*Автоматика и телемеханика, № 7, 2019*

# *Интеллектуальные системы управления, анализ данных*

© 2019 г. **М.А. ГОРЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук** (griefer@ccas.ru)
**(Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва)**

## УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГРАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФАКТОРАМИ

Рассматривается теоретико-игровая модель типа Центр–агент, в которой результат деятельности агента зависит не только от его выбора, но еще и от некоторого случайного фактора. Предполагается, что Центр выбирает суммарную вероятность негативных событий, которые Центр готов исключить из рассмотрения, а в остальном он осторожен. Выясняется структура оптимальных стратегий Центра. Рассмотрены две модели, отличающиеся информированностью Центра о действиях партнера.

*Ключевые слова*: теория принятия решений, иерархические системы, управление рисками, игры со случайными факторами, принцип "Value at Risk".

**DOI:** 10.1134/S0005231019070043

### 1. Введение

Управление рисками – одна из древнейших задач экономики. Традиционно риск связывают с наличием случайных факторов, влияющих на результат деятельности лица, принимающего решения (оперирующей стороны). В большинстве интересных случаев минимизация риска не является основной целью операции. Чаще всего имеется другая цель, например получение дохода. Таким образом, задача управления рисками – это двухкритериальная задача.

Математические методы начали активно проникать в экономику в середине XX в. Примерно в то же время появились модели управления рисками.

Видимо, одной из первых была модель формирования инвестиционного портфеля[1] Г. Марковица [1]. Риск в этой модели измерялся величиной среднеквадратического отклонения дохода оперирующей стороны от его математического ожидания. Поскольку при таком определении и ожидаемый выигрыш, и риск оцениваются в одних единицах, то в данном случае достаточно естественно выглядит линейная свертка критериев. Такого рода модели активно исследовались и позднее (см., например, библиографию в [2]).

[1] Задачи принятия решений на финансовых рынках проще поддаются формализации. Поэтому не удивительно, что модели управления рисками активнее всего развиваются в финансовой теории.

Другой разумный способ определения риска состоит в следующем. Пусть оперирующая сторона соглашается пренебречь неким числом “неблагоприятных” событий, суммарная вероятность которых не превосходит заданной величины $1 - \xi$. Тогда за меру риска можно принять эту вероятность $1 - \xi$. В данном случае ожидаемый выигрыш и риск имеют разную размерность, поэтому разумен иной способ свертки критериев. Можно, например, искать максимум гарантированного выигрыша при заданной величине риска. Такое отношение к риску получило название принципа “Value at Risk”. Такие модели тоже активно исследуются [3–5].

Но все изложенное относится лишь к моделям, в которых присутствует один субъект, принимающий решения. Естественное обобщение этой задачи – игры в условиях риска. Такие модели появились тоже достаточно давно.

Много публикаций посвящено изучению моделей конфликтного взаимодействия равноправных игроков. Сюда относится, например, концепция равновесия Байеса-Нэша [6–9].

Активно исследовались и модели с иерархией: в теории контрактов [10, 11], теории иерархических игр [12–14] и в теории активных систем [15–18].

Эти три направления возникли независимо одно от другого, поэтому “основные” интерпретации вводимых конструкций отличаются. Так в теории контрактов в вероятностных терминах описываются представления Центра о “типах” агентов, а в теории иерархических игр стохастика интерпретируется как наличие внешнего неопределенного фактора. При этом математические задачи получаются эквивалентными.

В данной статье используются интерпретации, более распространенные отечественных публикациях.

Впрочем, есть специфика и в выборе “базовых” моделей, на которых проверяется предлагаемая техника. Например, в теории иерархических игр в основном используются модели, в которых выигрыш верхнего уровня не зависит явно от случайного фактора. В теории контрактов эта зависимость есть, но при этом делается некое специальное предположение о характере этой зависимости. Сразу же заметим, что отказ от этого предположения приводит к более сложным задачам, решить которые пока не удается. Поэтому то, что такое предположение найти удалось, является большой “заслугой” теории контрактов. В данной статье это предположение активно используется.

Но практически во всех теоретико-игровых моделях игроки предполагаются риск-нейтральными, т.е. готовыми ориентироваться на математическое ожидание своих выигрышей. Естественно попытаться как-то иначе учесть наличие риска при конфликтном взаимодействии. Одна из таких попыток была предпринята в [19].

В данной статье исследуется одна из простейших моделей типа Центр–агент (Principal–agent). Для описания отношения к риску Центра используется принцип “Value at Risk”. Рассматриваются две модели. В одной Центр не имеет информации о действиях агента, а в другой Центр получает информацию о результатах работы агента.

## 2. Две игры

Начнем с описания более простой игры.

В игре принимают участие два игрока. По традиции будем называть их первым и вторым. Первый из них выбирает свое управление $u$ из множества $U$, а второй – управление $v$ из множества $V$. На исход игры влияет еще значение некоторого фактора $\alpha$, не контролируемого ни одним из игроков. Неопределенный фактор $\alpha$ принимает значение из множества $A$. Будем предполагать, что на множестве $A$ задана вероятностная мера $\wp$, известная первому игроку.

Если второй игрок выберет управление $v \in V$ и реализуется значение неопределенного фактора $\alpha$, то на выходе получится некий результат $x = f(v, \alpha) \in X$. Если при этом первый игрок выберет управление $u \in U$, то его выигрыш составит величину $q\,(u, x)$, а выигрыш второго игрока будет равен $h\,(u, v, \alpha)$.

Простейшая интерпретация данных конструкций такова. Допустим, второй игрок занимается производством сельскохозяйственной продукции. Объем произведенной продукции $x$ зависит от распределения его ресурсов $v$ и погодных условий, которые описываются значением фактора $\alpha$. Первый игрок назначает цены, по которым он готов приобрести у партнера произведенную продукцию. Его выигрыш определяется полезностью приобретенной продукции и затратами на ее покупку. Выигрыш второго игрока зависит от его затрат $v$, комфортности погоды и дохода от продажи произведенной продукции.

В теории контрактов рассмотрено много более конкретных моделей, которые хорошо укладываются в описанную схему и имеют более содержательную интерпретацию [10, 11]. Для понимания дальнейшего достаточно уже изложенного.

Будем предполагать, что множества $U, V, X$ и $A$ наделены топологиями и компактны. Множества $U, V$ и $A$ будем считать компактными в этих топологиях, а функции $f : V \times A \to X$, $q : U \times X \to \mathbb{R}$ и $h : U \times V \times A \to \mathbb{R}$ – непрерывными. В этих предположениях, не ограничивая общности, множество $X$ можно тоже считать компактным. Меру $\wp$ на множестве $A$ будем считать борелевской.

*Замечание 1.* Вероятно, эти предположения можно ослабить. Однако это значительно усложняет техническую часть работы (см. леммы 1–3). Содержательных соображений, по которым предположения казались бы очень ограничительными, пока нет. Поэтому вряд ли стоит стремиться к большей общности.

Если определить функцию $g : U \times V \times A \to \mathbb{R}$ условием

$$g\,(u, v, \alpha) = q\,(u, f\,(v, \alpha))\,, \tag{1}$$

то получим стандартную игру со случайным фактором $\Gamma = \langle U, V, A, g, h, \wp \rangle$. Условие (1) задает некоторую дополнительную структуру этой игры, которая будет использоваться в дальнейшем.

Опишем вторую модель. Будем считать, что при тех же общих предположениях первый игрок в момент принятия решения о выборе своего управления $u$ будет иметь информацию о полученном вторым игроком результате $x$. Кроме того, второй игрок может передать ему некую информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора. Но эта информация не обязана быть достоверной, и первый игрок не может ее проверить. Тогда можно полагать, что первый игрок заранее фиксирует некую функцию $u_*$, принадлежащую множеству $U_*$ всех функций из множества $X \times A$ в множество $U$. И если такая функция $u_*$ будет выбрана первым игроком, он получит от партнера информацию о том, что реализовалось значение неопределенного фактора $\beta$, и будет получен результат $x$, то автоматически будет выбрано управление $u_* (x, \beta) \in U$. Соответственно игроки получат выигрыши $q (u_* (x, \beta), x)$ и $h (u_* (x, \beta), v, \alpha)$.

*Замечание 2.* Может вызвать вопросы включение в рассматриваемую схему обмена информацией передачу недостоверного сообщения $\beta$. В пользу этого можно привести два аргумента. Во-первых, не понятно, почему нужно и как можно запретить игрокам обмениваться такой информацией, если им это выгодно. И как можно проконтролировать выполнение такого запрета. А во-вторых, при отказе от такого обмена на этапе постановки, обмен будет возникать в структуре оптимальных стратегий. Это существенно осложняет анализ модели. А кроме того, решение будет существенно зависеть от "тонкой" топологической структуры множества $V$. Это заметно обострит вопрос об адекватности построенной модели.

Достаточно естественную интерпретацию также предложить несложно. Можно считать, что первый игрок (начальник) выплачивает вознаграждение второму игроку (сельхозпроизводителю) в зависимости от объема произведенной продукции. Все остальные детали интерпретации первой модели остаются неизменными.

Формализуем сказанное. Пусть $\Phi (Y, Z)$ обозначает класс всех функций из множества $Y$ в множество $Z$. Тогда $U_* = \Phi (X \times A, U)$. Второй игрок выбирает управление $v \in V$ и сообщение $\beta \in A$, поэтому множество его стратегий представляет декартово произведение $V_* = V \times A$. Определим функции

$$g_* : U_* \times V_* \times A \to \mathbb{R} \quad \text{и} \quad h_* : U_* \times V_* \times A \to \mathbb{R}$$

условиями

$$g_* (u_*, v_*, \alpha) = g (u_* (f (v, \alpha), \beta), f (v, \alpha))$$

и

$$h_* (u_*, v_*, \alpha) = h (u_* (f (v, \alpha), \beta), v, \alpha),$$

где $v_* = (v, \beta)$.

Тогда вновь получим игру со случайным фактором

$$\Gamma_* = \langle U_*, V_*, A, g_*, h_*, \wp \rangle.$$

От игры $\Gamma$ она отличается другой дополнительной структурой.

## 3. Принцип оптимальности

Для замыкания модели остается задать порядок взаимодействия игроков и их отношение к неопределенности. Рассмотрим часто встречающийся на практике и наиболее изученный случай. Эти конструкции не зависят от дополнительной структуры, поэтому одинаковы для обеих игр, описанных в разделе 2.

Будем исходить из того, что игрок номер один обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает стратегию $u$, и этот выбор становится известным партнеру. Кроме того, будем считать, что второму игроку в момент принятия решения о выборе своего управления $v$ становится известным реализовавшееся значение неопределенного фактора $\alpha$. В этих условиях второй игрок принимает решения в условиях полной информированности, поэтому если функция $h$ действительно описывает его интересы, он выберет свое управление из множества

$$BR\,(u,\alpha) = \left\{ v \in V : h\,(u,v,\alpha) = \max_{w \in V} h\,(u,w,\alpha) \right\}.$$

Проблема возникает, если максимум в этой формуле не достигается. Поэтому поступим традиционным образом: доопределим отображение $BR\,(u,\alpha)$ на такой случай условием

$$BR\,(u,\alpha) = \left\{ v \in V : h\,(u,v,\alpha) \geqslant \sup_{w \in V} h\,(u,w,\alpha) - \kappa \right\},$$

где $\kappa$ – некоторое фиксированное положительное число. Из дальнейшего будет видно, что от числа $\kappa$, да и вообще от способа доопределения мало что зависит.

При сделанных предположениях первый игрок может с основанием рассчитывать на то, что его партнер выберет управление из множества $BR\,(u,\alpha)$. А поскольку “в пределах этого множества” выигрыши второго игрока “практически одинаковы”, то еще как-то повлиять на его выбор первый игрок не может. Этот выбор, а значит, и выигрыш первого игрока, разумеется, зависит от неизвестного ему значения неопределенного фактора. Предположим, что первый игрок готов исключить из рассмотрения некоторое число “маловероятных” значений этого фактора, а в остальном осторожен.

Более точно, будем считать, что первый игрок выбирает некоторое число $\xi \in [0,1]$ и желает, чтобы при разумном поведении партнера его гарантированный выигрыш “с вероятностью $\xi$” был как можно больше. Число $\xi$ описывает склонность первого игрока к риску. Формализуются изложенные соображения следующим образом.

*Определение 1. Максимальным $\xi$-гарантированным результатом первого игрока в игре $\Gamma$ называется число*

$$R\,(\Gamma,\xi) = \sup_{B} \sup_{u \in U} \inf_{\alpha \in B} \inf_{v \in BR(u,\alpha)} g\,(u,v,\alpha)\,,$$

*где первый супремум берется по классу всех измеримых подмножеств $B$ множества $A$, для которых $\wp\,(B) \geqslant \xi$.*

*З а м е ч а н и е 3.* Может вызвать какие-то возражения требование измеримости множества $B$ в этом определении. Можно поменять постановку, заменив меру $\wp$ в условии $\wp\,(B) \geqslant \xi$ соответствующей внешней мерой и отказавшись от условия измеримости. Из дальнейшего (см. леммы 2 и 3) будет видно, что в обоих случаях результат будет одним и тем же. Поэтому был выбран чуть более простой вариант постановки.

Для работы бывает удобнее эквивалентное условие, которое тоже оформим в виде определения. Но вновь начнем с содержательной интерпретации.

Поскольку второй игрок принимает свое решение в условиях полной информации, естественно предположить, что для него все выборы разбиваются на "рациональные" и "нерациональные". Можно считать, что это разбиение происходит по пороговому принципу, т.е. существует такое число $\lambda$, что "нерациональными" являются те и только те выборы, для которых выигрыш второго игрока меньше $\lambda$. Разумеется, значение $\lambda$ зависит от условий, в которых второй игрок принимает решение, т.е. от $u$ и $\alpha$. Как и ранее, будем полагать, что первый игрок желает, чтобы с вероятностью $\xi$ при рациональном поведении партнера его выигрыш был достаточно хорош. Это приводит к следующему определению.

*О п р е д е л е н и е 2. Число $\gamma$ называется $\xi$-гарантированным результатом первого игрока в игре $\Gamma$, если существуют измеримое подмножество $B$ множества $A$, удовлетворяющее неравенству $\wp\,(B) \geqslant \xi$, и такая стратегия $u \in U$, что для любого $\alpha \in B$ найдется число $\lambda$, для которого выполняются условия:*

*$1^\circ$. существует $w \in V$, для которого $h\,(u, w, \alpha) \geqslant \lambda$;*

*$2^\circ$. для любого $v \in V$ либо $g\,(u, v, \alpha) \geqslant \gamma$, либо $h\,(u, v, \alpha) < \lambda$.*

*Точная верхняя грань $R'\,(\Gamma, \xi)$ всех $\xi$-гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным $\xi$-гарантированным результатом.*

Использование одного термина для обозначения двух величин оправдано только в том случае, когда эти величины совпадают. В общем случае это, конечно же, не так, поскольку в "плохих" играх величина $R\,(\Gamma, \xi)$ зависит от $\kappa$, а величина $R'\,(\Gamma, \xi)$ – не зависит. Но в "хороших" играх эти величины действительно совпадают. В моделях, рассматриваемых в данной статье, это действительно так.

А именно: справедливо следующее утверждение.

*Л е м м а 1. При сделанных топологических предположениях выполняются равенства $R\,(\Gamma, \xi) = R'\,(\Gamma, \xi)$ и $R\,(\Gamma_*, \xi) = R'\,(\Gamma_*, \xi)$.*

Доказательство леммы 1 приводится в Приложении.

Далее будем пользоваться равенством величин $R\,(\Gamma, \xi)$ и $R'\,(\Gamma, \xi)$ без особых оговорок, используя для них обозначение $R\,(\Gamma, \xi)$. То же относится и к игре $\Gamma_*$.

## 4. Игра без обратной связи

Обратимся к анализу игры Г. В определении максимального гарантированного результата для этой игры присутствует одна "неэлементарная" операция. В определении 1 – это супремум по классу всех измеримых подмножеств $B$ множества $A$, а в определении 2 ему соответствует квантор общности по тому же классу. Цель данного раздела состоит в том, чтобы заменить эту операцию “элементарной” операцией вычисления математического ожидания.

Поскольку в настоящей статье рассматривается только одна вероятностная мера $\wp$, будем обозначать операцию вычисления математического ожидания по этой мере просто символом $\mathrm{M}$.

Введем обозначение

$$m(u, \alpha) = \max_{v \in V} h(u, v, \alpha).$$

Удобно воспользоваться определением 2. Пусть для некоторых $u, w, \alpha$ и $\lambda$ выполняется неравенство $h\,(u, w, \alpha) \geqslant \lambda$, как предусмотрено п. $1^\circ$ определения 2. Тогда тем более выполняется неравенство $\max\limits_{v \in V} h(u, v, \alpha) \geqslant \lambda$, т.е. $m\,(u, \alpha) \geqslant \lambda$. Обратно: если $m\,(u, \alpha) \geqslant \lambda$, то п. $1^\circ$ определения 2 заведомо будет выполнен (достаточно взять любое $w$, удовлетворяющее условию $h\,(u, w, \alpha) = \max\limits_{v \in V} h(u, v, \alpha)$). А п. $2^\circ$ этого определения выполнить тем легче, чем больше величина $\lambda$. Поэтому можно, не уменьшая общности, считать, что $\lambda = m\,(u, \alpha)$.

Но тогда для всех $v \in BR\,(u, \alpha)$ выполняется условие $h(u, v, \alpha) = \lambda$, а, следовательно, в силу п. $2^\circ$ определения 2 должно быть справедливо неравенство $g\,(u, v, \alpha) \geqslant \gamma$ по крайней мере для $\alpha \in B$. Последнее условие можно переписать так: для всех $\alpha \in B$ справедливо неравенство

$$\min_{v \in BR(u, \alpha)} g\,(u, v, \alpha) \geqslant \gamma. \tag{2}$$

Определим множество

$$C(u) = \left\{ \alpha \in A : \min_{v \in BR(u, \alpha)} g(u, v, \alpha) \geqslant \gamma \right\}.$$

Справедливо следующее техническое утверждение.

*Лемма 2. Множество $C\,(u)$ измеримо.*

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

Если множество $B$ и стратегия $u$ удовлетворяют условию определения 2, то в силу неравенства (2) выполнено включение $B \subset C\,(u)$ и, следовательно, справедливо неравенство $\wp\,(C\,(u)) \geqslant \wp\,(B) \geqslant \xi$.

И наоборот: если для некоторого $u$ выполнено неравенство $\wp\,(C\,(u)) \geqslant \xi$, то число $\gamma$ является $\xi$-гарантированным результатом, поскольку можно взять $B = \wp\,(C\,(u))$, $\lambda = m\,(u, \alpha)$ и $w$, выбрать удовлетворяющее условию $h\,(u, w, \alpha) = \max\limits_{v \in V} h(u, v, \alpha)$.

Определим функцию $\theta\,(x)$, положив

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда мера множества $C(u)$ равна $\mathrm{M}\theta\left(\min\limits_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v)-\gamma\right)$. Отсюда немедленно получается следующее утверждение.

*Теорема 1. Число $\gamma$ является $\xi$-гарантированным результатом тогда и только тогда, когда либо*

$$\max_{u\in U}\mathrm{M}\theta\left(\min_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v)-\gamma\right)\geqslant\xi$$

*и максимум в этой формуле достигается, либо*

$$\sup_{u\in U}\mathrm{M}\theta\left(\min_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v)-\gamma\right)>\xi.$$

*Замечание 4.* Естественно возникает вопрос: а что будет, если разрешить игрокам обмениваться не обязательно достоверной информацией о неопределенном факторе. Задача вычисления $\xi$-гарантированного результата в такой игре легко сводится к только что решенной. Можно просто рассмотреть игру, в которой $V=V'\times A$ и $f((u',\beta),\alpha)=(f'(u',\alpha),\beta)$, где $u'\in U$ и $\beta\in A$. Обратную редукцию, видимо, провести невозможно. Кроме того, формулы при рассмотрении более общего случая получаются чуть белее короткими. Поэтому была рассмотрена именно такая модель.

Понятно, что добавление новых возможностей (по получению информации) не может уменьшить $\xi$-гарантированный результат первого игрока. Привести пример, когда результат увеличивается, совсем не сложно. Можно рассмотреть случай, когда интересы игроков совпадают, т.е. $h(u,v,\alpha)=q(u,f(v,\alpha))$. Тогда в случае "общего положения" дополнительный обмен информацией будет приносить первому игроку не нулевую прибыль.

## 5. Игра с обратной связью

Перейдем к исследованию игры $\Gamma_*$. В определении максимального гарантированного результата для этой игры присутствуют две "неэлементарные" операции. Помимо выбора множества $B$, таковым является выбор стратегии первого игрока, поскольку множество его стратегий $U_*=\Phi(X\times A,U)$ – это функциональное пространство.

Как и ранее, целью исследования будет замена этих операций более простыми. К сожалению, в полном объеме эту задачу решить не удается. Поэтому сделаем дополнительное предположение.

*Гипотеза 1.* Функция $h$ удовлетворяет следующему условию: существует такое $u^p\in U$, что для любого $\alpha\in A$ и любого $v\in V$ имеет место равенство

$$h(u^p,v,\alpha)=\min_{u\in U}h(u,v,\alpha).$$

По существу, здесь предполагается наличие универсальной стратегии наказания. Такого рода гипотезы довольно часто используются и в теории контрактов, и в теории иерархических игр. На практике системы, удовлетворяющие этому условию, встречаются довольно часто. Если рассматривать приведенную в разделе 2 интерпретацию, то это предположение сводится к тому, что первый игрок может вовсе не выплачивать своему подчиненному вознаграждение независимо от полученных результатов. Предположение вполне реалистичное.

Приступим к решению поставленной задачи. Удобно воспользоваться определением 2. Для краткости запишем его на языке исчисления предикатов.

Число $\gamma$ является $\xi$-гарантированным результатом в игре $\Gamma_*$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\begin{gathered}\exists B\ \exists u_* \in \Phi(X \times A, U)\ \forall \alpha \in B\ \exists \lambda\ \wp(B) \geqslant \xi\ \& \\ \&\ [\exists w \in V\ \exists \varsigma \in A : h\left(u_*\left(f\left(w, \alpha\right), \varsigma\right), w, \alpha\right) \geqslant \lambda]\ \& \\ \&\ [\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), f\left(v, \alpha\right)\right) \geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), v, \alpha\right) < \lambda]\,.\end{gathered} \tag{3}$$

Как и в разделе 4, начнем с конкретизации значения $\lambda$. Пусть

$$H\left(\alpha, \gamma\right) = \left\{(u, v) \in U \times V : q\left(u, f\left(v, \alpha\right)\right) \geqslant \gamma\right\},$$

$$l\left(\alpha, \gamma\right) = \max_{(u,v)\in H(\gamma,\alpha)} h\left(u, v, \alpha\right)$$

(далее удобно использовать стандартное предположение $l\left(\alpha, \gamma\right) = -\infty$, если $H\left(\alpha, \gamma\right) = \emptyset$).

Докажем, что условие (3) равносильно условию

$$\begin{gathered}\exists B\ \exists u_* \in \Phi(X \times A, U)\ \forall \alpha \in B\ \wp(B) \geqslant \xi\ \& \\ \&\ [\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), f\left(v, \alpha\right)\right) \geqslant \gamma \vee \\ \vee\ h\left(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), v, \alpha\right) < l\left(\alpha, \gamma\right)]\,.\end{gathered} \tag{4}$$

Пусть условие (3) выполнено. Тогда существуют множество $B \subset A$ и стратегия $u_* \in U_*$, для которых $\wp(B) \geqslant \xi$ и

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in B\ \exists \lambda\ [\exists w \in V\ \exists \varsigma \in A : h\left(u_*\left(f\left(w, \alpha\right), \varsigma\right), w, \alpha\right) \geqslant \lambda]\ \& \\ \&\ [\forall v \in V, \forall \beta \in A\ q(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), f\left(v, \alpha\right)) \geqslant \gamma \vee h(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), v, \alpha) < \lambda]\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Фиксируем произвольное $\alpha \in B$ и подберем число $\lambda$ так, что

$$\begin{gathered}[\exists w \in V\ \exists \varsigma \in A : h\left(u_*\left(f\left(w, \alpha\right), \varsigma\right), w, \alpha\right) \geqslant \lambda]\ \& \\ \&\ [\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q(u_*(f\left(v, \alpha\right), \beta), f\left(v, \alpha\right)) \geqslant \gamma \vee h\left(u_*(f\left(v, \alpha\right), \beta), v, \alpha\right) < \lambda]\,.\end{gathered} \tag{6}$$

Если $w \in V$ и $\varsigma \in A$ удовлетворяют первой части условия (6), то в силу второй части этого условия верно неравенство

$$q\left(u_*\left(f\left(w, \alpha\right), \varsigma\right), f\left(w, \alpha\right)\right) \geqslant \gamma.$$

Значит, пара $\left(u_*\left(w, \varsigma\right), w\right)$ принадлежит множеству $H\left(\alpha, \gamma\right)$, и потому

$$h\left(u_*\left(f\left(w, \alpha\right), \varsigma\right), w, \alpha\right) \leqslant l\left(\alpha, \gamma\right).$$

В сочетании с неравенством из первой части условия (6) это дает $\lambda \leqslant l\left(\alpha, \gamma\right)$. А тогда из второй части условия (6) следует, что

$$\begin{gathered}\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), f\left(v, \alpha\right)\right) \geqslant \\ \geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v, \alpha\right), \beta\right), v, \alpha\right) < l\left(\alpha, \gamma\right).\end{gathered}$$

В силу произвольности $\alpha \in B$ получим отсюда, что

$$\forall \alpha \in B,\ \forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\alpha\right)\right) \geqslant \\ \geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v,\alpha\right) < l\left(\alpha,\gamma\right),$$

и тем более выполняется условие (4).

Итак, из условия (3) следует условие (4). Докажем обратное. Пусть условие (4) выполнено.

Тогда существуют множество $B \subset A$ и стратегия $\omega_* \in U_*$, для которых $\wp\left(B\right) \geqslant \xi$ и

$$\forall \alpha \in B,\ \forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(\omega_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\alpha\right)\right) \geqslant \gamma \vee \\ \vee h\left(\omega_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v,\alpha\right) < l\left(\alpha,\gamma\right). \tag{7}$$

Подправим функцию $\omega_*$. Для каждого $\alpha \in A$ фиксируем пару управлений $\left(u^\alpha,v^\alpha\right) \in H\left(\alpha,\gamma\right)$, для которой $h\left(u^\alpha,v^\alpha,\alpha\right) = l\left(\alpha,\gamma\right)$. Положим

$$u_*\left(x,\beta\right) = \begin{cases} u^\alpha, & \text{если } x = f\left(v^\alpha,\alpha\right) \text{ и } \beta = \alpha, \\ \omega_*\left(x,\alpha\right) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для этой стратегии $u_*$ и любого $\beta \in A$ выполнено условие

$$\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\alpha\right)\right) \geqslant \\ \geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v,\alpha\right) < l\left(\alpha,\gamma\right). \tag{8}$$

Действительно, фиксируем произвольные $\alpha \in B$, $v \in V$ и $\beta \in A$. Тогда если $u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right) = \omega_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right)$, то из условия (7) немедленно следует, что

$$q\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\alpha\right)\right) \geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v,\alpha\right) < l\left(\alpha,\gamma\right). \tag{9}$$

А если $u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right) \neq \omega_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right)$, то по построению $v = v^\beta$, а, кроме того, $f\left(v,\alpha\right) = f\left(v^\beta,\beta\right)$ и $\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v\right) = u^\beta$. Значит,

$$q\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\beta\right)\right) = q\left(u^\beta,f\left(v^\beta,\beta\right)\right) \geqslant \gamma,$$

и тем более выполняется условие (9). Таким образом, условие (9) выполнено при всех $v \in V$ и $\beta \in A$, а это и дает условие (8).

Кроме того, для этой стратегии $u_*$ и любого $\alpha \in B$ выполняется условие

$$\exists w \in V\ \exists \upsilon \in A : h\left(u_*\left(f\left(w,\alpha\right),\upsilon\right),w,\alpha\right) \geqslant l\left(\alpha,\gamma\right)$$

(можно взять $\upsilon = \alpha$ и $w = v^\alpha$).

Вместе с условием (8) это даст

$$[\exists w \in V\ \exists \varsigma \in A : h\left(u_*\left(f\left(w,\alpha\right),\varsigma\right),w,\alpha\right) \geqslant l\left(\alpha,\gamma\right)]\ \&$$
$$\&\ [\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\alpha\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v,\alpha\right) < l\left(\alpha,\gamma\right)].$$

Поскольку неравенство $\wp(B) \geqslant \xi$ предполагается выполненным, отсюда получим, что

$$\exists \lambda\, \wp(B) \geqslant \xi\ \&\ [\exists w \in V \exists \varsigma \in A : h\left(u_*\left(f\left(w,\alpha\right),\varsigma\right),w,\alpha\right) \geqslant \lambda]\ \&$$
$$\&\ [\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\alpha\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v,\alpha\right) < \lambda]$$

(подходит $\lambda = l(\alpha,\gamma)$). В силу произвольности $\alpha \in B$ из этого следует, что

$$\forall \alpha \in B\ \exists \lambda\, \wp(B) \geqslant \xi\ \&\ [\exists w \in V\ \exists \varsigma \in A : h\left(u_*\left(f\left(w,\alpha\right),\varsigma\right),w,\alpha\right) \geqslant \lambda]\ \&$$
$$\&\ [\forall v \in V,\ \forall \beta \in A\ q\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),f\left(v,\alpha\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \gamma \vee h\left(u_*\left(f\left(v,\alpha\right),\beta\right),v,\alpha\right) < \lambda],$$

и тем более выполняется условие (3).

Итак, $\gamma$ является $\xi$-гарантированным результатом в игре $\Gamma_*$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (4).

Обозначим

$$m(\alpha) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u,v,\alpha).$$

Если выполнено условие (4), то для $\alpha \in B$ должно выполняться неравенство $m(\alpha) \leqslant l(\alpha,\gamma)$.

Действительно, допустим противное. Фиксируем значение $\alpha$, для которого $m(\alpha) > l(\alpha,\gamma)$, и выберем $w$ так, что

$$\min_{u \in U} h(u,w,\alpha) = m(\alpha).$$

Тогда

$$h\left(u_*\left(w,\alpha\right),w,\alpha\right) \geqslant \min_{u \in U} h(u,w,\alpha) = m(\alpha) > l(\alpha,\gamma).$$

Значит, в силу определения функции $l(\alpha,\gamma)$ пара $\left(u_*\left(w,\alpha\right),w\right)$ не принадлежит множеству $H(\alpha,\gamma)$, а, следовательно, $q\left(u_*\left(f\left(w,\alpha\right),\alpha\right),f\left(w,\alpha\right)\right) < \gamma$. Это уже противоречит условию (4).

А если гипотеза 1 справедлива и $m(\alpha) < l(\alpha,\gamma)$ для всех $\alpha \in B$, то условие (4) выполнено.

Для доказательства достаточно предъявить подходящую стратегию $u_*$. Очевидно, что если положить $u_*(x,\beta) \equiv u^p$, то последнее неравенство в условии (4) будет выполнено при всех $\alpha \in B$, $v \in V$ и $\beta \in A$.

Итак, условие

$$\exists B : m(\alpha) \leqslant l(\alpha,\gamma) \tag{10}$$

является необходимым, а условие

$$\exists B : m\,(\alpha) < l\,(\alpha, \gamma) \tag{11}$$

является достаточным для того, чтобы число $\gamma$ было $\xi$-гарантированным результатом в игре $\Gamma_*$.

В формулах (10) и (11) осталось по одной "неэлементарной" операции, для замены которой воспользуемся той же идеей, что и в разделе 4. Для этого понадобится следующее техническое утверждение.

*Лемма 3. Множества* $\{\alpha \in A : m(\alpha) \leqslant l(\alpha, \gamma)\}$ *и* $\{\alpha \in A : m(\alpha) < l(\alpha, \gamma)\}$ *измеримы.*

Доказательство леммы 3 приведено в Приложении.

Обозначим $\vartheta\,(x) = 1 - \theta\,(1 - x)$.

Повторяя рассуждения раздела 4, придем к следующему результату.

*Теорема 2. Для того чтобы число $\gamma$ было $\xi$-гарантированным результатом в игре $\Gamma_*$, необходимо, чтобы*

$$\mathrm{M}\theta \left( \max_{(u,v)\in H(\gamma,\alpha)} h\,(u, v, \alpha) - \max_{v\in V} \min_{u\in U} h\,(u, v, \alpha) \right) \geqslant \xi,$$

*и достаточно, чтобы*

$$\mathrm{M}\vartheta \left( \max_{(u,v)\in H(\gamma,\alpha)} h\,(u, v, \alpha) - \max_{v\in V} \min_{u\in U} h\,(u, v, \alpha) \right) \geqslant \xi.$$

Если достаточное условие из этой теоремы выполнено, то приведенные ранее рассуждения позволяют построить стратегию, гарантирующую получение этого результата с вероятностью $\xi$. Действительно, в качестве множества $B$ можно взять множество $\{\alpha \in A : m\,(\alpha) < l\,(\alpha, \gamma)\}$. Тогда при $\alpha \in B$ множество $H\,(\alpha, \gamma)$ будет не пусто. В таком случае корректно определена функция

$$u_*\,(x, \beta) = \begin{cases} u^\beta, & \text{если } x = f\left(v^\beta, \beta\right),\ \beta \in B, \\ u^p & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что такая стратегия является искомой.

Кроме того, та же непосредственная проверка показывает, что при таком выборе стратегии $u_*$ выполняется включение $(v^\alpha, \alpha) \in BR\,(u_*, \alpha)$. Содержательно это означает, что второму игроку достаточно выгодно сообщать истинную информацию о неопределенном факторе $\alpha$, т.е. в данном случае справедлив известный принцип выявления.

*Замечание 5.* Анализ приведенного доказательства теоремы 2 показывает, что с сохранением результата гипотеза 1 может быть заменена следующим предположением.

*Гипотеза 2.* Функция $h$ удовлетворяет следующему условию: существует такое $u^p \in U$, что для любого $\alpha \in A$ имеет место неравенство

$$\max_{v\in V} h(u^p, v, \alpha) < l\,(\alpha, \gamma)\,.$$

Это условие сложнее, но кажется гораздо менее ограничительным.

Кроме того, анализ того же доказательства показывает, что для того чтобы число $\gamma$ было $\xi$-гарантированным результатом в игре $\Gamma_*$, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: существует такое $u^p \in U$, что для любого $\alpha \in B$ имеет место неравенство

$$\max_{v \in V} h(u^p, v, \alpha) \leqslant l\,(\alpha, \gamma)$$

(без каких-либо дополнительных предположений). Это необходимое условие отличается от гипотезы 2 двумя моментами. Во-первых, в одном условии неравенство строгое, а в другом – нестрогое. Это условие не слишком принципиальное. С возникающими из-за этого трудностями, скорее всего, можно было бы справиться. А, во-вторых, в гипотезе 2 условие распространяется на все $\alpha \in A$, а в необходимом условии говорится об $\alpha$, принадлежащих заранее неизвестному множеству $B$. Вот здесь лежит корень проблем, из-за которых задачу не удается решить в общем виде.

## 6. Заключение

В большинстве публикаций, посвященных исследованию аналогичных моделей, приводятся явные формулы для вычисления максимального гарантированного или максимального ожидаемого результата Центра. В данной статье основной результат состоит в выписывании уравнения, которому удовлетворяет максимальный $\xi$-гарантированный результат. В значительной степени это связано с разницей между определениями 1 и 2.

В большинстве исследованных случаев выбор одного из них – это просто вопрос удобства. Наверное, многим привычнее определение 1. В некоторых случаях удобнее получить основной результат с помощью определения 2, а затем уже преобразовать его в явную формулу. В данном случае все несколько иначе. Решить задачу с помощью определения 1 не удается, и преобразовать полученный результат в явную формулу тоже не получается.

Полученные в статье результаты обобщают теоремы из [19]. Модель из [19] вкладывается в описанную схему, если положить $f\,(v, \alpha) = v$.

Если положить $\xi = 1$, то получится классическая модель Центр–агент с осторожным Центром. Как следует из замечания 5, дополнительные предположения типа гипотез 1 или 2 в этом частном случае не нужны, поэтому результат в данном случае получается достаточно общим. Кроме того, при $\xi = 1$ результат можно получить в явном виде и с использованием определения 1.

В общем случае рассмотренная в данной статье задача оказывается существенно сложнее.

Видимо, этим обусловлен и тот факт, что до сих пор проблема управления рисками в теоретико-игровых задачах исследовалась мало. В основном изучались модели либо с осторожными, либо с риск-нейтральными игроками. Важность более гибкого учета отношения игроков к риску не вызывает сомнения. В данной статье предложена техника, позволяющая, хотя и с определенными трудностями, решать подобные задачи. Пока с ее помощью исследована лишь простейшая модель. Опыт использования этих методов позволяет надеяться, что, используя те же идеи, удастся решить и другие, может быть, более содержательные задачи.

*Доказательство леммы 1.* Сначала докажем что выполняется неравенство $R(\Gamma,\xi) \leqslant R'(\Gamma,\xi)$.

Пусть $\gamma$ – произвольное число, удовлетворяющее условию $\gamma < R(\Gamma,\xi)$. Выберем измеримое множество $B$ и стратегию $u$ так, что

$$\inf_{\alpha\in B}\inf_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v,\alpha) > \gamma. \tag{П.1}$$

Фиксируем произвольное $\alpha \in B$.

Положим $\lambda = \max\limits_{v\in V} h(u,v,\alpha)$, если максимум в этой формуле достигается, и $\lambda = \sup\limits_{v\in V} h(u,v,\alpha) - \kappa$ в противном случае. Тогда для $v \in BR(u,\alpha)$ справедливо неравенство $h(u,w,\alpha) \geqslant \lambda$, т.е. выполняется п. $1^\circ$ определения 2. Далее для $v \in BR(u,\alpha)$ в силу условия (П.1) выполняется неравенство $g(u,v,\alpha) > \gamma$. А для $v \notin BR(u,\alpha)$ имеем $h(u,v,\alpha) < \lambda$. Значит, выполняется и п. $2^\circ$ определения 2.

В силу произвольности $\alpha \in B$ число $\gamma$ является гарантированным результатом в смысле определения 2. Поэтому $\gamma \leqslant R'(\Gamma,\xi)$. А поскольку выбор числа $\gamma$ стеснен лишь условием $\gamma < R(\Gamma,\xi)$, имеет место нужное неравенство $R(\Gamma,\xi) \leqslant R'(\Gamma,\xi)$.

Неравенство $R(\Gamma_*,\xi) \leqslant R'(\Gamma_*,\xi)$ доказывается дословно так же.

Теперь докажем неравенство $R(\Gamma_*,\xi) \geqslant R'(\Gamma_*,\xi)$.

Пусть $\gamma$ – произвольное число, удовлетворяющее условию $\gamma < R'(\Gamma,\xi)$. Выберем множество $B$ и стратегию $u_*$ так, как описано сразу после формулировки теоремы 2. Фиксируем произвольное $\alpha \in B$.

Непосредственно проверяется, что тогда максимум $\max\limits_{v_*\in V_*} h_*(u_*,v_*,\alpha)$ достигается, например, в точке $v_* = (v^\alpha,\alpha)$. А значит, для всех $v_* \in BR(u_*,\alpha)$ выполняется равенство

$$h_*(u_*,v_*,\alpha) = \max_{w_*\in V_*} h_*(u_*,w_*,\alpha). \tag{П.2}$$

Пусть число $\lambda$ удовлетворяет условию определения 2. Тогда для некоторого $w_*$ справедливо неравенство $\lambda \leqslant h_*(u_*,w_*,\alpha)$ и тем более

$$\lambda \leqslant \max_{w_*\in V_*} h_*(u_*,w_*,\alpha).$$

Поэтому в силу условия (П.2) для всех $v_* \in BR(u_*,\alpha)$ выполняется неравенство $h_*(u_*,v_*,\alpha) \geqslant \lambda$ и, значит, в силу п. $2^\circ$ определения 2 будем иметь $g_*(u_*,v_*,\alpha) \geqslant \gamma$. Следовательно,

$$\inf_{v_*\in BR(u_*,\alpha)} g_*(u_*,v_*,\alpha) \geqslant \gamma,$$

а в силу произвольности $\alpha \in B$ выполняется неравенство

$$\inf_{\alpha\in B}\inf_{v_*\in BR(u_*,\alpha)} g_*(u_*,v_*,\alpha) \geqslant \gamma.$$

Тем более

$$R(\Gamma,\xi)=\sup_B \sup_{u\in U} \inf_{\alpha\in B} \inf_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v,\alpha) \geqslant \gamma.$$

В силу произвольности $\gamma$ отсюда следует, что $R(\Gamma_*,\xi) \geqslant R'(\Gamma_*,\xi)$.

Неравенство $R(\Gamma,\xi) \geqslant R'(\Gamma,\xi)$ доказывается практически так же, только вместо ссылки на теорему 2 можно сослаться на стандартную теорему из курса математического анализа.

Лемма 1 доказана.

*Замечание П.1.* При доказательстве теоремы 2 лемма 1 никак не использовалась. Поэтому логического круга здесь нет. Ссылка на теорему использована выше исключительно для сокращения доказательства леммы.

*Доказательство леммы 2.* Для доказательства леммы достаточно сведений, явно сформулированных в [20] (см. гл. V, § 4), и стандартной топологической техники.

Для того чтобы множество $C(u)$ было измеримо, достаточно, чтобы при фиксированном $u$ была измеримой функция $\varphi(\alpha)=\min\limits_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v,\alpha)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы измеримой была функция

$$-\varphi(\alpha)=0-\varphi(\alpha).$$

Следовательно, достаточно доказать, что при любом $\gamma$ измеримо множество

$$C^0(u)=\{\alpha\in A: -\varphi(\alpha)<-\gamma\}=\left\{\alpha\in A: \min_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v,\alpha)>\gamma\right\}.$$

Мера $\wp$ предполагается борелевской, поэтому достаточно установить, что множество $C^0(u)$ является открытым.

Пусть это не так. Тогда существуют $\alpha\in C^0(u)$ и сходящаяся к $\alpha$ последовательность $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ такая, что $\alpha_k\notin C^0(u)$, $k=1,2,\ldots$

Функция $h$ непрерывна, поэтому множество $BR(u_k,\alpha)$ замкнуто. Множество $V$ компактно, значит, компактно и его замкнутое подмножество $BR(u_k,\alpha)$. Следовательно, в некоторой точке $v_k$ достигается минимум $\min\limits_{v\in BR(u,\alpha_k)} g(u,v,\alpha_k)$. Так как $\alpha_k\notin C^0(u)$, то выполняется неравенство $g(u,v_k,\alpha_k)=\min\limits_{v\in BR(u,\alpha_k)} g(u,v,\alpha_k)\leqslant\gamma$.

В силу компактности множества $V$ можно, не ограничивая общности, считать, что последовательность $v_1,v_2,\ldots$ сходится к некоторому элементу $v$ (в противном случае можно перейти к подходящей подпоследовательности).

Поскольку $v_k\in BR(u,\alpha_k)$, то для любого $w\in V$ выполняется неравенство $h(u,v_k,\alpha_k)\geqslant h(u,w,\alpha_k)$. Функция $h$ непрерывна, поэтому, переходя в этом неравенстве к пределу при $k\to\infty$, получим $h(u,v,\alpha)\geqslant h(u,w,\alpha)$. В силу произвольности $w$ это означает, что $v\in BR(u,\alpha)$.

Из непрерывности функций $q$ и $f$ немедленно следует непрерывность функции $g$. Поэтому, переходя к пределу при $k\to\infty$ в неравенстве $g(u,v_k,\alpha_k)\leqslant\gamma$, получим $g(u,v,\alpha)\leqslant\gamma$. Тем более $\min\limits_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v,\alpha)\leqslant\gamma$. Это противоречит условию $\alpha\in C^0(u)$

Лемма 2 доказана.

*Доказательство леммы 3.* Прежде всего заметим, что из непрерывности функции $h$ и компактности множеств $U$, $V$ и $A$ стандартным образом выводится непрерывность функции $m$.

Для доказательства измеримости обоих множеств достаточно доказать измеримость функции $\psi(\alpha) = m(\alpha) - l(\alpha, \gamma)$. А для этого достаточно доказать измеримость множества

$$C^1(\alpha) = \{\alpha \in A : l(\alpha, \gamma) < m(\alpha) + c\}$$

(при любом $c$).

Поскольку мера $\wp$ – борелевская, достаточно доказать, что это множество открыто.

Допустим противное. Тогда существуют $\alpha \in C^1(u)$ и сходящаяся к $\alpha$ последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ такая, что $\alpha_k \notin C^1(u)$, $k = 1, 2, \ldots$

По определению множество $H(\alpha_k, \gamma)$ – замкнутое подмножество декартова произведения $U \times V$ (оно задается нестрогим неравенством, а функция $q(u, f(v, \alpha))$ непрерывна). Множества $U$ и $V$ компактны, значит, компактно и множество $H(\alpha_k, \gamma)$. А тогда в некоторой точке $(u_k, v_k)$ достигается максимум

$$\max_{(u,v) \in H(\gamma, \alpha_k)} h(u, v, \alpha_k).$$

В силу компактности множеств $U$ и $V$ без потери общности можно считать, что последовательность $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots$ сходится к точке $(u_0, v_0)$.

Точки $(u_k, v_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежат множествам $H(\alpha_k, \gamma)$, поэтому выполняются неравенства $q(u_k, f(v_k, \alpha_k)) \geqslant \gamma$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $q(u_0, f(v_0, \alpha)) \geqslant \gamma$, т.е. $(u_0, v_0) \in H(\alpha, \gamma)$.

Поэтому $h(u_0, v_0, \alpha) \leqslant l(\alpha, \gamma) < m(\alpha) + c$. Но тогда в силу непрерывности функции $h$ при достаточно больших $k$ должны выполняться неравенства

$$h(u_k, v_k, \alpha) < m(\alpha) + c.$$

Это противоречит условию $\alpha_k \notin C^1(u)$, $k = 1, 2, \ldots$

Полученное противоречие доказывает лемму 3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Markowitz H.M.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
2. *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции. М.: Инфра-М, 1997.
3. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VAR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011.
4. *Jorion P.* Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. N.Y.: McGraw-Hill, 2006.
5. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами. Вып. 73. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 6–26.
6. *Harsanyi J.C.* Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. I // Manage. Sci. 1967. V. 14. No. 3. P. 159–183.

7. *Harsanyi J.C.* Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. II // Manage. Sci. 1968. V. 14. No. 5. P. 320–334.
8. *Harsanyi J.C.* Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. III // Manage. Sci. 1968. V. 14. No. 7. P. 486–502.
9. *Fudenberg D., Tirole J.* Game theory. Cambridge: MIT Press, 1991.
10. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. Cambridge: MIT Press, 2004.
11. *Laffont J.-J., Martimort D.* The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model. Cambridge: MIT Press, 2002.
12. *Халезов А.Д.* Об одном классе многошаговых конфликтов в условиях риска // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1982. Т. 22. № 1. С. 42–48.

    *Khalezov A.D.* On a Class of Multistage Conflicts under Conditions of Risk // Comput. Math. Math. Phys. 1982. V. 22. No. 1. P. 42–48.
13. *Халезов А.Д.* Применение уточняемых стратегий в многошаговых конфликтах в условиях риска // АиТ. 1990. № 2. С. 113–123.

    *Khalezov A.D.* Application of Tunable Strategies in Multistage Conflicts under Risky Conditions // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 2. Part 2. P. 231–239.
14. *Халезов А.Д.* Общее решение задачи Центр–Агент с симметричной информацией в условиях риска // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2001. Т. 41. № 3. С. 374–383.

    *Khalezov A.D.* A General Solution of the Principal-Agent Problem with Symmetric Information under Risk Conditions // Comput. Math. Math. Phys. 2001. V. 41. No. 3. P. 347–355.
15. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // АиТ. 1993. № 11. С. 3–30.

    *Burkov V.N., Enaleev A.K., Novikov D.A.* Stimulation Mechanisms in Probability Models of Socioeconomic Systems // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 11. P. 1575–1598.
16. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Вероятностная задача стимулирования // АиТ. 1993. № 12. С. 140–145.

    *Burkov V.N., Yenaleev A.K., Novikov D.A.* Probabilistic Stimulation Problem // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 12. P. 1846–1851.
17. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. II // АиТ. 1995. № 10. С. 121–126.

    *Burkov V.N., Novikov D.A.* Optimal Incentive Mechanisms in Active Systems under Stochastic Uncertainty // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 10. P. 121–126.
18. *Enaleev* Optimal Incentive Compatible Mechanism in a System with Several Active Elements // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 1. P. 146–158.
19. *Горелов М.А.* Принцип “Value at Risk” в иерархической игре // Управление большими системами. Вып. 72. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 6–26.
20. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.*

Поступила в редакцию 13.09.2018

После доработки 31.01.2019

Принята к публикации 07.02.2019