустойчивости в направлении ослабления условий на производную возможно на основе дополнительных условий относительно предельных множеств, аналогичных тем, которые использовались в теоремах об асимптотической устойчивости подраздела 2.3 [10, 73].

Следует отметить, что исследования условий неустойчивости оказались гораздо менее активными, чем изучение достаточных условий устойчивости. Возможно, это связано с тем, что, как отмечено в [5], “решение, неустойчивое по отношению к произвольным возмущениям начальных условий, может оказаться устойчивым по отношению к реально существующим возмущениям. Значит, критерии неустойчивости имеют относительно меньшую ценность”.

Действительно, неустойчивость есть свойство, противоположное устойчивости, и означает, что в любой малой окрестности рассматриваемого решения существует по крайней мере одна точка, начинаясь в которой, решение покинет заданную окрестность. Но теорема о неустойчивости не дает возможности установить, что это за точка и попадет ли она в множество реально допустимых возмущений. Однако, используя функции Ляпунова, можно сформулировать достаточные условия неустойчивости в более удобном для приложений виде. Например, в [85] сформулированы теоремы о неустойчивости по отношению к некоторому множеству согласно следующему определению (правая часть уравнения (1) предполагается автономной или периодической по времени).

Определение 13. Пусть $D \subset C$, $0 \in \bar{D}$. Нулевое решение называется вполне неустойчивым относительно множества D, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $\delta \in (0, \varepsilon)$ и $\varphi \in C_\delta \cap D$ существует $\alpha_0 \geqslant 0$, решение $x(t; \alpha_0, \varphi)$ уравнения (1) и некоторое $t^* > \alpha_0$ такое, что $|x(t^*; \alpha_0, \varphi)| \geqslant \varepsilon$.

Кандидатами на роль такого множества D оказываются следующие:

$$P_M(V) = \left\{ \varphi \in C : \; V(\varphi(0)) = \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(\varphi(s)) > 0 \right\},$$

$$P_m(V) = \left\{ \varphi \in C : \; V(\varphi(0)) = \min_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(\varphi(s)) > 0 \right\}.$$

Эта идея возникает на базе [28], где доказана теорема для автономных уравнений, в которой функция $V = V(x)$ предполагается положительно определенной, а для ее производной предлагается альтернатива: $V'(\varphi) > 0$ либо для всех $\varphi \in P_M(V)$, либо для всех $\varphi \in P_m(V)$.

Следуя определению 13, авторы [85] получают теорему о неустойчивости относительно множеств $P_M(V)$ и $P_m(V)$ (определяемых вспомогательной функцией V, удовлетворяющей условиям теоремы о неустойчивости) для автономных уравнений, а также теорему о неустойчивости относительно множества $P_M(V)$ для периодических по t уравнений (функция V предполагается не зависящей от времени). Результат с множеством $P_m(V)$ для периодического случая предлагался в [85] в качестве открытой проблемы и был доказан в [86] в качестве следствия из более общего утверждения для неавтономных уравнений, удовлетворяющих условиям предкомпактности. При этом функция V может зависеть от t и определение неустойчивости относительно множества подвергается изменению согласно определению 14.

Определение 14. Пусть $D(t) \subset C$, $0 \in \bar{D}(t)$. Нулевое решение называется вполне неустойчивым относительно множества $D(t)$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $\delta \in (0, \varepsilon)$, $\alpha \in \mathrm{R}^+$ и $\varphi \in C_\delta \cap D(\alpha)$ решение $x(t; t_0, \varphi)$ уравнения (1) удовлетворяет неравенству $|x(t^*; \alpha, \varphi)| \geqslant \varepsilon$ для некоторого $t^* > \alpha$.

Заметим, что для автономного и периодического уравнения $D(t) = D$ с множеством D из определения 13, с той разницей, что в определении 14 начальный момент α может быть произвольным.

Соответствующим изменениям подвергаются и множества, определяемые зависящей от времени функцией V, см. определение 15.

Определение 15. Для функции $V \in C(\mathrm{R}\times C_H, \mathrm{R})$, чисел $t \in \mathrm{R}^+$ и $c \in \mathrm{R}$ определим множества:

$$P_M(V,t,c) = \left\{ \varphi \in C_H: \; V(t,\varphi(0)) = \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t+s,\varphi(s)) = c \right\},$$

$$P_m(V,t,c) = \left\{ \varphi \in C_H: \; V(t,\varphi(0)) = \min_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(\varphi(s)) = c \right\}.$$

На основе определений 14, 15 в [86] доказаны достаточные условия полной неустойчивости относительно множеств $P_m(V,t,c)$ и $P_M(V,t,c)$ (отсюда следует, в частности, решение проблемы, предложенной в [85]). Характерная особенность этих множеств заключается в том, что оба они (каждое в условиях “своей” теоремы) содержат в своем замыкании начало координат, являются положительно инвариантными относительно уравнения (1) и такими, что некоторая функция V не ограничена на содержащихся в них решениях уравнения. Дополнительное условие ограниченности функции V на ограниченных решениях, очевидно, влечет тогда неустойчивость нулевого решения. Таким образом, построение подмножества, обладающего тремя перечисленными свойствами, достаточно для доказательства полной неустойчивости нулевого решения относительно этого подмножества (см. также [36, теорема 7]). Это подмножество может, в частности, совпадать со всем пространством C – тогда речь идет о полной неустойчивости нулевого решения.

Пример 6. Если в примере 5 изменена оценка для $a(t)$: $0 < a_0 \leqslant a(t) \leqslant \leqslant a_1$, то, используя функцию $V(x) = -1/2(x_1^2 + x_2^2)$, нетрудно убедиться, что выполнены все достаточные условия неустойчивости нулевого решения. При этом производная функции Ляпунова положительна на $C \setminus \{0\}$, следовательно, нулевое решение системы (7) вполне неустойчиво.

2.5. Принцип сравнения и условие Разумихина

Значительное количество модификаций классических теорем с условием Разумихина основано на идеях, в той или иной форме представляющих так называемый принцип сравнения. Утверждения, связывающие уравнения сравнения и условие Разумихина, впервые, по-видимому, формулируются в [20, 87] в виде следующей леммы.

Лемма 1. Предположим, что для функции $V \in C^1(\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^+)$ существует функция $W(t,r) \in C(\mathrm{R}^+\times\mathrm{R}^+, \mathrm{R}^+)$ такая, что производная функции V в силу уравнения (1) удовлетворяет для $t \in \mathrm{R}^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$ оценке $V'(t,\varphi) \leqslant W(t, V(t,\varphi(0)))$. Тогда если $V(\alpha,\varphi_0(0)) \leqslant r_0$, то $V(t, x(t;\alpha,\varphi_0)) \leqslant \leqslant r(t)$ для $t \geqslant \alpha$, где $r(t)$ – максимальное решение задачи

$$\dot r(t) = W(t, r(t)), \;\; r(\alpha) = r_0. \tag{9}$$

Из леммы 1 легко получить достаточные условия различных видов устойчивости и других свойств решений уравнения (1): для этого достаточно установить соответствующие свойства решений уравнения сравнения (9).

В [36] на основе теоремы сравнения обоснованы достаточные условия асимптотической и равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения, которые уже обсуждались в подразделе 2.2.

В более общей форме теоремы сравнения представлены в обзоре [88]. В целях единства изложения приведем соответствующий результат для случая непрерывно дифференцируемой функции V, см. теорему 22.

Теорема 22. Пусть $g_0, g \in C(\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+, \mathrm{R})$, $g_0(t,u) \leqslant g(t,u)$ в области определения и $v(t,t^0,u_0)$ — левое максимальное решение задачи Коши $\dot{u} = g_0(t,u)$, $u(t^0) = u_0$, существующее на отрезке $[t_0, t^0]$. Предположим, что существует функция $V(t,x)$ такая, что для некоторых функций $a(u), b(u) \in \mathcal{K}$ ($\eta(u) > u$ при $u > 0$) и всех $t \in \mathrm{R}^+$ выполняются условия:

1) $a(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|x|)$ для $x \in \mathrm{R}^n$,

2) $V'(t,\varphi) \leqslant g(t, V(t,\varphi(0)))$ на множестве $\Omega = \{(t,\varphi) : V(t+s,\varphi(s)) \leqslant v(t+s, t, V(t,\varphi(0))),\ s \in [-r,0]\}$.

Тогда из свойств устойчивости нулевого решения уравнения $\dot{u} = g(t,u)$ с начальным условием $u(t^0) = u_0 \geqslant 0$ следуют соответствующие свойства устойчивости нулевого решения уравнения (1).

Авторами отмечены следующие важные частные случаи теоремы 22: $g_0 = g \equiv 0$ (в этом случае получается теорема 1), $g_0(u) = g(u) = -c(u)$, где $c(u) \in \mathcal{K}$ (в этом случае можно показать, что выполняются условия теоремы 2), и $g_0(u) = g(u) = -cu$ с постоянной $c > 0$ (в этом случае $\Omega = \tilde{\Omega} = \{(t,\varphi) : V(t+s,\varphi(s)) \leqslant V(t,\varphi(0))e^{-cs},\ s \in [-r,0]\}$ и из теоремы 22 получаются условия экспоненциальной устойчивости).

Последний случай представляет отдельный интерес, поскольку позволяет извлечь более конкретную информацию о поведении решений, чем просто утверждение об устойчивости.

В зависимости от специфики рассматриваемой задачи предлагались разные модификации требований к монотонности вспомогательной функции, и упомянутые результаты получили некоторые уточнения и обобщения. Например, в [89] экспоненциальная устойчивость положения равновесия доказана при условии, что $V'(t,x_t) \leqslant -cV(t,x(t))$ для всех $(t,x(t))$, удовлетворяющих $V(t,x(t)) = \max\limits_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t_0+s, x(t_0+s))e^{-c(t-t_0)}$ (заметим, что в этом случае сегмент x_t попадает в множество $\tilde{\Omega}$; здесь $x(t) = x(t;t_0,\varphi_0)$ – решение уравнения (1)). В [90] в качестве оценки для функции Ляпунова фигурирует функция $H(t,t_0)$, $t \geqslant t_0$, причем условие на производную имеет вид $\frac{\partial H}{\partial t}(t,t_0) - V'(t,\varphi) > 0$ и проверяется для таких только функций φ, что $V(t,\varphi(0)) = H(t,t_0)$ и $V(s,\varphi(s)) < H(s,t_0)$ при $s < t$. Легко видеть, что полученное утверждение следует из теоремы 22. Распространение идей [36] на случай неограниченного запаздывания было проведено, например, в [91].

Задача обобщения теорем сравнения на случай системы дифференциальных неравенств, допускающих при этом разрывные функции и системы сравнения, рассмотрена в [92]. При этом ставится более общая по сравнению с исследованием устойчивости цель сведения задачи изучения поведения решений уравнений с запаздыванием к анализу решений ОДУ. Полученные результаты оказываются в общем случае неприменимыми в случае, когда размерность системы сравнения больше двух, даже если эта система линейная и стационарная.

В то же время в [93] обоснована возможность применения вектор-функции Ляпунова вида $V(x) = (V_1(x_1), \ldots, V_m(x_m))$ с квадратичными компонентами для анализа автономной системы вида

$$\dot{x}_i(t) = F_i(x_i(t), x_i(t-\tau(t))) + G_i(t, \tilde{x}_i(t), \tilde{x}_i(t-\tau(t))),$$

где $i = 1, \ldots, m$, $x_i(t) \in \mathrm{R}^{n_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$, $\tilde{x}_i(s) = (x_1(s), \ldots, x_{i-1}(s), x_{i+1}(s), \ldots$ $\ldots, x_m(s))$. При этом предполагается, что каждая скалярная функция $V_i(x_i)$ является "классической" функцией Ляпунова–Разумихина для i-й изолированной подсистемы, а в качестве достаточных условий асимптотической устойчивости для производной функции V предлагается дифференциальное неравенство вида $V' \leqslant AV$ с гурвицевой матрицей A, внедиагональные элементы которой неотрицательны. Это неравенство должно выполняться лишь при условии

$$\sum_{i=1}^{m} V_i(x_i(t+s)) \leqslant \sum_{i=1}^{m} V_i(x_i(t))$$

для $s \in [-r, 0]$.

Несколько иные результаты возникают, если оценивать производную функции Ляпунова как функционал. В этом случае выбор класса функций для оценки может оказаться излишним. Например, в [88] представлен следующий общий результат такого рода (сформулируем его для случая непрерывно дифференцируемой функции V, см. теорему 23).

Теорема 23. *Пусть* $g \in C(\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+ \times C^+, \mathrm{R})$, $g(t, u, \psi)$ *не убывает по* $\psi \in C^+ = \{\psi \in C : \psi(s) \geqslant 0\}$, $g(t, 0, 0) = 0$ *в области определения. Предположим, что существует функция* $V(t, x)$ *такая, что для некоторых функций* $a(u), b(u) \in \mathcal{K}$ $(\eta(u) > u$ *при* $u > 0)$ *и всех* $t \in \mathrm{R}^+$ *выполняются условия*:

1) $a(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$ *для* $x \in \mathrm{R}^n$,

2) $V'(t, \varphi) \leqslant g(t, V(t, \varphi(0)), V(t+s, \varphi(s)))$.

Тогда из свойств устойчивости нулевого решения скалярного дифференциального уравнения с запаздыванием $\dot{u} = g(t, u, u_t)$ *с начальным условием* $u_{t_0} = u_0 \in C^+$ *следуют соответствующие свойства устойчивости нулевого решения уравнения* (1).

Можно заметить, что при проверке условий теорем 22, 23 появляется дополнительная задача установления свойств решений (в частности, свойств устойчивости) уравнения сравнения. Более удобной с этой точки зрения является возможность сведéния задачи к изучению поведения решений ОДУ, что значительно проще.

На основе совместного использования принципа сравнения и метода предельных уравнений удается за счет дополнительных требований к предельным множествам уровня обосновать асимптотическую устойчивость для уравнения (1) при условии простой устойчивости для уравнения сравнения [94].

Ясно, что при обосновании устойчивости нетривиальными являются случаи, когда правая часть уравнения сравнения может быть положительной при положительных значениях состояния. При этом необходимо обеспечить (асимптотическую) устойчивость нулевого решения этого уравнения.

Одна из главных идей, позволяющих совместить эти требования, заключается в использовании интегральных ограничений на параметры исследуемой системы (в том числе на запаздывание). В итоге оказывается, что нулевое решение системы с запаздыванием может быть асимптотически устойчивым и в том случае, когда на некоторых (коротких) промежутках времени система описывается уравнением с неустойчивым нулевым решением, следовательно, "классическая" функция для такой системы существовать не может.

Для примера рассмотрим одну из недавних публикаций [52]: достаточные условия равномерной устойчивости здесь обоснованы для случая

$$V'(t,\varphi) \leqslant \psi(t)V(t,\varphi(0)) \tag{10}$$

(на множестве $\Omega_t(V)$) при условии, что

$$\int\limits_0^\infty \max\{\psi(s),0\}ds < \infty, \tag{11}$$

а для равномерной асимптотической устойчивости от функции $\psi(t)$ дополнительно требуется, чтобы при достаточно больших значениях t была справедлива также оценка $\int_{t_0}^t \max\{-\psi(s),0\}ds \geq \varepsilon(t-t_0)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

В [95] для доказательства асимптотической устойчивости также используется оценка вида (10) на множестве $\Omega_t(V,\eta)$, но при этом функции ψ и η связаны определенным соотношением, а к функции ψ предъявляются другие требования; в частности, условие (11) может не выполняться.

В [96] предлагается следующее обобщение условий на производную функции $V(t,x)$:

$$\frac{d}{dt}V(t,x(t)) \leqslant a(t)V(t,x(t)) + b(t)\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t+s,x(t+s)). \tag{12}$$

При этом производная оценивается для произвольных функций из пространства C. Достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости для уравнения (1) при такой оценке формулируются в виде ограничений на функции $a(t)$ и $b(t)$: $a(t) : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$, $b(t) : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$; для функции $k(t) = \int_0^t(\varepsilon(s)+a(s)+b(s))ds$ выполняется неравенство $|k(t)| \leqslant \beta$ для всех $t \in \mathrm{R}^+$ и некоторого $\beta > 0$; для функции $l(t) = \sup\limits_{s\in[t-r,t]}(k(s)-k(t))$ выполняется неравенство $\sup\limits_{t\in\mathrm{R}^+}\left[(e^{l(t)}-1)b(t)-\varepsilon(t)\right] \leqslant -\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$.

Заметим, что если сумма $a(t)+b(t)$ неположительна для всех $t \in \mathrm{R}^+$, при этом функция $b(t)$ ограничена, то из условия (12) следует стандартное условие Разумихина. Более того, в случае $a(t) \equiv a < 0$, $b(t) \equiv b \geqslant 0$, $b < |a|$ из условия (12) следует экспоненциальная оценка

$$V(t, x(t)) \leqslant \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t_0 + s, x(t_0 + s)) e^{\lambda(t - t_0)},$$

где λ – единственный положительный корень уравнения $\lambda = |a| - be^{\lambda r}$ [14]. Для периодической системы все приведенные условия выполняются для достаточно малых значений запаздывания, если среднее по периоду значение суммы $a(t) + b(t)$ отрицательно: $\int_0^T (a(s) + b(s)) ds < 0$.

В последних двух результатах усматривается явная аналогия с теоремами 22 и 23. Частный вид предлагаемых уравнений сравнения позволяет получить более конкретные требования, обеспечивающие необходимые свойства решений этих уравнений и в то же время не приводящее к "тривиальным" условиям устойчивости для исследуемого уравнения, вытекающим из классических теорем.

В качестве простой иллюстрации этих требований рассмотрим уравнение $\dot{x}(t) = -x(t) + b(t)x(t - r(t))$, где $r(t) \in [0, r]$ для некоторого $r > 0$. Использование условия Разумихина (как в классическом варианте, так и в более общем) приводит для этого уравнения к оценке $|b(t)| < 1$, достаточной для асимптотической устойчивости нулевого решения. При отсутствии ограничений на величину запаздывания эта оценка является в определенном смысле точной: а именно для любого $b(t) = b \geqslant 1$ существует $r > 0$, при котором нулевое решение уравнения не является асимптотически устойчивым.

Рассмотрим, однако, случай кусочно-постоянного периодического коэффициента: $b(t) = \begin{cases} 0, \ t \in [0, c), \\ delta, \ t \in [c, 1), \end{cases}$ где $c \in (0, 1)$, $d > 0$.

Тогда в соответствии с неравенством $|b(t)| < 1$ получаем ограничение $d < 1$. С использованием же результата из [96] можно доказать равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения при условиях

$$1 - d(1 - c) > 0 \quad \text{и} \quad r < -\ln(d(1 - c)).$$

Это означает, что число d может быть достаточно большим при условии, что c и r достаточно малы.

С применением результатов [95] условия асимптотической устойчивости получаются в виде $(1 - c)d < f_1(r)$ и $(1 - c)d^2 < f_2(r)$, где правые части стремятся к нулю при $r \to +\infty$ и к единице при $r \to 0$. Таким образом, при малых запаздываниях результат опять же оказывается лучше, чем полученный на основе классического условия Разумихина.

3. Уравнения с бесконечным запаздыванием

Вслед за развитием подходов прямого метода Ляпунова, возникающих для уравнений с конечным запаздыванием, возникали (часто параллельно и независимо) обобщения этих подходов на случай, когда величина запаздывания не ограничена; аналогии здесь просматриваются довольно явно. Поэтому главная цель раздела – не столько изложить собственно результаты об устойчивости, сколько обозначить суть основных проблем, возникающих при отказе от ограниченности запаздывания. Таких проблем оказалось две: определение подходящего фазового пространства уравнения и определение подходящего обобщения условия Разумихина. Конструктивным решением первой проблемы оказалось использование так называемых пространств с исчезающей памятью, идея которых была заимствована из термодинамики и механики сплошной среды. Этот вопрос заслуживает отдельного обсуждения и ему посвящен подраздел 3.1.

3.1. Допустимые пространства. Исчезающая и равномерно исчезающая память

Пусть B — действительное векторное пространство либо i) непрерывных функций, отображающих $\mathrm{R}^- = (-\infty, 0]$ в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in \mathrm{R}^-$, либо ii) измеримых функций, отображающих R^- в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in \mathrm{R}^-$ и $\varphi(0) = \psi(0)$, и в пространстве B определена норма $|\cdot|_B$ такая, что $(B, |\cdot|_B)$ является сепарабельным банаховым пространством.

Для функции $x \in C((-\infty, A), \mathrm{R}^n)$, $-\infty < A \leqslant +\infty$, определим функцию $x_t : \mathrm{R}^- \to \mathrm{R}^n$ по формуле $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in \mathrm{R}^-$ для каждого $t < A$.

Для произвольного $a > 0$ определим множества $B_a = \{\varphi \in B \,|\, |\varphi|_B < a\}$ и $\bar{B}_a = \{\varphi \in B \,|\, |\varphi|_B \leqslant a\}$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с бесконечным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{13}$$

где $f \in C(\mathrm{R}^+ \times B_H, \mathrm{R}^n)$ для некоторого $0 < H \leqslant \infty$.

Далее будут использоваться следующие предположения для функционала f, аналогичные введенным в разделе 2 для случая конечного запаздывания.

Предположение 5. Для любого $h \in (0, H)$ существует $m = m(h)$ такое, что $|f(t, \varphi)| \leqslant m(h)$ для всех $(t, \varphi) \in \mathrm{R}^+ \times \bar{B}_h$.

Предположение 6. Для каждого числа $q \in (0, H)$ существует неубывающая функция $\mu_q \in C(\mathrm{R}^+, \mathrm{R}^+)$, $\mu_q(0) = 0$, такая, что для любой функции $u \in C([a, b], \bar{B}_q)$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leqslant \mu_q(|t_2 - t_1|).$$

Предположение 7. Функционал $f(t, \varphi)$ ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times K$, где $K \subset B_H$ — компакт, т.е. для любого компакта $K \subset B_H$ существует число $M = M(K) > 0$, и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такие, что для любых

$(t_1, \varphi_1),\ (t_2, \varphi_2) \in \mathrm{R}^+ \times K$ при условиях $|t_1 - t_2| < \delta$, $|\varphi_1 - \varphi_2|_B < \delta$ выполняются неравенства:

$$|f(t, \varphi)| \leqslant M, \quad |f(t_1, \varphi_1) - f(t_2, \varphi_2)| < \varepsilon.$$

Для удобства последующих формулировок сформулируем также предположения относительно фундаментальных свойств уравнения (13).

Предположение 8. Для каждой начальной точки $(\alpha_0, \varphi_0) \in \mathrm{R}^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t; \alpha_0, \varphi_0)$ уравнения (13), определенное для $t \in [\alpha_0, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha_0$, т.е. непрерывное и удовлетворяющее уравнению (13) на $[\alpha_0, \beta)$, и такое, что $x_{\alpha_0} = \varphi_0$, и для любого $\varepsilon \in (0, H)$ и $x(t)$ – непродолжаемого решения (13) на $[\alpha_0, \beta)$ такого, что $x_{\alpha_0} \in B_\varepsilon$ и либо $\beta = +\infty$, либо $|x_{t_1}|_B = \varepsilon$ для некоторого $t_1 \in (\alpha_0, \beta)$. Кроме того, если выполняется условие Липшица, а именно для любых $t \in \mathrm{R}^+$, $\varphi, \psi \in B_a$ и $a \in (0, H)$ справедлива оценка

$$(14) \qquad |f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leqslant l(a)|\varphi_2 - \varphi_1|_B$$

для некоторого $l(a) > 0$, то такое решение единственно и имеет место непрерывная зависимость решения от начальной точки.

Предположение 9. Если $x(t; \alpha_0, \varphi_0)$ – ограниченное решение уравнения (13), определенное для всех $t \geqslant \alpha_0$, то положительная орбита $\{x_t(\alpha_0, \varphi_0) : t \geqslant \alpha_0\}$ предкомпактна в B, и если $x(t_n + s) \to \varphi(s)$ при $n \to \infty$ равномерно по $s \in [-T, 0]$ для любого $T > 0$, то $\varphi \in B$ и $|x_{t_n} - \varphi|_B \to 0$ при $n \to \infty$.

Если выполняются предположения 7, 8, 9, то можно определить семейство предельных уравнений для уравнения с бесконечным запаздыванием, и свойства решений этих уравнений аналогичны тем, которые имеют место для уравнений с конечным запаздыванием и обеспечивают возможность использования предельных уравнений в исследовании поведения решений исходного уравнения [34, 70, 97, 98].

Заметим, что в случае конечного запаздывания предположение 6 гарантирует выполнение предположений 8, 9. Однако в случае бесконечного запаздывания ситуация осложняется и даже более сильное предположение 5 не достаточно для установления фундаментальных свойств уравнения. Анализ публикаций, касающихся таких уравнений, показывает, что форма уравнения и цели исследования определяют выбор пространства B. В случае конечного запаздывания свойства отображения $T(t, \alpha)\varphi :\ \varphi \to x_t(\alpha, \varphi)$ не зависят от такого выбора, если решение определяется естественным образом, т.е. как непрерывное продолжение функции φ вправо от $t = \alpha$, удовлетворяющее уравнению. По прошествии одного интервала запаздывания функция x_t становится непрерывной независимо от пространства начальных функций. Поэтому достаточно рассматривать уравнение в пространстве $C([-r, 0], \mathrm{R}^n)$.

Если же запаздывание бесконечно, то при каждом $t \geqslant \alpha$ функция $x_t(\alpha, \varphi)$ "содержит" часть начальной функции, поскольку $x_t(\theta) = \varphi(t + \theta - \alpha)$ при $\theta \leqslant \alpha - t$. Это значит, что качественное поведение отображения $T(t, \alpha)\varphi$ зависит от начальных данных.

Поэтому важно понять, какие свойства пространства B позволят в первую очередь обеспечить выполнение предположения 8. Кроме того, с точки зрения качественного поведения решений уравнения, в частности устойчивости, необходимо выяснить, какие свойства пространства обеспечивают выполнение предположения 9 и как связаны понятия устойчивости в R^n и в функциональном пространстве B (в случае $B = C([-r,0], \mathrm{R}^n)$ они, очевидно, эквивалентны).

Определение таких свойств в виде "аксиом" – формальных требований к пространству B – оказалось очень удобным и продуктивным подходом. Впервые систематически изложенный в [99], аксиоматический подход стал активно использоваться в последующих исследованиях уравнений с бесконечным запаздыванием, в первую очередь в вопросах асимптотического поведения и устойчивости. При этом конкретный выбор аксиом определяется целями исследования и удобством формулировок и доказательств, поэтому определения пространства B в разных публикациях отличаются. Анализ опубликованных результатов позволяет сформулировать набор аксиом, обеспечивающих желаемые свойства уравнения (13), а именно выполнение предположений 8 и 9 в случае, когда правая часть удовлетворяет предположению 6.

Определение 16. Пространство B назовем допустимым, если существуют постоянные $K, J > 0$ и непрерывная функция $M : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$ такие, что выполняются следующие условия. Пусть $0 \leqslant a < A \leqslant \infty$. Тогда для любой функции $x : (-\infty, A) \to \mathrm{R}^n$, такой, что x непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, и для всех $t \in [a, A)$:

(B1) *$x_t \in B$ и x_t непрерывно по t относительно $|\cdot|_B$;*

(B2) $|x_t|_B \leqslant K \max\limits_{a \leqslant s \leqslant t} |x(s)| + M(t-a)|x_a|_B$;

(B3) $|\varphi(0)| \leqslant J|\varphi|_B$ *для всех $\varphi \in B$;*

(B4) *если $\{\varphi_k\} \subset B$ равномерно ограничена и $\varphi_k \to \varphi$ равномерно на компактах из R^-, то $\varphi \in B$ и $\varphi_k \to \varphi$ в B.*

Условия (B1)–(B3) гарантируют, что для правой части, удовлетворяющей предположению 5, выполняется предположение 8 [99]. Анализ приведенных в [99] доказательств показывает, что они остаются верными и при более слабом условии – в предположении 6.

Определим $B_0 = \{\varphi \in B : \ \varphi(0) = 0\}$ и для $\varphi \in B_0$ оператор $S_0(t)$:

$$[S_0(t)\varphi](s) = \begin{cases} 0, & -t \leqslant s \leqslant 0, \\ \varphi(t+s), & s < -t. \end{cases}$$

Определение 17 [100]. *Допустимое пространство B назовем пространством с исчезающей памятью, если*

$$|S_0(t)\varphi|_B \to 0 \text{ при } t \to +\infty \text{ для любой } \varphi \in B_0.$$

Заметим, что если B – пространство с исчезающей памятью, то функция $M(t)$ в условии (B2) ограничена: $M(t) \leqslant M_1$ для всех $t \in \mathrm{R}^+$ [100]. В этом случае если B – пространство с исчезающей памятью, то из предположения 5 следует предположение 9 ([97], см. также [99, 101]). Нетрудно показать, что предположение 9 следует и из предположения 6.

Помимо пространств с исчезающей памятью, при изучении уравнения (13) используются также пространства с равномерно исчезающей памятью, см. определение 18.

Определение 18 [99–101]. *Допустимое пространство B назовем пространством с равномерно исчезающей памятью, если в* (B2) $M(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Заметим, что поскольку

$$\|S_0(t)\| = \sup_{|\varphi|_B=1,\, \varphi\in B_0} |S_0(t)\varphi|_B \leqslant M(t),$$

то пространство с равномерно исчезающей памятью является пространством с исчезающей памятью, но не наоборот.

Для $\Gamma \subset B$ и $a > 0$ определим множество

$$X(\Gamma, a) = \Big\{x_t;\ t \in \mathrm{R}^+,\ x(\cdot) \in C(\mathrm{R}, \mathrm{R}^n),\ x_0 \in \Gamma,$$
$$|x(t_1)| \leqslant a,\ |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant \mu_a(|t_1 - t_2|) \text{ для } t_1, t_2 \in \mathrm{R}^+\Big\}.$$

В предположении 6 справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. *Если Γ – компакт в допустимом пространстве с исчезающей памятью B, то множество $X(\Gamma, a)$ предкомпактно в B.*

Лемма 3. *Пространство B с исчезающей памятью является пространством с равномерно исчезающей памятью, если и только если для любого ограниченного множества $\Gamma \subset B$ и любого $a > 0$ каждая последовательность $\{(x^k)_{t_k}\}$ из $X(\Gamma, a)$, такая что $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, содержит сходящуюся в B подпоследовательность.*

Эти результаты сформулированы и доказаны в [100] для множества

$$\tilde{X}(\Gamma, a, b) = \Big\{x_t;\ t \in \mathrm{R}^+,\ x(\cdot) \in C(\mathrm{R}, \mathrm{R}^n),\ x_0 \in \Gamma,$$
$$|x(t_1)| \leqslant a,\ |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant b|t_1 - t_2| \text{ для } t_1, t_2 \in \mathrm{R}^+\Big\}.$$

Простейшим примером допустимого пространства является определенное для любого $r > 0$ пространство $C([-r, 0], \mathrm{R}^n)$ с нормой

$$|\varphi|_{C([-r,0])} = \sup_{-r\leqslant s\leqslant 0} |\varphi(s)|.$$

Таким образом, все результаты, полученные для уравнения (13) в допустимом пространстве, справедливы также для уравнения с конечным запаздыванием.

Рассмотрим еще ряд важных классов допустимых пространств (см., например, [30, 70, 99, 101] и др.).

1. Пусть $k : \mathrm{R}^- \to \mathrm{R}^+$ – некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} k(s)\, ds < \infty, \quad k(t+s) \leqslant G(t)k(s) \ \forall t \in \mathrm{R}^-, s \in \mathrm{R}^- \setminus N_t$$

для некоторой функции $G : \mathrm{R}^- \to \mathrm{R}^+$ и некоторого множества $N_t \subset \mathrm{R}^-$ меры ноль.

Положим

$$M^r_{k,p} = \Big\{\varphi : \mathrm{R}^- \to \mathrm{R}^n,\ \varphi \text{ – измерима на } (-\infty, -r] \\ \text{ и непрерывнана } [-r, 0],\ |\varphi|_{M^r_{k,p}} < \infty\Big\},$$

где

$$|\varphi|_{M^r_{k,p}} = \left\{ \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} |\varphi(s)|^p + \int\limits_{-\infty}^{0} k(s)|\varphi(s)|^p\, ds \right\}^{1/p}, \quad r \geqslant 0, \quad p \geqslant 1 \text{ – целое.}$$

Тогда $M^r_{k,p}$ – допустимое пространство. Если при этом

$$\operatorname*{ess.sup}_{s\in\mathrm{R}^-} G(s) < \infty,$$

то $M^r_{k,p}$ – пространство с исчезающей памятью, а если $G(-\beta) < 1$ для некоторого $\beta > r$, то – с равномерно исчезающей памятью.

Заметим, что при использовании в конкретных примерах это пространство, как правило, рассматривается с функцией $k(s) = e^{\gamma s}$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ (см., например, [102]).

2. Пусть

(g1) $\quad g : \mathrm{R}^- \to [1, \infty)$ — непрерывная невозрастающая функция, $g(0) = 1$.

Обозначим через C_g пространство непрерывных функций φ, отображающих R^- в R^n, таких, что $\sup\limits_{s\leqslant 0} |\varphi(s)|/g(s) < \infty$. Тогда C_g с нормой

$$|\varphi|_g = |\varphi|_{C_g} = \sup_{s\leqslant 0} |\varphi(s)|/g(s)$$

есть банахово пространство.

Определим условия для функции g:

(g2) $$[g(s+u)/g(s)] \to 1 \text{ равномерно на } \mathrm{R}^- \text{ при } u \to 0-,$$

(g3) $$g(s) \to \infty \text{ при } s \to -\infty,$$

(g4) $$\lim_{T\to\infty} G(T) = \lim_{T\to\infty} \sup_{s\leqslant -T} [g(T+s)/g(s)] = 0.$$

Рассмотрим следующие подпространства в C_g:

$$C_g^0 = \left\{ \varphi \in C_g : \lim_{s\to-\infty} |\varphi(s)|/g(s) = 0 \right\},$$
$$UC_g = \{\varphi \in C_g : \varphi/g \text{ – равномерно непрерывна на } \mathrm{R}^-\}.$$

Пространство C_g^0 является допустимым с исчезающей памятью при условиях (g1) и (g3) [31, 100], при этом условие (g4) необходимо и достаточно, чтобы память была равномерно исчезающей. Пространство UC_g является пространством с равномерно исчезающей памятью при условиях (g1), (g2) и (g4). Заметим, что условие (g4) эквивалентно существованию представления вида $g(s) = e^{h(s)}$, где равномерно непрерывная функция $h : \mathrm{R}^- \to \mathrm{R}^+$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} \inf_{(t,s):t\geqslant n,\, s\leqslant -n}[h(s) - h(t+s)] = \infty$ [101].

Пространство C_g естественным образом возникает в интегро-дифференциальных уравнениях с неограниченным запаздыванием (в [103] предложен алгоритм построения функций g для уравнений различного вида, правая часть которых содержит интегралы). Переход к допустимому пространству с исчезающей памятью можно осуществить, выбирая подходящим образом еще одну функцию g_1, удовлетворяющую условиям (g1)–(g3), и полагая $g^* = gg_1$. В этом случае C_g можно рассматривать как подпространство $C_{g^*}^0$.

Как и для первого класса допустимых пространств, чаще всего в качестве функции g используется $e^{-\gamma s}$ для некоторого $\gamma > 0$ (см., например, [40]).

Заметим, что для функции $g(s) = 1 - s$, удовлетворяющей условиям (g1)–(g3), пространство UC_g удовлетворяет условиям (B1)–(B4), но не является пространством с исчезающей памятью [101]. Если в этом пространстве рассмотреть простейшее уравнение $\dot{x}(t) = -x(t)$, то положительная орбита его ограниченного на R^+ решения не является предкомпактной в пространстве UC_g. Таким образом, предположение исчезающей памяти существенно для утверждения леммы 2.

3.2. Функции Ляпунова и устойчивость нулевого решения

Предположим, что $f(t,0)\equiv 0$, тогда уравнение (13) имеет нулевое решение, которое и будем исследовать на устойчивость. При этом будем считать, что нулевое решение единственно.

Аксиоматический подход к определению фазового пространства позволяет определить условия, при которых для (13) возможно построение предельных уравнений со свойствами, аналогичными полученным для ОДУ и уравнений с конечным запаздыванием.

Если запаздывание ограничено, то определения устойчивости по отношению к нормам в R^n и в фазовом пространстве, очевидно, эквивалентны. В случае неограниченного запаздывания это в общем случае не так. Например, если выбрать пространство C_0 в качестве фазового, то ненулевое решение никогда не стремится к нулю по отношению к норме этого пространства, т.е.

$$|x_t|_{C_0} = \sup_{s\leqslant 0} |x(t+s)| \not\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

В то же время если $|x(t)|\to 0$, то

$$\sup_{s\leqslant 0} |x(t+s)|e^{\gamma s} \to 0 \quad \text{для любого} \quad \gamma>0.$$

Поэтому в определениях устойчивости нулевого решения для уравнения (13) в общем случае требуется уточнение, в каком пространстве задаются содержащие решения окрестности нуля.

Однако в рассматриваемом случае ситуация упрощается благодаря справедливости следующего результата [21, 99].

Л е м м а 4. *Для допустимого пространства B с исчезающей памятью определения (равномерной) устойчивости и асимптотической устойчивости в B и в R^n эквивалентны. Для допустимого пространства B с равномерно исчезающей памятью определения равномерной асимптотической устойчивости в B и в R^n эквивалентны.*

Более того, в [100] доказано, что второе утверждение леммы 4 устанавливает не только достаточное, но и необходимое условие.

Пусть теперь $V=V(t,x)$ есть функция Ляпунова, где, как и ранее, $V\in C^1(\mathrm{R}\times G_H, \mathrm{R}^+)$ и $V(t,0)=0$. Производная V в силу уравнения (13) есть функционал $V' : \mathrm{R}^+\times B_H \to \mathrm{R}$:

$$V'(t,\varphi) = \partial V(t,\varphi(0))/\partial t + \sum_{i=1}^{n} (\partial V(t,\varphi(0))/\partial x_i) f_i(t,\varphi).$$

Первые результаты об устойчивости и асимптотической устойчивости для уравнений с неограниченным запаздыванием, использующие функции Ляпунова, появились в 1962 г. [20]. В [20] правая часть уравнения предполагалась зависящей от значений $x(g(t))$, где $-\infty\leqslant\alpha\leqslant g(t)\leqslant t$, и в каждый момент времени t определенной в пространстве ограниченных функций из $C([\alpha,t],\mathrm{R}^n)$ с супремум-нормой (в случае $\alpha=-\infty$ полагается $[\alpha,t]=(-\infty,t]$). В этом случае оценка $V'(t,\psi(\cdot))\leqslant w(t,V(t,\psi(t)))$ для функций $\psi\in C([\alpha,t],G_H)$, удовлетворяющих неравенству $V(s,\psi(s))\leqslant V(t,\psi(t))$ при всех $s\in[\alpha,t]$, гарантирует устойчивость нулевого решения уравнения с запаздыванием в R^n при условии устойчивости нулевого решения уравнения $\dot y = w(t,y)$. В аналогичной теореме об асимптотической устойчивости предлагается проверять отрицательную определенность производной функции V на множестве, определяемом традиционным неравенством $V(s,\psi(s))<\eta(V(t,\psi(t)))$, где $\eta\in\mathcal{K}$ и $\eta(u)>u$ для $u>0$, однако интервал значений s меняется на $[g(t), t]$, и требуется дополнительно, чтобы $g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Если же требуется доказать равномерную асимптотическую устойчивость, то множество, на котором оценивается производная, еще больше расширяется: неравенство $V(s, \psi(s)) < \eta(V(t, \psi(t)))$ должно выполняться лишь для $s \in [t-h, t]$ для некоторой постоянной $h \geqslant 0$. Разумность таких требований наглядно подтверждается следующим примером.

Пример 7. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(g(t))$$

с постоянными a и b, удовлетворяющими условию $a > |b| > 0$, и $\alpha \leqslant g(t) \leqslant t$. Если $g(t) = t - r$, то нулевое решение этого уравнения равномерно асимптотически устойчиво [20]. Если функция $g(t)$ ограничена, $\alpha \leqslant g(t) \leqslant T$, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически. Действительно, возьмем произвольное $t_0 > T$ и положим $\psi(t) \equiv \delta > 0$ для $t \in [\alpha, t_0]$. Тогда $\dot{x}(t) = -ax(t) - b\delta$ для $t \geqslant t_0$, откуда $x(t) = -b\delta/a + \delta(1 + b/a)e^{a(t_0 - t)}$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = b\delta/a \neq 0$. Если же $g(t) = t/2$, то, используя изложенное выше утверждение из [20] и простейшую функцию $V(x) = x^2$, получаем асимптотическую устойчивость. Однако она не будет равномерной [32]: если для произвольных $\delta > 0$ и $T > 0$ выбрать $\varepsilon_0 = \delta|b|/2a$, $t_0 = T$, $\psi(t) = \delta/2$ для $t \in [0, t_0]$ и $t_1 = t_0 + T$, то решение уравнения удовлетворяет соотношениям

$$x(t_1) = x(t_0)e^{-a(t_1 - t_0)} + be^{-at_1} \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{as} x(s/2) ds =$$

$$= (\delta/2)(1 - b/a)e^{-aT} + \delta b/(2a) \geqslant \delta b/(2a) = \varepsilon_0.$$

Таким образом, нулевое решение не является равномерно притягивающим.

Некоторое уточнение формулировки из [20] получили в [32]. В частности, знак производной в [32] предлагается проверять не с начального момента t_0, а лишь при $t \geqslant t_0 + T$ (справедливость такой замены следует из непрерывной зависимости решения от начальной функции), а в оценке производной отрицательно определенная функция координаты допускает умножение на неотрицательную функцию времени с расходящимся интегралом. Такое ослабление условий позволяет упростить доказательство асимптотической устойчивости в конкретных примерах.

Неправомерность "естественного" обобщения теоремы 2 на уравнения с неограниченным и бесконечным запаздыванием была отмечена позднее и в [104, 105]: знакоопределенность производной на множестве функций, определяемом неравенством $V(s, \psi(s)) < \eta(V(t, \psi(t)))$, $s \in [\alpha, t]$ ($\eta \in \mathcal{K}$ и $\eta(u) > u$ для $u > 0$), не гарантирует асимптотическую устойчивость.

Пример 8 [105]. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + x(0).$$

Нетрудно убедиться, что функция $x(t) = (1 + e^{-2t})\frac{x(0)}{2}$ является решением этого уравнения для всех $t \geqslant 0$, поэтому нулевое решение не является асимптотически устойчивым; при этом производная функции $V(x) = \frac{x^2}{2}$

в силу уравнения является отрицательно определенной и при условии $\sup\limits_{s\leqslant 0} V(\varphi(s)) \leqslant V(\varphi(0))$, и в случае $\sup\limits_{s\leqslant 0} V(\varphi(s)) < qV(\varphi(0))$ при $q > 1$.

Отметим, что условия устойчивости, полученные в [105] для уравнений с неограниченным запаздыванием типа Вольтерра, а затем и равномерной устойчивости [106] (в последнем случае $\alpha = -\infty$) являются непосредственным обобщением теоремы 1, т.е. множество оценки производной изменяется на $\{\varphi \in C([\alpha, t], \mathrm{R}^n) : V(s, \varphi(s)) \leqslant V(t, \varphi(0)),\ \alpha \leqslant s \leqslant t\}$. А в аналогичной теореме об асимптотической устойчивости условия для производной имеют уже другой вид [104]:

$$\begin{gathered}\text{существует функция } f \in \mathcal{K}:\ f(u) > u \text{ при } u > 0\\ \text{и для каждого решения } x(t) \text{ уравнения (13)}\\ \text{существуют число } r > 0 \text{ и функция } c \in \mathcal{K} \text{ такие,}\\ \text{что если } V(s, x(s)) < f(V(t, x(t))) \text{ для всех } s \in [t_0, t],\ t_0 = \max\{0, t - r\},\\ \text{то } V'(t, x_t) \leqslant -c(|x(t)|).\end{gathered} \tag{15}$$

J. Teréki [38] в предположении 8 получил результат о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (13), использующий несколько другое множество для оценки производной, см. теорему 24.

Т е о р е м а 24. *Предположим, что существует функция V, функции $a, b, c \in \mathcal{K}$ и непрерывная функция $f : \mathrm{R}^- \times \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$ такие, что:*

1) *$f(s, v) < v$ для $v > 0$, $\lim\limits_{s\to-\infty}\sup\{f(s, v) : v \leqslant r\} = 0$, $f(s, v)$ не убывает по s при фиксированном v и $f(0, v)$ не убывает;*

2) *$a(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$ для $t \in \mathrm{R}$ и $x \in \mathrm{R}^n$;*

3) *$V'(t, \varphi) \leqslant -c(|\varphi(0)|)$ на множестве $\big\{(t, \varphi) : f\big(s, V(t + s, \varphi(s))\big) < V(t, \varphi(0)), s \leqslant 0\big\}$.*

Тогда нулевое решение уравнения (13) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Еще один возможный вариант предлагается в [107]: правая часть исходного уравнения представляется в виде суммы функционала, зависящего от $x(t + s)$, $s \in [-r, 0]$ (слагаемое с конечным запаздыванием), и “остатка”, который рассматривается как возмущение. На основании теорем о равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости при постоянно действующих возмущениях для уравнений с конечным запаздыванием, которые доказаны в [107] с использованием вспомогательных функций, получены результаты для уравнений с бесконечным запаздыванием.

Идея использования особенностей пространства при определении множества для оценки производной появляется в [40], где функции Ляпунова используются для доказательства сходимости решений уравнения с бесконечным запаздыванием к конечному пределу. В качестве фазового пространства выбирается C_g с функцией $g(s) = e^{-\gamma s}$, $\gamma > 0$, и для оценки производной предлагается множество $\left\{\varphi \in C_g : \sup\limits_{s\leqslant 0} e^{\gamma s} V(t + s, \varphi(s)) = V(t, \varphi(0))\right\}$.

То же самое пространство используется в [108] для исследования автономного уравнения, при этом свойства $V(x)$ определяются иначе, см. определение 19.

Определение 19. Функция $V \in C^1(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^+)$ называется функцией Ляпунова, связанной с функциями $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$, если $\sup\limits_{s\in\mathrm{R}^-} p(s)V(\varphi(s)) < \infty$ для любого $\varphi \in C_\gamma$ и $p(s+t) \leqslant p(s)q(t)$ для всех $t, s, \in \mathrm{R}^-$, где функции $p, q \in C^1(\mathrm{R}^-, \mathrm{R}^+)$ удовлетворяют условиям $p(0) = q(0) = 1$, $p'(t) \geqslant 0$, $q'(t) \geqslant 0$, $p(t)$ и $q(t)$ стремятся к нулю при $t \to -\infty$.

Оформление этой идеи на случай произвольного допустимого пространства с исчезающей памятью впервые встречается в статье [30] в виде понятия пары Ляпунова–Разумихина, состоящей из функции и вспомогательного функционала. В [30] и уравнение, и функция и функционал, образующие пару, предполагаются автономными.

Пусть $V \in C^1(G_H, \mathrm{R}^+)$ есть функция Ляпунова, $W \in C(B_H, \mathrm{R}^+)$.

Определение 20. Пара (V, W) называется парой Ляпунова–Разумихина, если $V(x) \geqslant 0$, $V(0) = 0$, $W(0) = 0$, и для каждого $\rho > 0$ и $\varphi \in B_H$ такой, что $\varphi_{-\rho} \in B_H$ и φ непрерывна на $[-\rho, 0]$, выполняются условия

$$V(\varphi(0)) \leqslant W(\varphi) \leqslant \max\left\{ \max_{-\rho\leqslant s\leqslant 0} V(\varphi(s)), W(\varphi_{-\rho}) \right\},$$
$$\textit{если } 0 < V(\varphi(0)) = W(\varphi), \textit{ то } V'(\varphi) \leqslant 0.$$

В [30] доказан принцип инвариантности, а именно: положительное предельное множество решения $x(t)$ в случае предкомпактности состоит из решений уравнения, содержащихся в множестве $\{\varphi : W(\varphi) = c\}$. Там же доказано утверждение об асимптотической устойчивости, см. теорему 25.

Теорема 25. Предположим, что $f = f(\varphi)$ и существует пара Ляпунова–Разумихина (V, W) с положительно определенной функцией $V(x)$, такая что:

1) $V'(\varphi) < 0$ для функций $\varphi \in UC_1$, удовлетворяющих условию $0 < V(\varphi(0)) = W(\varphi)$;

2) $W(\varphi) \leqslant \sup_{s\leqslant 0} V(\varphi(s))$ для функций $\varphi \in UC_1$;

3) множество $\{x_t(\varphi) : t \geqslant 0\}$ предкомпактно для всех $\varphi \in B_\delta$ для некоторого $\delta > 0$.

Тогда нулевое решение уравнения $\dot{x}(t) = f(x_t)$ асимптотически устойчиво.

Как и в случае конечного запаздывания, метод функций Ляпунова получил дальнейшее развитие на основе использования предельных уравнений и предельных множеств. В частности, соответствующие результаты были получены для уравнения (13), правая часть которого определена на $\mathrm{R}^+ \times B_H$, где B – допустимое пространство с исчезающей памятью (не обязательно равномерно исчезающей), и удовлетворяет предположениям 6 и 7.

Для неавтономного уравнения (13) естественно использовать следующее обобщение определения 20 на случай зависящих от времени функции и функционала.

О п р е д е л е н и е 21 [98]. *Пусть* $V \in C^1(\mathrm{R} \times G_H, \mathrm{R}^+)$, $V(t,0) = 0$, $W \in$ $\in C(\mathrm{R}^+ \times B_H, \mathrm{R}^+)$. *Пара* (V, W) *называется парой Ляпунова–Разумихина, если* $V(t,x) \geqslant 0$, $V(t,0) = 0$, $W(t,0) = 0$ *для всех* $t \in \mathrm{R}^+$, *и для каждого* $\rho > 0$, $t \geqslant \rho$ *и* $\varphi \in B_H$ *такой, что* $\varphi_{-\rho} \in B_H$ *и* φ *непрерывна на* $[-\rho, 0]$, *выполняются условия*

$$\text{(LR1)} \qquad V(t,\varphi(0)) \leqslant W(t,\varphi) \leqslant \max\left\{ \max_{-\rho \leqslant s \leqslant 0} V(t+s,\varphi(s)), W(t-\rho,\varphi_{-\rho}) \right\},$$

$$\text{(LR2)} \qquad \textit{если } 0 < V(t,\varphi(0)) = W(t,\varphi), \ \textit{ то } V'(t,\varphi) \leqslant 0.$$

Обратим внимание, что функционалы

$$W(t,\varphi) = \sup_{s \leqslant 0} e^{\gamma s} V(t+s,\varphi(s)) = V(t,\varphi(0))$$

из [40] и

$$W(\varphi) = \sup_{s \in \mathrm{R}^-} p(s) V(\varphi(s))$$

из [108] вместе с соответствующей функцией образуют пару, удовлетворяющую условию (LR1). Интересно, что в [108] в теореме об асимптотической устойчивости условия положительной определенности, существования бесконечно малого высшего предела и отрицательности производной (на множестве из условия (LR2)) накладываются не на функцию V, а на функционал W.

Положим теперь для r и t_0 из условия (15)

$$W(t,x_t) = \max_{t_0 - t \leqslant s \leqslant 0} V(t+s, x(t+s)).$$

Тогда V и W удовлетворяют условию (LR1). Наконец, пусть

$$W(t,\varphi) = \max\left\{ V(t,\varphi(0)), \sup_{s \leqslant 0} f\big(s, V(t+s,\varphi(s))\big) \right\},$$

где функция f удовлетворяет условиям теоремы 24. Тогда в условиях этой теоремы получаем пару Ляпунова–Разумихина.

Приведем еще достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости в R^n нулевого решения из [109] для многомерной системы с бесконечным или неограниченным запаздыванием в терминах векторной функции (для простоты доказательства рассмотрен случай двух функций, зависящих соответственно от $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, где $(x^{(1)}, x^{(2)}) = x$, $x^{(i)} \in \mathrm{R}^{n_i}$, $n_1 + n_2 = n$).

Т е о р е м а 26. Предположим, что существуют непрерывные функции Ляпунова $V_i : [\alpha, +\infty) \times \{x^{(i)} \in \mathrm{R}^{n_i} : |x^{(i)}| < H\} \to \mathrm{R}^+$ $(i = 1, 2)$ *такие, что*:

1) $a_i(|x^{(i)}|) \leqslant V_i(t, x^{(i)}) \leqslant b(|x^{(i)}|)$ *для некоторых функций* $a_i, b_i \in \mathcal{K}$, $i =$ $= 1, 2$;

2) *если* $V_1(t,x^{(1)}(t)) \geqslant V_2(t,x^{(2)}(t))$, *то* $V_1'(t,x_t^{(1)}) \leqslant -c_1(|x^{(1)}|)$ *при условии, что для некоторых непрерывных функций* $\eta_1 : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$: $\eta_1(s) > s$ *при* $s > 0$ *и* $q_1(s) : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ – *невозрастающей, справедливо неравенство*

$$\max_{\max\{\alpha, t-q_1(V_1(t,x^{(1)}(t)))\}\leqslant s\leqslant t} V_1\left(s, x^{(1)}(s)\right) < \eta_1\left(V_1\left(t, x^{(1)}(t)\right)\right);$$

если $V_1(t,x^{(1)}(t)) \leqslant V_2(t,x^{(2)}(t))$, *то* $V_2'(t,x_t^{(2)}) \leqslant -c_1(|x^{(2)}|)$ *при условии, что для некоторых непрерывных функций* $\eta_2 : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$: $\eta_2(s) > s$ *при* $s > 0$ *и* $q_2(s) : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ – *невозрастающей, справедливо неравенство*

$$\max_{\max\{\alpha, t-q_2(V_2(t,x^{(2)}(t)))\}\leqslant s\leqslant t} V_2\left(s, x^{(2)}(s)\right) < \eta_2\left(V_2\left(t, x^{(2)}(t)\right)\right)$$

(*здесь* $\alpha \geqslant -\infty$ *такое, что правая часть уравнения* (13) *в момент* $t \geqslant \alpha$ *зависит от значений* $x(s)$ *при* $\alpha \leqslant s \leqslant t$, $(x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)) = x(t)$ – *решение уравнения* (13)).

Тогда нулевое решение уравнения (13) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Если определить

$$V(t,x) = \max_{i\in\{1,2\}} V_i(t,x_i),$$

$$W(t,\varphi) = \max\left\{\max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t+s,\varphi(s)), \sup_{s\leqslant 0} V(t+s,\varphi(s)/g(s))\right\}$$

с функцией $g(s)$, удовлетворяющей условиям (g1)–(g3), то в условиях теоремы 26 пара (V,W) является парой Ляпунова–Разумихина (теорема при этом следует из результата о равномерной асимптотической устойчивости из [110]).

Отметим, наконец, что в случае ограниченного запаздывания $0 < r < \infty$ можем положить $W_r(t,\varphi) = \sup\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t+s,\varphi(s))$, для этого функционала условие (LR1) выполняется всегда, а (LR2) представляет собой ограничение типа условия Разумихина относительно производной $V'(t,\varphi)$, обеспечивающее устойчивость нулевого решения [9]. Таким образом, можно сказать, что использование пары V, W является естественным и довольно гибким обобщением метода функций на случай неограниченного запаздывания. С другой стороны, это обобщение нетривиально, поскольку функционал $W_\infty(t,\varphi)$, как было показано выше, не может быть использован для обоснования асимптотической устойчивости, даже если в условии (LR2) производная V' отрицательно определена (см. пример 8). Результаты, приведенные выше, показывают, что конструкция функционала W зависит и от вида уравнения и выбранного фазового пространства. Выбор конструкции функционала, в свою очередь, определяет способ преобразования условия Разумихина в достаточных условиях (асимптотической) устойчивости.

Большинство известных достаточных условий асимптотической устойчивости в терминах функций Ляпунова предполагают не только знакоопределенность функции, но и знакоопределенность (на некотором подмножестве фазового пространства) ее производной.

Аналогично случаю ограниченного запаздывания при выполнении дополнительных предположений о предкомпактности обосновываются результаты о локализации положительного предельного множества ограниченного решения уравнения (13), использующие неавтономную пару Ляпунова–Разумихина [98].

А именно, как и в разделе 2, предположим, что функция $V(t,x)$ равномерно непрерывна и ограничена на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times \bar{G}_r$, $\bar{G}_r = \{x \in \mathrm{R}^n : |x| \leqslant r < H\}$, а функционалы $W(t,\varphi)$ и $U(t,\varphi) \leqslant |V'(t,\varphi)|$ равномерно непрерывны на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times K$, $K \subset B_H$ — компакт.

Тогда семейство сдвигов $\{V_\tau(t,x) = V(\tau+t,x) \,|\, \tau \in \mathrm{R}^+\}$ предкомпактно в пространстве $C(\mathrm{R}^+ \times G_H, \mathrm{R}^+)$ с компактно-открытой топологией, а семейства $\{U_\tau(t,\varphi) = U(\tau+t,\varphi) \,|\, \tau \in \mathrm{R}^+\}$ и $\{W_\tau(t,\varphi) = W(\tau+t,\varphi) \,|\, \tau \in \mathrm{R}^+\}$ предкомпактны в пространстве $C(\mathrm{R}^+ \times B_H, \mathrm{R}^+)$, и можно определить предельные V^*, W^* и U^*.

Пусть, кроме того, для каждой пары (V^*, W^*) выполняется также следующее предположение [30, 98].

Предположение 10. Для любого $c > 0$ существует $T = T(c) > 0$ такое, что для каждой равномерно непрерывной функции $\varphi \in B_H$ и каждого числа $t \in \mathrm{R}$, таких, что $\sup\limits_{s \leqslant 0} V^*(t+s,\varphi(s)) \leqslant W^*(t,\varphi) = c$, выполняется условие $W^*(t,\varphi) = \max\limits_{-T \leqslant s \leqslant 0} V^*(t+s,\varphi(s))$.

Для каждой последовательности $t_k \to +\infty$ и каждого числа $c \in \mathrm{R}^+$ определим множества:

$$N(t,c,V^*) = \left\{\varphi \in B_H \,|\, \max_{-T(c) \leqslant s \leqslant 0} V^*(t+s,\varphi(s)) = c\right\},$$

$$M(t,c,V^*) = \left\{\varphi \in B_H \,|\, \max_{-T(c) \leqslant s \leqslant 0} V^*(t+s,\varphi(s)) = V^*(t,\varphi(0)) = c\right\},$$

$$L(t,U^*) = \{\varphi \in B_H \,|\, U^*(t,\varphi) = 0\}.$$

Справедлива следующая теорема [98].

Теорема 27. *Предположим, что для уравнения* (13) *существует пара Ляпунова–Разумихина* (V,W) *такая, что* $|V'(t,\varphi)| \geqslant U(t,\varphi)$ *для всех* $(t,\varphi) \in \mathrm{R}^+ \times B_H$ *и выполняются предположения 5, 10, а также условия предкомпактности. Если решение* $x(t;\alpha,\varphi)$ *уравнения* (13) *определено и ограничено при всех* $t \geqslant \alpha$, *то существует* $\lim\limits_{t \to +\infty} W(t, x_t(\alpha,\varphi)) = c_0 = \mathrm{const}$, *при этом для любой* $\psi \in \omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ *существуют предельные* f^*, V^*, W^*, U^* *и решение* $x^*(t;0,\psi)$ *предельного уравнения* $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$ *такие, что* $x_t^* \in \omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$, $x_t^* \in N(t,c_0,V^*)$ *для всех* $t \in \mathrm{R}$, *и если* $x_t^* \in M(t,c_0,V^*)$, *то* $x_t^* \in L(t,U^*)$.

Следствиями теоремы 27 являются принцип инвариантности для автономного уравнения из [30] и аналогичный результат для неавтономного уравнения из [34], где используется определение 20.

Полученный результат аналогичен соответствующей теореме для уравнений с конечным запаздыванием [73] и позволяет получить достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (13) в виде ограничений на функцию V и функционал W, ослабленных по сравнению с традиционными для прямого метода; в частности, асимптотическую устойчивость удается обосновать, отказавшись от условия знакоопределенности для производной, а затем и для самой функции V; соответствующие утверждения и их сопоставление с другими результатами приведены в [98, 110].

При этом если исключить из формулировок теорем и определений предельных множеств уровня предельные уравнения и их решения, то эти теоремы применимы к уравнению (13), правая часть которого удовлетворяет предположению 6, но не обязательно удовлетворяет предположению 7.

Частный случай уравнения (13) – уравнение с неограниченным на R^+, но конечным в каждый момент времени переменным запаздыванием $r(t)$. Некоторые особенности, которые следует учитывать при анализе таких уравнений с применением пары Ляпунова–Разумихина, обсуждаются в [111].

Рассмотрим пример, иллюстрирующий возможности модифицированных требований к функции и ее производной в силу уравнения.

Пример 9. Пусть в системе двух уравнений

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) = {} & a_1(t)x_1(t) + f(t, x_1(t), x_2(t), x_1(t-r), x_2(t-r)) + \\
& + b(t)x_1(t-r) + \int\limits_{-\infty}^{0} K_1(t,s)x_1(t+s)ds + \\
& + g_1(t)(c_{11}x_1(t-r) + c_{12}x_2(t-r)), \\
\dot{x}_2(t) = {} & a_2(t)x_2(t) - x_2(t) \int\limits_{-\infty}^{0} K_3(t,s)x_2^2(t+s)ds + \\
& + \int\limits_{-\infty}^{0} K_2(t,s)x_2(t+s)ds + g_2(t)(c_{21}x_1(t-r) + c_{22}x_2(t-r))
\end{aligned}
\right. \tag{16}
$$

функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b(t)$ и $K_i(t,s)$ определены для всех $t \geqslant 0$ и $s \leqslant 0$, равномерно непрерывны по t и ограничены, $f(t, y_1, y_2, y_3, y_4)$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $\mathrm{R}^+ \times \{y \in \mathrm{R}^4 : |y| \leqslant q < \infty\}$, $f(t, y_1, 0, y_3, 0) = 0$, $0 < K_i(t,s) \leqslant K_i k_i(s)$, $\int\limits_{-\infty}^{0} k_i(s)ds = 1$, $\sup\limits_{s\leqslant 0} k_i(s-T)/k_i(s) \leqslant$ $\leqslant L_i(T)$, $L_i(T)$ ограничены при $T \in \mathrm{R}^+$, $i = 1, 2, 3$,

$$
\forall \rho \geqslant 0,\ \forall t \geqslant \rho\ \sup_{s\leqslant 0} K_2(t, s-\rho)/K_2(t-\rho, s) + \frac{1}{K_2} \int\limits_{-\rho}^{0} K_2(t,s)ds \leqslant 1,
$$

$a_2(t) \leqslant a_0$, $a_0 + K_2 \leqslant 0$, $a_1(t) + |b(t)| \leqslant -K_1$, и существуют последовательности $\tau_k^1 \to +\infty$, $\tau_k^2 \to +\infty$, числа $\varepsilon_i > 0$, $\delta_i(\varepsilon_i) > 0$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$a_1(t) + |b(t)| + K_1 < -\delta_1$ для $t \in [\tau_k^1, \tau_k^1 + \varepsilon_1]$, $K_3(t,s) > \delta_2$ для $t \in [\tau_k^2, \tau_k^2 + \varepsilon_2]$. Относительно функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ предположим, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} \left| \int_t^{t+u} g_i(s)\, ds \right| = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для этой системы выберем пространство с исчезающей памятью

$$B = M^r_{k_1,1} \times [M^r_{k_2,1} \cap M_{k_3,2}],\ |\varphi|^2_B = |\varphi_1|^2_{M^r_{k_1,1}} + |\varphi_2|^2_{M^r_{k_2,1}},\ V(t,x) = V(x) = x_2^2,$$

$$W(t,\varphi) = \max\left\{ \varphi_2^2(0), \left(\frac{1}{K_2} \int_{-\infty}^{0} K_2(t,s)|\varphi_2(s)|ds \right)^2 \right\}.$$

Тогда при данных предположениях нулевое решение системы (16) равномерно асимптотически устойчиво (см. [110]).

Заметим, что без дополнительных предположений относительно функций f, g_1, g_2 невозможно гарантировать существование ни знакоопределенной функции, ни знакоопределенного функционала с производной в силу системы (16) определенного знака.

Заметим, что, как и в случае конечного запаздывания, результаты, основанные на использовании свойств предельных уравнений и предельных множеств, можно распространить на случай более общих предположений относительно правой части уравнения [112].

В заключение упомянем несколько публикаций, посвященных задаче о неустойчивости нулевого решения уравнения (13) с использованием конечномерных функций: [31, 113, 114]. Подходы, используемые в них, опираются на обсуждаемые выше свойства уравнения (13), в частности, используют допустимое фазовое пространство, и идейно близки к тем, которые обсуждались в подразделе 2.4.

4. Заключение

Для систем, эволюция которых зависит от предыстории, идея оценки производной вспомогательной функции на некотором подмножестве этих предысторий оказалась ключевой с точки зрения практической эффективности функций Ляпунова в применении к таким системам.

Первоначальные недоразумения, связанные с различным определением упомянутого множества в оригинальных утверждениях Б.С. Разумихина и Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости, разрешились в результате более детального анализа свойств как правой части уравнения, описывающего систему, так и самой функции. Возможности использования множеств $\Omega_t(V)$ и $\Omega_t(V,\eta)$, а также их подмножеств для оценки производной в достаточных условиях (асимптотической) устойчивости подробно обсуждаются Б.С. Разумихиным в [56]. Кроме того, оказалось, что для достаточно широкого класса уравнений (в том числе, с периодической и почти периодической по t правой частью) теорема об асимптотической устойчивости в формулировке Разумихина оказалась верна при дополнительных предположениях. Истории этого обоснования в основном посвящена первая часть статьи, где объект рассмотрения – те же уравнения с конечным запаздыванием, с которых началось развитие метода Ляпунова–Разумихина. Своего рода логическим продолжением этих построений и утверждений являются результаты для случая более общих уравнений с неограниченным и бесконечным запаздыванием, которые представлены гораздо менее подробно. Основное внимание уделено базовой проблеме определения фазового пространства, от которого в значительной степени зависят дальнейшие определения и свойства уравнения, а также описанию конструкции, получившей название пары Ляпунова–Разумихина. Эта конструкция возникла в результате многолетних поисков удачной модификации условия Разумихина, соответствующей бесконечному запаздыванию, и оказалась не только естественным развитием оригинального условия Разумихина, но и обобщением большинства ранее предложенных подходов.

Универсальность идей А.М. Ляпунова определила не только широкое применение прямого метода в исследовании устойчивости, но и его распространение на различные задачи для систем, моделируемых ОДУ. Метод функций Разумихина оказался достойным его наследником и за время своего существования получил широкое распространение и разнообразное использование. Помимо исходного объекта применения – дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием – функции Разумихина были "адаптированы" к анализу систем с неограниченным и бесконечным запаздыванием [20, 30, 34, 38, 40, 98, 110], уравнений типа Вольтерра [104, 115, 116], систем нейтрального типа [49, 117, 118] и дискретных систем [119, 120]. Помимо достаточных условий (асимптотической) устойчивости и неустойчивости, сферой приложения конечномерных функций с условием типа Разумихина стали задачи локализации предельных множеств, оценки областей притяжения и множеств достижимости [29, 30, 33, 34, 44, 45], анализ систем с возмущениями [27, 71, 121, 122], сходимость, ограниченность и периодичность решений [25, 29, 37, 40, 105, 123], задачи построения управлений с заданными свойствами [26, 35, 124–126], в том числе теория автоматического регулирования [127]. Предназначенные, по сути, для исследования нелинейных систем условия Разумихина оказались эффективными и в линейном случае, позволяя вычислять, например, коэффициенты экспоненциального затухания решений [89, 127–129].

Для публикаций последних десятилетий характерно расширение сферы применения метода; он успешно применяется в анализе различных типов систем с запаздыванием, возникающих в современных прикладных задачах: стохастических, импульсных, смешанных, гибридных, нечетких, интервальных, с переключениями, а также с дробными производными и с распределенными параметрами; укажем лишь некоторые из недавних ссылок: [130–136]. Более того, идеи ослабления условий на производную, аналогичные условию Разумихина, применяются также в теории функционалов (см., например, [13, 21, 23, 48, 49]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
2. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
3. *Андронов А.А., Майер А.Г.* Простейшие линейные системы с запаздыванием // АиТ. 1946. Т. 7. № 2, 3. С. 95–106.
4. *Богомолов В.Л.* Автоматическое регулирование мощности гидростанций по водостоку // АиТ. 1941. № 4, 5. С. 103–129.
5. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Системы с последействием нейтрального типа // АиТ. 1984. № 1. С. 5–35.
   Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Systems with an After-Effect of the Neutral Type // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 1. P. 1–28.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
7. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control. Birkhäuser, 2014.
8. *Красовский Н.Н.* Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. 1956. Т. 20. № 4. С. 513–518.
9. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.
10. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
11. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифф. уравнения. 1998. Т. 34. № 7. С. 876–885.
12. *Ким А.В.* i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
13. *Княжище Л.Б.* Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. I, II // Дифф. уравнения. 1998. Т. 34. № 2. С. 189–196; 1998. Т. 34. № 8. С. 1056–1065.
14. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
15. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.
16. *Павликов С.В.* Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости. Набережные Челны: Изд-во Ин-та управления, 2006.
17. *Шиманов С.Н.* О неустойчивости движения систем с запаздыванием во времени // ПММ. 1960. Т. 24. № 1. С. 55–63.
18. *Шиманов С.Н.* Устойчивость систем с запаздыванием // Тр. II Всес. с'езда по теорет. и прикл. механике. Москва, 1964. М.: Наука, 1965. С. 170–180.
19. *Burton T.A., Hatvani L.* Stability Theorems for Nonautonomous Functional Differential Equations by Liapunov Functionals // Tohoku Math. J. 1989. V. 41. P. 65–104.
20. *Driver R.D.* Existence and Stability of Solutions of a Delay-Differential System // Arch. Ration. Mech. Anal. 1962. V. 10. P. 401–426.
21. *Kato J.* Stability Problem in Functional Differential Equations with Infinite Delay // Funkcialaj Ekvacioj. 1978. V. 21. P. 63–80.

22. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied theory of functional differential equations. Kluwer Acad. Publishers, 1992.

23. *Wang Z.* Comparison Method and Stability Problem for Functional Differential Equations // Tohoku Math. J. 1983. V. 35. P. 349–356.

24. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: The Math. Soc. of Japan, 1966.

25. *Bernfeld S.R., Haddock J.R.* Liapunov–Razumikhin Functions and Convergence of Solutions of Functional-Differential Equations // Appl. Anal. 1979. V. 4. P. 235–245.

26. *Blanchini F., Ryan E.P.* A Razumikhin-type Lemma for Functional Differential Equations with Application to Adaptive Control // Automatica. 1999. V. 35. P. 809–818.

27. *Gyori I., Hartung F.* Preservation of Stability in Delay Equations under Delay Perturbations // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 220. P. 290–312.

28. *Haddock J., Ko Y.* Lyapunov–Razumikhin Functions and an Instability Theorem for Autonomous Functional-Differential Equations with Finite Delay // Rocky Mt. J. Math. 1995. V. 25. P. 261–267.

29. *Haddock J., Terjéki J.* Liapunov–Razumikhin Functions and an Invariance Principle for Functional Differential Equations // J. Differ. Equat. 1983. V. 48. P. 95–122.

30. *Haddock J., Terjéki J.* On the Location of Positive Limit Sets for Autonomous Functional Differential Equations with Infinite Delay // J. Differ. Equat. 1990. V. 86. P. 1–32.

31. *Haddock J., Zhao J.* Instability for Functional Differential Equations // Math. Nachr. 2006. V. 279. P. 1491–1504.

32. *Hara T., Yoneyama T., Miyazaki R.* Some Refinements of Razumikhin's Method and their Applications // Funkc. Ekvacioj. 1992. V. 35. P. 279–305.

33. *Hornor W.E.* Invariance Principles and Asymptotic Constancy of Solutions of Precompact Functional Differential Equations // Tohoku Math. J. 1990. V. 42. P. 217–229.

34. *Hornor W.E.* Liapunov–Razumikhin Pairs and the Location of Positive Limit Sets for Precompact Functional Differential Equations with Infinite Delay // Nonlin. Analysis, Theory, Methods Appl. 1992. V. 19. P. 441–453.

35. *Jankovic M.* Control Lyapunov–Razumikhin Functions and Robust Stabilization of Time Delay Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. V. 46. P. 1048–1060.

36. *Kato J.* On Liapunov–Razumikhin Type Theorems for Functional Differential Equations // Funkc. Ekvacioj. 1973. V. 16. P. 225–239.

37. *Taniguchi T.* Asymptotic Behavior Theorems for Non-Autonomous Functional Differential Equations via Lyapunov–Razumikhin Method // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 189. P. 715–730.

38. *Terjéki J.* On the Asymptotic Stability of Solutions of Functional Differential Equations // Ann. Pol. Math. 1979. V. 36. P. 299–314.

39. *Xu B., Liu Y.* An Improved Razumikhin-type Theorem and its Applications // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. P. 839–841.

40. *Parrot M.* Convergence of solutions of infinite delay differential equations with an underlying space of continuous functions / Lect. Notes Math. V. 846. N.Y.: Springer-Verlag, 1981.

41. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.–Ижевск: НИЦ РХД, 2009.

42. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

43. *Mikolajska Z.* Une remarque sur des notes der Razumichin et Krasovskij sur la stabilite asimptotique // Ann. Pol. Math. 1969. V. 22. P. 69–72.

44. *Горбунов А.В., Каменецкий В.А.* Метод функций Ляпунова для построения областей притяжения систем с запаздыванием // АиТ. 2005. № 10. С. 42–53.
Gorbunov A.V., Kamenetskii V.A. Attraction Domains of Delay Systems: Construction by the Lyapunov Function Method // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 10. P. 1569–1579.

45. *Fridman E., Shaked U.* An Ellipsoid Bounding of Reachable Systems with Delay and Bounded Peak Inputs // IFAC Proc. Volumes. 2003. V. 36. No. 19. P. 269–274.

46. *Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.* Судьба одного подхода к изучению наследственных систем // Изв. Урал. гос. ун-та. 2004. № 32. С. 12–24.

47. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhauser, 2013.

48. *Medvedeva I.V., Zhabko A.P.* Synthesis of Razumikhin and Lyapunov–Krasovskii Approaches to Stability Analysis of Time-Delay Systems // Automatica. 2015. V. 51. P. 372–377.

49. *Alexandrova I.V., Zhabko A.P.* Synthesis of Razumikhin and Lyapunov-Krasovskii Stability Approaches for Neutral Type Time Delay Systems // Proc. 20th Int. Conf. on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2016. P. 375–380.

50. *Chaillet A., Pogromsky A.Yu., Rüffer B.S.* A Razumikhin Approach for the Incremental Stability of Delayed Nonlinear Systems // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, December 2013.

51. *Karafyllis I., Jiang Z.P.* Stability and Control of Nonlinear Systems Described by Retarded Functional Equations: a Review of Recent Results // Sci China Ser F-Inf Sci. 2009. V. 52. No. 11. P. 2104–2126.

52. *Ning C., He Y., Wu M., and Jinhua She J.* Improved Razumikhin-Type Theorem for Input-To-State Stability of Nonlinear Time-Delay Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2014. V. 59. No. 7. P. 1983–1988.

53. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhäuser, 1998.

54. *Разумихин Б.С.* Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // АиТ. 1960. Т. 21. № 6. С. 740–748.
Rasumikhin B.S. Application of Method of Liapunov to Problems of Stability of Delay Systems // Avtomat. i Telemekh. 1960. V. 21. No. 6. P. 740–748.

55. *Разумихин Б.С.* Метод исследования устойчивости систем с последействием // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 6. С. 1234–1237.

56. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988.

57. *Myshkis A.* Razumikhin's method in the qualitative theory of processes with delay // J. Appl. Math. Stoch. Anal. 1995. V. 8. Iss. 3. P. 233–247.

58. *Громова П.С.* Об обращении теорем Б.С. Разумихина // Дифф. уравнения. 1983. Т. 19. № 2. С. 357–359.

59. *Haddock J.* The "evolution" of invariance principles á la Liapunov's direct method // Advances in nonlinear dynamics. Stability and Control: Theory, Methods and Applications. V. 5 (Eds. Sivasundaram S., Martynyuk A.A.). 1997. P. 261–272.

60. *Mao X.* Comments on "An Improved Razumikhin-type Theorem and its Applications" // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. P. 429–430.

61. *Xu B.* Author's Reply // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. P. 430.

62. *Mazenc F., Niculescu S.-I.* Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Delay Systems // Syst. Control Lett. 2001. V. 42. P. 245–251.

63. *Прасолов А.В.* Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. Уч. пос. СПб.: Изд-во “Лань”, 2010.

64. *Sell G.R.* Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 214–262.

65. *Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наук. думка, 1990.

66. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990.

67. *Saperstone S.* Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces. N.Y.: Springer Verlag, 1981.

68. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифф. уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 435–440.

69. *Hino Y.* Stability Properties for Functional Differential Equations with Infinite Delay // Tohoku Math. J. 1983. V. 35. P. 597–605.

70. *Kato J.* Asymptotic Behavior in Functional Differential Equations with Infinite Delay // Lect. Notes Math. 1982. № 1017. P. 300–312.

71. *Murakami S.* Perturbation Theorem for Functional Differential Equations with Infinite Delay via Limiting Equations // J. Differ. Equat. 1985. V. 59. P. 314–335.

72. *Дружинина О.В., Седова Н.О.* Метод предельных уравнений исследования устойчивости для уравнений с бесконечным запаздыванием в условиях Каратеодори. II // Дифф. уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 715–725.

73. *Andreev A., Sedova N.* On the Stability of Nonautonomous Equations with Delay via Limiting Equations // Func. Diff. Equat. (Israel). 1998. V. 5. No. 1–2. P. 21–37.

74. *Андреев А.С.* Об устойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 2. С. 151–153.

75. *Sedova N.* On Employment of Semidefinite Functions in Stability of Delayed Equations // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 281. No. 1. P. 313–325.

76. *Ignatyev A.O.* On the Asymptotic Stability in Functional Differential Equations // Proc. Amer. Math. Society. 1999. V. 127. No. 6. P. 1753–1760.

77. *Седова Н.О.* Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2005. Т. 8. № 3. С. 468–472.

78. *Iggidr A., Sallet G.* On the Stability of Nonautonomous Systems // Automatica. 2003. V. 39. P. 167–171.

79. *Седова Н.О.* К задаче слежения для неголономных систем с учетом запаздывания обратной связи // АиТ. 2013. № 8. С. 138–147.
Sedova N.O. On the Problem of Tracking for the Nonholonomic Systems with Provision for the Feedback Delay // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 8. P. 1348–1355.

80. *Седова Н.О.* Локальная и полуглобальная стабилизация в каскаде с запаздыванием // АиТ. 2008. № 6. С. 70–81.
Sedova N.O. Local and Semiglobal Stabilization in a Cascade with Delay // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 6. P. 968–979.

81. *Седова Н.О.* К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // АиТ. 2011. № 9. С. 74–86.
Sedova N.O. On the Principle of Reduction for the Nonlinear Delay Systems // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 9. P. 1864–1875.

82. *Седова Н.О.* Синтез цифровых стабилизирующих регуляторов для непрерывных систем на основе метода функций Ляпунова // Пробл. управления. 2011. № 6. С. 7–13.

83. *Прасолов А.В.* О применении функций Ляпунова для исследования неустойчивости решений систем с последействием // Вестн. ЛГУ. 1981. Сер. 1. № 19. С. 116–118.

84. *Прасолов А.В.* Признаки неустойчивости для систем с последействием // Вестн. ЛГУ. 1988. Сер. 1. № 3. С. 108–109.

85. *Haddock J., Zhao J.* Instability for Autonomous and Periodic Functional Differential Equations with Finite Delay // Funkc. Ekvacioj. 1996. V. 39. P. 553–570.

86. *Sedova N.* Razumikhin-type Theorems in the Problem on Instability of Nonautonomous Equations with Finite Delay // Funkc. Ekvacioj. 2004. V. 47. P. 187–204.

87. *Lakshmikantham V.* Lyapunov Function and a Basic Inequality in Delay-Differential Equations // Arch. Ration. Mech. Ann. 1962. V. 7. No. 1. P. 305–310.

88. *Лакшмикантам В., Мартынюк А.А.* Равитие прямого метода Ляпунова для систем с последействием // Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 2. С. 2–16.

89. *Xu B.* Stability of Retarded Dynamical Systems: a Lyapunov Functions Approach // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 253. P. 590–615.

90. *Ansari J.S.* Modified Liapunov–Razumikhin stability condition for extended range of applicability // J. Indian Inst. Sci. 1976. V. 58. Iss. 3. P. 115–120.

91. *Furumochi T.* Stability and Boundedness in Functional Differential Equations // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 113. No. 2. P. 473–489.

92. *Козлов Р.И.* Системы условных дифференциальных неравенств типа Като // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 6. С. 1253–1263.

93. *Громова П.С., Маркос Лисано Пенья.* Метод векторных функций Ляпунова для систем с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 1981. № 8. С. 21–26.

94. *Перегудова О.А.* Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44. № 12. С. 1638–1647.

95. *Zhou B., Egorov A.V.* Razumikhin and Krasovskii Stability Theorems for Time-Varying Time-Delay Systems // Automatica. 2016. V. 71. P. 281–291.

96. *Mazenc F., Malisoff M.* Extensions of Razumikhin's Theorem and Lyapunov–Krasovskii Functional Constructions for Time-Varying Systems with Delay // Automatica. 2017. V. 78. P. 1–13.

97. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay // Lect. Notes Math. V. 1473. Springer-Verlag, 1991.

98. *Седова Н.О.* К методу Ляпунова–Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием // Диффер. уравнения. 2002. Т. 10. С. 1338–1347.

99. *Hale J., Kato J.* Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay // Funkc. Ekvacioj. 1978. V. 21. No. 1. P. 11–41.

100. *Murakami S., Naito T.* Fading Memory Spaces and Stability Properties for Functional Differential Equations with Infinite Delay // Funkc. Ekvacioj. 1989. V. 32. P. 91–105.

101. *Haddock J., Hornor W.* Precompactness and Convergence in Norm of Positive Orbits in a Certain Fading Memory Space // Funkc. Ekvacioj. 1988. V. 31. P. 349–361.

102. *Kato J.* Stability in Functional Differential Equations // Lect. Notes Math. 1980. V. 799. P. 252–262.

103. *Atkinson F., Haddock J.* On Determining Phase Spaces for Functional Differential Equations // Funkc. Ekvacioj. 1988. V. 31. P. 331–348.

104. *Seifert G.* Liapunov–Razumikhin Conditions for Asymptotic Stability in Functional Differential Equations of Volterra Type // J. Differ. Equat. 1974. V. 16. P. 289–297.

105. *Seifert G.* Liapunov–Razumikhin Conditions for Stability and Boundedness of Functional Differential Equations of Volterra Type // J. Differ. Equat. 1973. V. 14. P. 424–430.

106. *Seifert G.* Uniform Stability for Delay-Differential Equations with Infinite Delay // Funkc. Ekvacioj. 1982. V. 25. P. 347–356.

107. *Murakami S.* Stability in Functional Differential Equations with Infinite Delay // Tohoku Math. J. 1985. V. 36. P. 561–570.

108. *Zhi-Xiang L.* Liapunov–Razumikhin Functions and the Asymptotic Properties of the Autonomous Functional Differential Equations with Infinite Delay // Tohoku Math. J. 1986. V. 38. P. 491–499.

109. *Zhang S.* A New Technique in Stability of Infinite Delay Differential Equations // Comput. Math. Appl. 2002. V. 44. P. 1275–1287.

110. *Седова Н.О.* О развитии прямого метода Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием // Мат. заметки. 2008. Т. 84. № 6. С. 888–906.

111. *Седова Н.О.* Устойчивость в системах с неограниченным последействием // АиТ. 2009. № 9. С. 128–140.
Sedova N.O. Stability in Systems with Unbounded Aftereffect // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 9. P. 1553–1564.

112. *Дружинина О.В., Седова Н.О.* Метод предельных уравнений исследования устойчивости для уравнений с бесконечным запаздыванием в условиях Каратеодори. I // Дифф. уравнения. 2014. Т. 50. № 5. С. 572–583.

113. *Ko Y.* The Instability for Functional Differential Equations // J. Korean Math. Soc. 1999. V. 36. No. 4. P. 757–771.

114. *Sedova N.* Lyapunov–Razumikhin Pairs in the Instability Problem for Infinite Delay Equations // Nonlin. Analysis, Theory, Methods Appl. 2010. V. 73. P. 2324–2333.

115. *Grimmer R., Seifert G.* Stability Properties of Volterra Integrodifferential Equations // J. Differ. Equat. 1975. V. 19. P. 147–166.

116. *Hino Y., Murakami S.* Stability Properties of Linear Volterra Equations // J. Differ. Equat. 1991. V. 89. P. 121–137.

117. *Haddock J.R., Krisztin T., Terjeki J., Wu J.H.* An Invariance Principle of Lyapunov–Razumikhin Type for Neutral Functional-Differential Equations // J. Differ. Equat. 1994. V. 107. Iss. 2. P. 395–417.

118. *Jankovic S., Jovanovic M., Randjelovic J.* Razumikhin-type Exponential Stability Criteria of Neutral Stochastic Functional Differential Equations // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 355. No. 2. P. 811–820.

119. *Богданов А.Ю.* Развитие метода функций Ляпунова–Разумихина для неавтономных дискретных систем с неограниченным запаздыванием // Изв. высш. уч. заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2007. № 1. С. 28–39.

120. *Родионов А.М.* Об исследовании импульсных систем переменной структуры с запаздыванием // АиТ. 1988. № 11. С. 188–190.

121. *Hou C., Gao F., Qian J.* Stability Criterion for Linear Systems with Nonlinear Delayed Perturbations // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 237. P. 573–582.

122. *Michiels W., Sepulchre R., Roose D.* Robustness of Nonlinear Delay Equations w.r.t. Bounded Input Perturbations // Proc. 14th Int. Sympos. Math. Theory of Networks and Syst.(MTNS2000). 2000. P. 1–5.

123. *Yuan R.* Existence of almost periodic solutions of neutral functional differential equations via Liapunov–Razumikhin function // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 1998. V. 49. P. 113–136.

124. *Hua C. et al.* Robust Control for Nonlinear Time-Delay Systems. Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2018.

125. *Ilchmann A., Sangman C.J.* Output Feedback Stabilization of Minimum Phase Systems by Delays // Syst. Control Lett. 2004. V. 52. P. 233–245.

126. *Efimov D., Schiffer J., Ortega R.* Robustness of Delayed Multistable Systems with Application to Droop-Controlled Inverter-Based Microgrids // Int. J. Control. 2016. V. 89. No. 5. P. 909–918.

127. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных уравнений. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997.

128. *Шашихин В.Н.* Синтез робастного управления для интервальных крупномасштабных систем с последействием // АиТ. 1997. № 12. С. 164–174.
Shashikhin V.N. Robust Design for Interval Large-Scale Systems with Aftereffects // Autom. Remote Control. 1997. V. 58. No. 12. P. 1978–1986.

129. *Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.* Asymptotic Stability Conditions and Estimates of Solutions for Nonlinear Multiconnected Time-Delay Systems // Circ. Syst. Signal Process. 2016. V. 35. Iss. 10. P. 3531–3554.

130. *Мышкис А.Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.

131. *Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.* Stability Analysis of Some Classes of Nonlinear Switched Systems with Time Delay // Int. J. Syst. Sci. 2017. V. 48. No. 10. P. 2111–2119.

132. *Baleanu D., Sadati S.J., Ghaderi R., Ranjbar A., Abdeljawad* (*Maraaba*) *T., Jarad F.* Razumikhin Stability Theorem for Fractional Systems with Delay // Abstr. Appl. Anal. (Hindawi Publish. Corporation). V. 2010. Article ID 124812.

133. *Chen W.H., Liu L.J., Lu X.M.* Intermittent Synchronization of Reaction-Diffusion Neural Networks with Mixed Delays via Razumikhin Technique // Nonlinear Dynamics. 2017. V. 87. No. 1. P. 535–551.

134. *Li X.D., Ding Y.H.* Razumikhin-type Theorems for Time-Delay Systems with Persistent Impulses // Syst. Control Lett. 2017. V. 107. P. 22–27.

135. *Li X.D., Deng F.Q.* Razumikhin Method for Impulsive Functional Differential Equations of Neutral Type // Chaos Solitons & Fractals. 2017. V. 101. P. 41–49.

136. *Zhu Q.X.* Razumikhin-type Theorem for Stochastic Functional Differential Equations with Levy Noise and Markov Switching // Int. J. Control. 2017. V. 90. No. 8. P. 1703–1712.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 01.06.2018

После доработки 10.11.2018

Принята к публикации 07.02.2019