© 2019 г. М.М. ХРУСТАЛЁВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru),
Е.Е. ОНЕГИН (evgeny.onegin@phystech.edu)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Московский авиационный институт)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается широкий класс допустимых стратегий управления, обеспечивающих устойчивость системы в среднем квадратичном. Получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора. Демонстрируется отличие поставленной задачи от задачи оптимального управления на неограниченном интервале времени. Суть полученных условий оптимальности продемонстрирована на примере стабилизации искусственного спутника Земли в окрестности круговой орбиты.

Ключевые слова: квазилинейные стохастические системы, оптимальная стабилизация, линейный регулятор.

DOI: 10.1134/S0005231019070031

1. Введение

Середина XX в. ознаменовалась интенсивным развитием теории стохастических дифференциальных уравнений. Модели, описываемые подобными уравнениями, нашли широкое применение в экономике, физике, биологии, социологии и технике. Особый интерес представляют проблемы управления подобными системами, в частности задача оптимального управления. Самым развитым разделом теории оптимального управления стохастическими системами является оптимальное управление линейными системами с квадратичным критерием [1]. Формулировка данной задачи без указания лишних на данный момент подробностей состоит в следующем: требуется минимизировать функционал

$$J(X,u) := \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(X(s)^{\mathrm T}QX(s) + u(s,X(s))^{\mathrm T}Eu(s,X(s))\Big)ds \to \min_u,$$

где u – стратегия управления, а X – векторный случайный процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$\begin{gathered} dX(t) = \Big(A_0X(t) + B_0u(t,X(t)) + C_0\Big)dt + \\ \sum_{i=1}^{k}\Big(A_iX(t) + B_iu(t,X(t)) + C_i\Big)\,dW_i(t). \end{gathered} \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания № 9.7555.2017/БЧ.

Хорошо известно [2], что в случае, когда уравнения системы содержат лишь аддитивные возмущения (матричные коэффициенты A_i, B_i, $i = \overline{1,k}$ равны нулю), для данной задачи имеет место принцип разделения. Кроме того, если матрица E в критерии отрицательно определена, то решения задачи в указанном случае нет. В то же время для систем вида (1) принцип разделения, вообще говоря, не работает, и показано [3–5], что даже с отрицательно определенной матрицей E в критерии задача может иметь решение. С целью подчеркнуть эти и другие особенности в публикациях уравнения вида (1) называют: линейными в широком смысле [6], с зависящими от состояния и управления шумами [7–9], с мультипликативными шумами [10], билинейными [11] или квазилинейными [12, 13].

Одной из упомянутых особенностей является то, что при $C_i = 0$, $i = \overline{0,k}$, и $u(t,0) \equiv 0$ система (1) имеет тривиальное решение $X \equiv 0$. При этом приобретают содержательный смысл вопрос асимптотической устойчивости в среднем квадратичном нулевого решения замкнутой системы [14] и задача оптимальной стабилизации с квадратичным критерием на неограниченном интервале времени. Отметим, что управление, которое обеспечивает устойчивость замкнутой системы (если оно существует), с одной стороны, сводит состояние системы к нулю в среднем квадратичном, а с другой – подавляет воздействие случайных возмущений на систему. Задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем посвящено достаточно много публикаций (например [7–9, 15]), но при наиболее общих предположениях о системе и критерии она рассмотрена в [16], где имеются достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора. В настоящей статье получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора. Данный результат при дополнительных предположениях о системе был сформулирован в [17].

Структура статьи следующая: раздел 2 содержит постановку задачи, в разделе 3 производятся вспомогательные построения, четвертый раздел содержит основной результат, в пятом разделе на модельном примере произведено сравнение исследуемой задачи оптимальной стабилизации с задачей оптимальной стабилизации по части координат, в разделе 6 в качестве демонстрации рассмотрена задача оптимальной стабилизации искусственного спутника Земли в окрестности заданной круговой орбиты.

2. Постановка задачи оптимальной стабилизации

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$(2)\quad dX(t) = \Big(A_0X(t) + B_0u(t,X(t))\Big)dt + \sum_{i=1}^{k}\Big(A_iX(t) + B_iu(t,X(t))\Big)\,dW_i(t),$$

где $t \geqslant t_0$ – время; X – случайный процесс со значениями в R^n; W – стандартный винеровский процесс со значениями в R^k; $(t,x)\mapsto u(t,x)\colon[t_0,+\infty)\times R^n \to R^m$ – измеримая по Борелю стратегия управления; $A_i \in R^{n\times n}$, $B_i \in R^{n\times m}$, $i = \overline{0,k}$ – постоянные матрицы.

Обозначим через $\mathcal{D}_{P_0}$ множество процессов управления $z = (X, u)$, которые являются парами случайных процессов X и стратегий управления u таких, что

1. При заданной стратегии управления u непрерывный случайный процесс X является слабым решением [18, раздел 5.3] уравнения (2) с начальным условием

$$P_{X(t_0)} = P_0, \tag{3}$$

где $P_{X(t_0)}$ означает распределение случайного вектора $X(t_0)$, а P_0 – борелевская вероятностная мера на R^n, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{R^n} \|x\|^4 P_0(dx) < +\infty.$$

Предполагается, что $X(t_0)$ не зависит от $W(t)$, $t \geqslant t_0$;

2. Выполнены условия:

$$\mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{t} \|X(s)\|^4 ds < +\infty, \quad \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{t} \|u(s, X(s))\|^4 ds < +\infty, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(\|X(s)\|^2 + \|u(s, X(s))\|^2\Big) ds < +\infty, \\ \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\|X(t)\|^2 = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма на R^n, $\mathbb{E}$ – оператор математического ожидания (здесь и далее математическое ожидание берется в вероятностном пространстве, связанном с z).

Замечание 1. Здесь подразумевается, что вместе с каждым отдельно взятым процессом управления z имеется полное фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant t_0}, \mathbf{P})$, на котором заданы непрерывный случайный процесс $X = (X(t), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant t_0}$ и стандартный винеровский процесс $W = (W(t), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant t_0}$ такие, что выполнено начальное условие (3) и для каждого $t > t_0$ с вероятностью единица верно равенство (2). При этом под процессом управления правильно понимать кортеж

$$z = \Big((\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant t_0}, \mathbf{P}), (W(t), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant t_0}, (X(t), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant t_0}, u\Big).$$

С целью упростить обозначения далее не будем указывать данные подробности.

Замечание 2. Как известно, условия существования слабых решений стохастического дифференциального уравнения являются более мягкими, чем для существования сильных решений. С этой точки зрения рассмотрение слабых решений позволяет охватить более широкий класс допустимых стратегий управления. Однако представленные в данной работе результаты остаются верны, если ограничить множество допустимых стратегий управления таким образом, чтобы стохастическое дифференциальное уравнение имело сильные решения.

Замечание 3. Известно, что если неуправляемая стохастическая система асимптотически устойчива в среднем квадратичном, то она экспоненциально устойчива в среднем квадратичном. Поэтому если линейный стационарный регулятор $u(t,x) = -Lx$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем квадратичном системы (2), то условия (4) и (5) выполнены автоматически для любого процесса управления $z = (X, u)$, удовлетворяющего условию 1.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество борелевских вероятностных мер на R^n, для которых выполнено условие $\int\limits_{R^n} \|x\|^4 P_0(dx) < +\infty$, а

$$\mathcal{D} := \bigcup_{P_0 \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_{P_0}.$$

На множестве $\mathcal{D}$ зададим функционал качества управления $J : \mathcal{D} \to R$,

$$J(z) = \mathbb{E} \int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(X(s)^{\mathrm{T}} Q X(s) + X(s)^{\mathrm{T}} S u(s, X(s)) + \\ + u(s, X(s))^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} X(s) + u(s, X(s))^{\mathrm{T}} E u(s, X(s)) \Big) ds, \tag{6}$$

где $Q \in R^{n \times n}$ и $E \in R^{m \times m}$ – симметрические матрицы, $Q \succcurlyeq 0$, $E \succ 0$; матрица $S \in R^{n \times m}$ удовлетворяет условию $Q - SE^{-1}S^{\mathrm{T}} \succcurlyeq 0$.

Определение. Стратегию управления u будем называть стабилизирующей, если при любом начальном распределении $P_0 \in \mathcal{M}$ существует процесс управления $z = (X, u) \in \mathcal{D}_{P_0}$.

Задача оптимальной стабилизации системы (2) состоит в поиске такой стабилизирующей стратегии управления $\overline{u}$, что при любом фиксированном начальном распределении $P_0 \in \mathcal{M}$ процесс управления $\overline{z} = (\overline{X}, \overline{u}) \in \mathcal{D}_{P_0}$ минимизирует критерий (6), т.е.

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{P_0}} J(z). \tag{7}$$

Такую стратегию управления $\overline{u}$ будем называть оптимальной.

3. Вспомогательный функционал качества управления

Аналогично тому, как это было сделано в [16, 19, 20], построим для данной задачи вспомогательный функционал качества управления. Для этого фиксируем некоторый процесс управления $z = (X, u) \in \mathcal{D}$. Известно [18, теорема 4.2.1], что для всякой функции $(t,x)\mapsto\varphi(t,x):[t_0,+\infty)\times R^n\to R$, имеющей непрерывные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}$, $i,j=\overline{1,n}$, верна формула Ито

$$\varphi(t_0,X(t_0))+\int\limits_{t_0}^{t}\biggl(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,X(s))+\nabla_x\varphi(s,X(s))^{\mathrm T}\bigl(A_0X(s)+B_0u(s,X(s))\bigr)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(A_iX(s)+B_iu(s,X(s)))^{\mathrm T}H_x^{\varphi}(s,X(s))(A_iX(s)+B_iu(s,X(s)))\biggr)ds+ \tag{8}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{t_0}^{t}\nabla_x\varphi(s,X(s))^{\mathrm T}\Bigl(A_iX(s)+B_iu(s,X(s))\Bigr)dW_i(s)=\varphi(t,X(t)),$$

где $\nabla_x\varphi:=\bigl(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\bigr)^{\mathrm T}$ – градиент функции $\varphi(t,\cdot)$; H_x^{φ} – матрица Гессе функции $\varphi(t,\cdot)$, $(H_x^{\varphi})_{ij}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Применяя данную формулу к функции $\varphi(t,x)=x^{\mathrm T}Mx$, где $M\in R^{n\times n}$ – симметрическая матрица, получим равенство

$$X(t_0)^{\mathrm T}MX(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\biggl(2\,X(s)^{\mathrm T}M\bigl(A_0X(s)+B_0u(s,X(s))\bigr)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left(A_iX(s)+B_iu(s,X(s))\right)^{\mathrm T}M\left(A_iX(s)+B_iu(s,X(s))\right)\biggr)ds+$$

$$+2\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{t_0}^{t}\Bigl(X(s)^{\mathrm T}M\bigl(A_iX(s)+B_iu(s,X(s))\bigr)\Bigr)dW_i(s)=X(t)^{\mathrm T}MX(t).$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей этого равенства. Тогда, учитывая свойства [18, теорема 3.2.1] стохастического интеграла Ито и требования (4), будем иметь

$$\mathbb{E}\Bigl(X(t_0)^{\mathrm T}MX(t_0)\Bigr)+\mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{t}\biggl(2\,X(s)^{\mathrm T}M\bigl(A_0X(s)+B_0u(s,X(s))\bigr)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\bigl(A_iX(s)+B_iu(s,X(s))\bigr)^{\mathrm T}M\bigl(A_iX(s)+B_iu(s,X(s))\bigr)\biggr)ds=$$

$$=\mathbb{E}\Bigl(X(t)^{\mathrm T}MX(t)\Bigr).$$

Устремляя t к бесконечности, с учетом (4) и (5) получим

$$\mathbb{E}\Big(X(t_0)^{\mathrm{T}} M X(t_0)\Big) + \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty}\Bigg(2\,X(s)^{\mathrm{T}} M\big(A_0 X(s) + B_0 u(s, X(s))\big) + \\ + \sum_{i=1}^{k}\big(A_i X(s) + B_i u(s, X(s))\big)^{\mathrm{T}} M\big(A_i X(s) + B_i u(s, X(s))\big)\Bigg)\,ds = 0. \tag{9}$$

Теперь рассмотрим вспомогательный функционал $\Gamma : \mathcal{D} \to R$:

$$\Gamma(z) := \mathbb{E}\Big(X(t_0)^{\mathrm{T}} M X(t_0)\Big) + \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty}\Bigg(2\,X(s)^{\mathrm{T}} M\big(A_0 X(s) + B_0 u(s, X(s))\big) + \\ + \sum_{i=1}^{k}\big(A_i X(s) + B_i u(s, X(s))\big)^{\mathrm{T}} M\big(A_i X(s) + B_i u(s, X(s))\big) + X(s)^{\mathrm{T}} Q X(s) + \\ + X(s)^{\mathrm{T}} S u(s, X(s)) + u(s, X(s))^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} X(s) + u(s, X(s))^{\mathrm{T}} E u(s, X(s))\Bigg)\,ds.$$

Нетрудно видеть, что в силу равенства (9) и произвольности выбора процесса управления z выполнено важное свойство

$$\Gamma(z) \equiv J(z), \quad z \in \mathcal{D}, \tag{10}$$

которое не зависит от выбора матрицы M.

Введем в рассмотрение функцию $h : R^n \times R^m \times R^{n\times n} \to R$

$$h(x, u, M) := x^{\mathrm{T}}\left(MA_0 + A_0{}^{\mathrm{T}} M + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}} M A_i + Q\right) x + \\ + x^{\mathrm{T}}\left(MB_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}} M B_i + S\right) u + \\ + u^{\mathrm{T}}\left(B_0{}^{\mathrm{T}} M + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} M A_i + S^{\mathrm{T}}\right) x + u^{\mathrm{T}}\left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} M B_i\right) u. \tag{11}$$

Сразу же отметим, что при фиксированной матрице $M \in R^{n\times n}$ функция $h(\cdot,\cdot,M)$ является линейно-квадратичной функцией по совокупности переменных $(x,u) \in R^n \times R^m$. При помощи функции h можно переписать функционал Γ в более компактном виде

$$\Gamma(z) = \mathrm{tr}\big[MK_0\big] + \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} h(X(s), u(s, X(s)), M)\,ds, \tag{12}$$

где $K_0 \in R^{n\times n}$ – матрица вторых начальных моментов вектора $X(t_0)$, $\mathrm{tr}\big[\,\cdot\,\big]$ – след матрицы.

4. Условия оптимальности

Для стабилизирующих линейных стационарных регуляторов получен следующий результат.

Теорема. Для того чтобы стабилизирующий регулятор $\overline{u}(t,x) = -\overline{L}x$ был оптимальной стратегией, необходимо и достаточно существование неотрицательно определенной симметрической матрицы $\overline{M}$, удовлетворяющей условиям:

$$\overline{M}A_0^{\overline{u}} + A_0^{\overline{u}\,T}\overline{M} + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\overline{u}\,T}\overline{M}A_i^{\overline{u}} + Q - S\overline{L} - \overline{L}^T S^T + \overline{L}^T E\overline{L} = 0, \tag{13}$$

$$\overline{L} = \left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^T\overline{M}B_i\right)^{-1}\left(B_0{}^T\overline{M} + \sum_{i=1}^{k} B_i^T\overline{M}A_i + S^T\right), \tag{14}$$

где $A_i^{\overline{u}} = A_i - B_i\overline{L},\ i = \overline{0,k}.$

Доказательство. Пусть M – произвольная неотрицательно определенная симметрическая матрица. Тогда функцию h можно переписать в виде

$$h(x,u,M) = (u + F(M)x)^{\mathrm{T}}\left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}}MB_i\right)(u + F(M)x) + \tag{15}$$

$$+x^{\mathrm{T}}\left(MA_0 + A_0{}^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}}MA_i + Q - F(M)^{\mathrm{T}}\left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}}MB_i\right)F(M)\right)x,$$

где

$$F(M) := \left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}}MB_i\right)^{-1}\left(B_0{}^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}}MA_i + S^{\mathrm{T}}\right).$$

С другой стороны, верно равенство

$$\begin{aligned} &h(x,\overline{u}(t,x),M) = \\ &= x^{\mathrm{T}}\left(MA_0^{\overline{u}} + A_0^{\overline{u}\,\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\overline{u}\,\mathrm{T}}MA_i^{\overline{u}} + Q - S\overline{L} - \overline{L}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} + \overline{L}^{\mathrm{T}}E\overline{L}\right)x. \end{aligned} \tag{16}$$

Из равенств (15), (16) можно видеть, что условия (13), (14) равносильны условиям

$$h(x,\overline{u}(t,x),\overline{M}) \equiv 0, \tag{17}$$

$$\overline{M}A_0 + A_0{}^{\mathrm{T}}\overline{M} + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}}\overline{M}A_i + Q - F(\overline{M})^{\mathrm{T}}\left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}}\overline{M}B_i\right)F(\overline{M}) = 0, \tag{18}$$

и, в частности, условие (13) равносильно (17).

Пусть теперь условия (13) и (14) выполнены. Докажем, что в этом случае стратегия управления $\overline{u}(t,x)$ является оптимальной. Для этого фиксируем начальное распределение $P_0 \in \mathcal{M}$ и покажем, что процесс управления $\overline{z} = (\overline{X}, \overline{u}) \in \mathcal{D}_{P_0}$ минимизирует критерий, т.е. для любого процесса управления $\widetilde{z} = (\widetilde{X}, \widetilde{u}) \in \mathcal{D}_{P_0}$ верно неравенство

$$J(\widetilde{z}) - J(\overline{z}) \geqslant 0.$$

Используя свойство (10), выражение (12) для функционала Γ и учитывая (17), (18), получим, что

$$J(\widetilde{z}) - J(\overline{z}) = \Gamma(\widetilde{z}) - \Gamma(\overline{z}) = \operatorname{tr}\left[\overline{M}K_0\right] + \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} h\left(\widetilde{X}(s), \widetilde{u}(s,\widetilde{X}(s)), \overline{M}\right) ds -$$
$$- \operatorname{tr}\left[\overline{M}K_0\right] - \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} h(\overline{X}(s), \overline{u}(s,\overline{X}(s)), \overline{M}) ds =$$
$$= \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} h\left(\widetilde{X}(s), \widetilde{u}(s,\widetilde{X}(s)), \overline{M}\right) ds =$$
$$= \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} \left(\widetilde{u}(s,\widetilde{X}(s)) + F(\overline{M})\widetilde{X}(s)\right)^{\mathrm{T}} \left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}}\overline{M}B_i\right) \times$$
$$\times \left(\widetilde{u}(s,\widetilde{X}(s)) + F(\overline{M})\widetilde{X}(s)\right) ds \geqslant 0.$$

Последнее неравенство верно, так как функция под интегралом является квадратичной формой, и матрица $E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}}\overline{M}B_i$ этой формы положительно определена. В силу произвольности выбора P_0 полученное неравенство верно вне зависимости от начального распределения, и, следовательно, стратегия управления $\overline{u}$ является оптимальной.

Для доказательства необходимости потребуется следующий результат.

Лемма. *Если линейный регулятор $u(t,x) = -Lx$ является стабилизирующим, то существует единственная неотрицательно определенная симметрическая матрица M, которая удовлетворяет уравнению*

$$MA_0^u + A_0^{u\,T}M + \sum_{i=1}^{k} A_i^{u\,T} M A_i^u + Q - SL - L^T S^T + L^T E L = 0, \tag{19}$$

где $A_i^u = A_i - B_i L,\ i = \overline{0,k}$.

Уравнение (19) называют обобщенным уравнением Ляпунова, и оно играет ключевую роль при анализе устойчивости уравнения (2). Подробное изучение свойств данного уравнения имеется в [16]. Доказательство леммы дано в [21, с. 68].

Пусть стабилизирующий регулятор $\overline{u}(t,x) = -\overline{L}x$ оптимален. Из вышеприведенной леммы следует, что для данного регулятора существует единственная неотрицательно определенная симметрическая матрица $\overline{M}$, которая является решением уравнения (13) и при этом обеспечивает выполнение тождества (17). Осталось показать, что имеет место равенство (14).

Предположим, что условие (14) не выполнено. Тогда построим новую стратегию управления

$$\widetilde{u}(t,x) = \begin{cases} -\widetilde{L}x, & t_0 \leqslant t < t^*, \\ -\overline{L}x, & t \geqslant t^*, \end{cases}$$

где $t^* > t_0$ – некоторый фиксированный момент времени, матрица $\widetilde{L}$ выбрана из условия (14) и имеет вид

$$\widetilde{L} = \left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} \overline{M} B_i \right)^{-1} \left(B_0{}^{\mathrm{T}} \overline{M} + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} \overline{M} A_i + S^{\mathrm{T}} \right).$$

Матрица $\widetilde{L}$ существует в силу того, что $\overline{M}$ является неотрицательно определенной матрицей, а E – положительно определенная матрица. Заметим, что в силу стационарности системы (2) линейный регулятор $\widetilde{u}$ также будет стабилизирующим.

Используя равенство (15) и тождество (17), получим следующие соотношения для функции h:

$$h(x,\widetilde{u}(t,x),\overline{M}) = \begin{cases} x^{\mathrm{T}} \left(\overline{M} A_0 + A_0{}^{\mathrm{T}} \overline{M} + \sum\limits_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}} \overline{M} A_i + Q - \right. \\ \left. - F(\overline{M})^{\mathrm{T}} \left(E + \sum\limits_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} \overline{M} B_i \right) F(\overline{M}) \right) x, \ t_0 \leqslant t < t^*, \\ 0, \ t \geqslant t^*, \end{cases}$$

$$h(x,\overline{u}(t,x),\overline{M}) = x^{\mathrm{T}} \big(F(\overline{M}) - \overline{L}\big)^{\mathrm{T}} \left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} \overline{M} B_i \right) (F(\overline{M}) - \overline{L}) x +$$
$$+ x^{\mathrm{T}} \left(\overline{M} A_0 + A_0{}^{\mathrm{T}} \overline{M} + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}} \overline{M} A_i + Q - \right.$$
$$\left. - F(\overline{M})^{\mathrm{T}} \left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} \overline{M} B_i \right) F(\overline{M}) \right) x \equiv 0.$$

При помощи данных выражений можно легко оценить разность

$$h(x,\overline{u}(t,x),\overline{M}) - h(x,\widetilde{u}(t,x),\overline{M}) =$$
$$= x^{\mathrm{T}} \big(F(\overline{M}) - \overline{L}\big)^{\mathrm{T}} \left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} \overline{M} B_i \right) (F(\overline{M}) - \overline{L}) x \geqslant 0$$

при $t_0 \leqslant t < t^*$. Отсюда следует, учитывая тождество (17), что имеет место неравенство $h(x, \widetilde{u}(t,x), \overline{M}) \leqslant 0$, $t_0 \leqslant t < t^*$, причем равенство выполняется только на множестве нулевой меры Лебега в R^n.

Зафиксируем такое начальное распределение $P_0 \in \mathcal{M}$, которое имеет плотность распределения $p_0 \in \mathcal{C}^2(R^n)$ и матрицу вторых моментов $K_0 \in R^{n\times n}$. Рассмотрим процессы управления $\overline{z} = (\overline{X}, \overline{u})$ и $\widetilde{z} = (\widetilde{X}, \widetilde{u})$ из множества $\mathcal{D}_{P_0}$. Известно [6, разделы 2.6 и 9.3], что распределение случайного процесса $\widetilde{X}$ (также как и $\overline{X}$) имеет плотность вероятности, которая описывается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова с начальным условием p_0. Обозначим через $\widetilde{p}(t,\cdot) \in \mathcal{C}^2(R^n)$ плотность распределения вектора $\widetilde{X}(t)$.

Покажем, что $J(\widetilde{z}) < J(\overline{z})$. Действительно,

$$J(\widetilde{z}) - J(\overline{z}) = \Gamma(\widetilde{z}) - \Gamma(\overline{z}) = \operatorname{tr}\big[\overline{M}K_0\big] + \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} h\left(\widetilde{X}(s), \widetilde{u}(s, \widetilde{X}(s)), \overline{M}\right) ds -$$

$$-\operatorname{tr}\big[\overline{M}K_0\big] - \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{+\infty} h(\overline{X}(s), \overline{u}(s, \overline{X}(s)), \overline{M}) ds = \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{t^*} h(\widetilde{X}(s), \widetilde{u}(s, \widetilde{X}(s)), \overline{M}) ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t^*}\int\limits_{R^n} h(x, \widetilde{u}(s,x), \overline{M})\widetilde{p}(s,x)\, dxds < 0.$$

Последнее неравенство имеет место в силу того, что, как было показано выше, подынтегральная функция строго меньше нуля на множестве полной меры. Таким образом, получено противоречие с тем, что стратегия управления $\overline{u}$ оптимальна, и сделанное предположение неверно.

С л е д с т в и е. *Пусть* $\overline{z} = (\overline{X}, \overline{u}) \in \mathcal{D}$, $\overline{u}(t,x) = -\overline{L}x$ *– оптимальная стратегия управления. Тогда из соотношений* (12), (17) *следует, что оптимальное значение критерия определяется равенством*

$$J(\overline{z}) = \operatorname{tr}[\overline{M}K_0], \tag{20}$$

где матрица $\overline{M}$ *– решение уравнения* (13), K_0 *– матрица вторых начальных моментов вектора* $\overline{X}(t_0)$.

З а м е ч а н и е 4. Из теоремы следует, что задача синтеза оптимальной стратегии управления $u(t,x) = -Lx$ сводится к совместному решению матричных уравнений (13), (14) или (14), (18). Введем обозначение $R(M)$ для оператора в левой части уравнения (18):

$$R(M) := MA_0 + {A_0}^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}} M A_i + Q - F(M)^{\mathrm{T}}\left(E + \sum_{i=1}^{k} B_i^{\mathrm{T}} M B_i\right) F(M)$$

и обратимся к вопросу численного решения уравнения $\mathbb{R}(M) = 0$. В [16] для этой цели использовалось обобщение метода Ньютона на матричные уравнения и получена следующая итерационная процедура

$$M_{j+1} = M_j + \Delta M_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$A_0^u(M_j)^{\mathrm{T}} \Delta M_j + \Delta M_j A_0^u(M_j) + \sum_{i=1}^{k} A_i^u(M_j)^{\mathrm{T}} \Delta M_j A_i^u(M_j) = -R(M_j), \tag{21}$$

где $A_i^u(M) := A_i - B_i F(M)$, $i = \overline{0, k}$. Здесь на каждом шаге приращение ΔM_j находится из линейного матричного уравнения (21), которое имеет решение на каждом шаге, если регулятор $u(t, x) = -F(M_0)x$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем квадратичном системы (2).

Замечание 5. В [16, следствие 2.1.2] получены условия оптимальности в данной задаче при более широких предположениях: допускается, что матрицы в критерии не обязаны быть неотрицательно определенными. Однако вследствие такой общности условия являются лишь достаточными и не являются необходимыми.

5. Оптимальная стабилизация по части координат

Особенность рассматриваемой в данной статье задачи заключается в том, что допустимое множество $\mathcal{D}$ ограничено случайными процессами, асимптотически стремящимся к нулю в среднем квадратичном. Однако в силу лишь неотрицательной определенности матрицы Q в критерии (6) можно рассмотреть более общую задачу оптимальной стабилизации системы (2) по части координат.

Пусть заданы полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, стандартный винеровский процесс W и n-мерная векторная случайная величина X_0, $\mathbb{E}\|X_0\|^4 < +\infty$, не зависящая от $W(t)$, $t > t_0$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{D}}$ множество процессов управления $z = (X, u)$ таких, что:

1. При заданном u непрерывный случайный процесс X является сильным решением уравнения (2) с начальным условием $X(t_0) = X_0$;
2. Критерий (6) принимает конечное значение, и выполнены условия

$$\mathbb{E} \int_{t_0}^{t} \|X(s)\|^4 ds < +\infty, \quad \mathbb{E} \int_{t_0}^{t} \|u(s, X(s))\|^4 ds < +\infty, \quad t \geqslant t_0.$$

Задачей оптимальной стабилизации по части координат будем называть задачу поиска стратегии управления $\overline{u}$ такой, что найдется допустимый процесс управления $\overline{z} = (\overline{X}, \overline{u}) \in \widetilde{\mathcal{D}}$, который будет минимизировать критерий (6),

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \widetilde{\mathcal{D}}} J(z).$$

На модельном примере сравним данную задачу с задачей оптимальной стабилизации.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений и критерий качества управления:

$$dX_1(t) = -\frac{1}{2}X_1(t)dt + u\big(t, X(t)\big)dW(t), \tag{22}$$

$$dX_2(t) = \left(\frac{1}{2}X_2(t) + u\big(t, X(t)\big)\right)dt, \quad X(0) = (1\ 1)^{\mathrm{T}}, \tag{23}$$

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\big(X_1^2(s) + u^2\big(s, X(s)\big)\big)\,ds, \tag{24}$$

где $t \geqslant 0$ – время; $X = (X_1\ X_2)^{\mathrm{T}}$ – случайный процесс со значениями в R^2; W – одномерный стандартный винеровский процесс; $(t,x) \mapsto u(t,x) : R \times R^2 \to$ $\to R$ – стратегия управления; $z = (X, u)$ – процесс управления.

При помощи теоремы получим решение задачи оптимальной стабилизации. Матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются совместным решением уравнений (13), (14). При этом матрица M – положительно определена. Покажем, что стратегия управления $u(t,x) = -Lx$ является стабилизирующей. Уравнение для матрицы вторых моментов $K(t) \in R^{2\times 2}$ вектора состояния $X(t)$ замкнутой системы (22), (23) имеет вид [16]

$$\frac{d}{dt}K(t) = -K(t) + \begin{pmatrix} K_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{12}(t) & K_{22}(t) \end{pmatrix}, \ K(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное уравнение можно переписать в виде векторного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\mathrm{vech}[K(t)] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathrm{vech}[K(t)],$$

$$\mathrm{vech}[K(t)] := \big(K_{11}(t) \quad K_{12}(t) \quad K_{22}(t)\big)^{\mathrm{T}}.$$

Полученное уравнение является асимптотически устойчивым, следовательно, стратегия управления $u(t,x) = -Lx$ является стабилизирующей. Учитывая следствие, критерий примет значение

$$J(z) = 3,$$

где $z = (X, u)$; $u(t,x) = -Lx$; X – решение уравнений (22), (23) с заданными стратегией управления и начальным условием.

Теперь решим задачу оптимальной стабилизации по части координат системы (22), (23) с критерием (24). Существенным отличием задачи оптимального управления от задачи оптимальной стабилизации является то, что управляемый случайный процесс X может не удовлетворять требованиям (5). Воспользуемся фактом, что X_2 не входит явно ни в критерий, ни в уравнение для X_1. Задача сводится к задаче оптимальной стабилизации уравнения (22) с критерием (24):

$$dX_1(t) = -\frac{1}{2}X_1(t)dt + u\big(t, X_1(t)\big)dW(t),\ X_1(0) = 1, \tag{25}$$

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\Big(X_1^2(s) + u^2\big(s, X_1(s)\big)\Big)ds.$$

Используя условия теоремы, находим оптимальный стабилизирующий регулятор $\widetilde{u}$ и соответствующую величину $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{u}(t,x) \equiv 0, \quad \widetilde{M} = 1.$$

Найденная стратегия управления обеспечивает устойчивость уравнения (25), а значение критерия для процесса управления $\widetilde{z} = (\widetilde{X}_1, \widetilde{u})$ равно $J(\widetilde{z}) = 1$.

Замечание 6. Тот факт, что найдена стратегия управления $\widetilde{u}$, которая обеспечивает лучшее значение критерия, чем оптимальная стабилизирующая стратегия u при фиксированном начальном условии, не противоречит полученным условиям оптимальности. Действительно, пусть P_0 – вероятностная мера, которая сконцентрирована в точке $X_0 = (1\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\widetilde{X}$ – решение уравнений (22), (23) со стратегией управления $\widetilde{u}$ и начальным условием X_0. Легко видеть, что компонента $\widetilde{X}_2(t)$ неограниченно возрастает на бесконечности. Поэтому процесс управления $\widetilde{z} = (\widetilde{X}, \widetilde{u})$ не принадлежит множеству $\mathcal{D}_{P_0}$ и условие (7) не нарушается.

6. Оптимальная стабилизация спутника на круговой орбите

В качестве демонстрации рассмотрим задачу оптимальной стабилизации движения спутника по круговой орбите.

Пример 2. Рассматривается плоское движение искусственного спутника вокруг центра масс Земли в окрестности заданной круговой орбиты. Предполагается, что управление реализуется при помощи двигателя, вектор тяги которого всегда направлен по касательной к круговой орбите движения спутника и может непрерывно изменяться, в том числе может менять знак. Линеаризованные уравнения движения спутника в окрестности опорной траектории движения по круговой орбите радиуса r_0 имеют вид [22]:

$$
\begin{aligned}
&d\Delta r(t) = \Delta V_R(t)dt,\\
&d\Delta V_R(t) = (\omega_0^2\Delta r(t) + 2\omega_0\Delta V_T(t))dt,\\
&d\Delta V_T(t) = (-\omega_0\Delta V_R(t) + u(t, X(t)))dt + \xi u(t, X(t))dW(t),\\
&d\Delta l(t) = (-\omega_0\Delta r(t) + \Delta V_T(t))dt,\\
&X(0) = X_0,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где $t \geqslant 0$ – время; $\omega_0 = \sqrt{\frac{Gm}{r_0^3}}$ – угловая скорость движения спутника по заданной опорной траектории, G – гравитационная постоянная, m – масса Земли; $X = (\Delta r, \Delta V_R, \Delta V_T, \Delta l)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния системы, $\Delta r(t) = r(t) - r_0$ – отклонение расстояния $r(t)$ между спутником и центром масс Земли от радиуса заданной опорной траектории r_0, $\Delta V_R(t)$ – нормальная составляющая скорости движения спутника, $\Delta V_T(t) = \big(V_T(t) - v_0\big)$ – отклонение тангенциальной составляющей скорости движения спутника $V_T(t)$ от скорости движения $v_0 = \omega_0 r_0$ по заданной опорной траектории; $\Delta l(t)$ – отклонение спутника от заданной опорной траектории вдоль круговой орбиты; $u(t, x)$ – стратегия управления (величина прямо пропорциональная тяге двигателя). Правая часть системы (26) содержит случайные возмущения $\xi u(t, X(t))dW(t)$, которые имеют смысл мультипликативных ошибок управления [23]. Мультипликативная ошибка управления уменьшается при уменьшении тяги двигателя и становится равной нулю при выключении двигателя. Часто используемая аддитивная ошибка меньше соответствует физическому смыслу происходящих процессов.

Критерий качества управления имеет вид

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \left(\Delta r(s)^2 + \Delta V_R(s)^2 + \Delta V_T(s)^2 + \Delta l(s)^2 + u(s, X(s))^2\right) ds.$$

Были заданы следующие параметры системы: радиус орбиты $r_0 = 6{,}871 \cdot 10^6$ м, интенсивность возмущений $\xi = 10^{-4}$.

Матрицы M и L были найдены численным решением уравнений (13), (14). В результате

$$M = \begin{pmatrix} 91{,}2985 & 4{,}1182\cdot 10^4 & 0{,}6343 & -90{,}7549\\ 4{,}1182\cdot 10^4 & 2{,}4695\cdot 10^7 & 286{,}9913 & -54500{,}7739\\ 0{,}6343 & 286{,}9913 & 0{,}8602 & -0{,}3162\\ -90{,}7549 & -54500{,}7739 & -0{,}3162 & 120{,}5546 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}6343 & 286{,}9913 & 0{,}8602 & -0{,}3162 \end{pmatrix},$$

и значение критерия равно $J(z) = 2{,}4682 \cdot 10^7$.

Найденный регулятор $u(t, x) = -Lx$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем квадратичном системы (26) и вместе с матрицей M является решением уравнений (13), (14), следовательно является оптимальным стабилизирующим регулятором.

7. Заключение

Рассмотрена задача оптимальной стабилизации квазилинейной стохастической системы на неограниченном интервале времени. При достаточно широких предположениях о системе управления и критерии качества получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора в широком классе допустимых управлений. На модельном примере продемонстрировано отличие изучаемой проблемы от задачи оптимальной стабилизации по части координат. Практическая значимость результата показана на примере задачи стабилизации искусственного спутника Земли в окрестности заданной круговой орбиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Panossian H.V.* Review of Linear Stochastic Optimal Control Systems and Applications // J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des. 1989. V. 111. No. 4. P. 399–403.
2. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. Мир, 1972.
3. *Shuping Chen, Xunjing Li, Xun Yu Zhou.* Stochastic Linear Quadratic Regulators with Indefinite Control Weight Costs // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1685–1702.
4. *Shuping Chen, Xun Yu Zhou.* Stochastic Linear Quadratic Regulators with Indefinite Control Weight Costs // SIAM J. Control Optim. 2000. V. 39. No. 4. P. 1065–1081.
5. *M. Ait Rami, Moore J.B., Xun Yu Zhou.* Indefinite Stochastic Linear Quadratic Control and Generalized Differential Riccati Equation // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 40. No. 4. P. 1296–1311.
6. *Arnold L.* Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. N.Y.: John Wiley & Sons, 1974.
7. *Wonham W.M.* Optimal Stationary Control of a Linear System with State-Dependent Noise // SIAM J. Control. 1967. V. 5. No. 3. P. 486–500.
8. *Haussmann U.G.* Optimal Stationary Control with State Control Dependent Noise // SIAM J. Control. 1971. V. 9. No. 2. P. 184–198.
9. *McLane P.J.* Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State- and Control-Dependent Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 793–798.
10. *Laurent El Ghaoui.* State-Feedback Control of Systems with Multiplicative Noise via Linear Matrix Inequalities // Syst. & Control Lett. 1995. V. 24. No. 3. P. 223–228.
11. *Verriest E.I., Florchinger P.* Stability of Stochastic Systems with Uncertain Time Delays // Syst. & Control Lett. 1995. V. 24. No. 1. P. 41–47.
12. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. Библиотека технической кибернетики. М: Сов. радио, 1976.
13. *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М., Царьков К.А.* Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 74–86.

   Rumyantsev D.S., Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. An Algorithm for Synthesis of the Suboptimal Control Law for Quasi-Linear Stochastic Dynamical Systems // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2014. V. 53. No. 1. P. 71–83.

14. *Willems J.L., Willems J.C.* Feedback Stabilizability for Stochastic Systems with State and Control Dependent Noise // Automatica. 1976. V. 12. No. 3. P. 277–283.

15. *Kleinman D.L.* Optimal Stationary Control of Linear Systems with Control-Dependent Noise // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. V. 14. No. 6. P. 673–677.

16. *Damm T.* Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Berlin–Heidelberg: Springer, 2004.

17. *Хрусталёв М.М., Онегин Е.Е.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Программные системы: теория и приложения. 2015. Т. 6. № 2. С. 29–44.

18. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.

19. *Хрусталёв М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 6. С. 194–208.

20. *Хрусталёв М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 1. С. 72–79.

21. *Халина А. С., Хрусталёв М. М.* Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 65–88.

    Khalina A.S., Khrustalev M.M. System Shape Optimization and Stabilization of Controlled Quasi-Linear Stochastic Systems that Operate on an Infinite Time Interval // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. V. 56. No. 1. P. 64–86.

22. *Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М: Машиностроение, 1974.

23. *Лебедев А.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов. М: Машиностроение, 1985.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 01.02.2018

После доработки 20.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018