Автоматика и телемеханика, № 8, 2019

Нелинейные системы

© 2019 г. **В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук** (vlakam@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИСТЕМЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ, СИСТЕМЫ ЛУРЬЕ, АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, ПРОБЛЕМА АЙЗЕРМАНА[1]

Среди линейных систем с переключениями выделяются системы, которые названы попарно связными. Показывается, что динамика таких систем может быть описана системами Лурье. Для попарно связных систем получено достаточное частотное условие существования квадратичной функции Ляпунова. Известная проблема Айзермана переформулирована для линейных систем с переключениями. Приводится пример системы с переключениями между тремя линейными подсистемами третьего порядка, для которой проблема Айзермана имеет положительное решение.

Ключевые слова: системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, проблема Айзермана, функции Ляпунова, матричные неравенства.

DOI: 10.1134/S0005231019080038

1. Введение

Задача абсолютной устойчивости, впервые сформулированная в [1], является одной из основных задач теории автоматического управления. Несмотря на огромное количество публикаций по этой задаче (см. библиографию в [2]) полное решение до сих пор не получено. В [3] была сформулирована известная гипотеза Айзермана о том, что система автоматического управления абсолютно устойчива в классе нелинейных характеристик из “гурвицевого угла”. Гипотеза Айзермана была опровергнута [4], а проблема Айзермана об описании систем автоматического управления, для которых справедлива гипотеза Айзермана, продолжает оставаться актуальной до настоящего времени [2, 5, 6].

Проблема Айзермана (ПА) была в первую очередь сформулирована для систем с одной нелинейностью. Для систем третьего порядка полное решение было получено в [4]. Для систем произвольного порядка существенный прогресс здесь был связан с появлением критерия Попова [6, 7]. Для систем управления над полем комплексных чисел ПА рассматривалась в [8].

Следующим по сложности объектом исследования являются системы автоматического управления с несколькими нелинейностями из конечных секторов, которые в западной литературе называются системами Лурье. Если изначально предполагалось, что это системы со стационарными нелинейностями, как в первоисточниках [1, 3], то теперь этот термин используется и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН “Актуальные проблемы робототехники” (проект № I.29).

для систем с нестационарными нелинейностями [9–11]. Именно такие системы будем далее называть здесь системами Лурье.

К началу восьмидесятых годов прошлого века уже сложилось понимание того, как формулировать ПА для задачи абсолютной устойчивости систем с несколькими нелинейностями. Для разработки ПА для таких систем требуется определить способы описания самой области абсолютной устойчивости ("гурвицевых углов" несколько) и, конечно, наличие аналитического критерия. Доказать справедливость гипотезы Айзермана с помощью численных методов вообще не представляется возможным в силу конечной точности этих методов.

В принципе некоторое решение ПА для систем с несколькими нестационарными нелинейностями можно получить с использованием кругового критерия [12], который в этом случае представляет собой достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ), либо с использованием критерия существования такой функции из [13]. По-видимому, такие исследования не проводились.

В настоящее время популярным объектом исследования являются системы с переключениями [9, 14]. Из публикаций по абсолютной устойчивости и устойчивости дифференциальных включений [15, 16] легко следует, что системы Лурье с несколькими нелинейностями могут быть представлены в виде линейных систем с переключениями специального вида. Матрицы A_s, определяющие такие системы, в явном виде выписаны в [13, 17]. Таким образом, задача устойчивости линейных систем с переключениями при произвольных переключениях является обобщением задачи абсолютной устойчивости для систем Лурье (проблемы Лурье).

Для систем с переключениями специального вида (связных) в [18] получен частотный критерий существования КФЛ. Здесь для более узкого класса систем (попарно связных) получено достаточное частотное условие существования такой функции Ляпунова. Появление этих аналитических критериев внушает сдержанный оптимизм по поводу возможности описания некоторого подмножества систем с переключениями, для которых справедлива гипотеза Айзермана.

Сама ПА для систем с переключениями переформулирована с сохранением основного принципа: положительное решение означает, что весь диапазон, в котором устойчивы линейные подсистемы, должен совпадать с диапазоном, в котором устойчива система с переключениями между этими подсистемами. Для параметрического описания этого диапазона вместо "гурвицевого угла" используется понятие "гурвицевого луча". Привлекательность исследования устойчивости систем с переключениями в контексте ПА объясняется следующим. Наличие КФЛ является лишь достаточным условием устойчивости. Однако если область устойчивости, найденная с помощью упомянутых критериев, совпадает с областью гурвицевости (ПА имеет положительное решение), то в этом случае вопрос устойчивости решен окончательно и нет необходимости использовать другие критерии и функции Ляпунова из более сложных классов [16].

Исследование ПА с помощью критерия из [18] представляет собой весьма сложную задачу. Цель настоящей работы состоит в упрощении этой задачи. Упрощение проводится по двум направлениям. Во-первых, сужается класс рассматриваемых систем от связных до попарно связных. Во-вторых, вместо критерия существования КФЛ из [18] предлагается более простое достаточное (с потерей необходимости) частотное условие существования такой функции Ляпунова для попарно связных систем.

Получение этого условия состоит из трех этапов. Вначале вводится понятие попарно связных систем с переключениями и получено их алгебраическое описание. Затем показано, что динамика попарно связных систем может быть описана системами Лурье специального вида. Этот результат представляет самостоятельный интерес, так как в современной литературе соответствие между системами с переключениями и системами Лурье установлено и используется только для систем с переключениями между двумя линейными подсистемами специального вида, которым соответствуют системы Лурье с одной нелинейностью [9, 19]. Наконец, с использованием S-процедуры [20] для систем Лурье, соответствующих попарно связным системам, получено достаточное частотное условие существования КФЛ.

В качестве стартовой позиции для исследований ПА для систем с переключениями в конце приводится пример системы с переключениями между тремя линейными подсистемами третьего порядка, для которой справедлива гипотеза Айзермана. Аналогичный пример дискретной системы с переключениями приводится в [21].

Материал статьи излагается в следующем порядке. В разделе 2 приводятся известные сведения о том, что абсолютная устойчивость системы Лурье эквивалентна устойчивости специального дифференциального включения, которая, в свою очередь, эквивалентна устойчивости соответствующей системы с переключениями при произвольных переключениях. В разделе 3 определяются и описываются попарно связные системы с переключениями. Соответствие между этими системами и системами Лурье устанавливается в разделе 4. Там же получено достаточное частотное условие существования общей КФЛ (ОКФЛ) для таких систем. В разделе 5 формулируется ПА для систем с переключениями. В разделе 6 приводится пример системы с переключениями, для которой справедлива гипотеза Айзермана.

2. Абсолютная устойчивость и устойчивость систем с переключениями

Система Лурье с несколькими нелинейностями имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j(t, \sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x \rangle. \tag{1}$$

Система (1) называется абсолютно устойчивой в классе N_φ нелинейностей $\varphi = \|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям

$$0 \leqslant \varphi_j \sigma_j \leqslant k_j \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2}$$

если эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях.

В [15] впервые показано, что множество решений системы (1) при всех нелинейностях из класса N_φ совпадает с множеством решений специального дифференциального включения, которое в явном виде выписано в [16]:

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \left\{ y : y = Ax + \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda_j \langle c_j, x \rangle,\ \lambda_j \in [0, k_j],\ j = \overline{1, m} \right\}. \tag{3}$$

Рассмотрим матрицы A_s из [13, 17] специального вида

$$A_s = A + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} b_j c_j^\top, \tag{4}$$

где точки $h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m$, $s = \overline{1, N}$ ($N = 2^m$), являются вершинами m-мерного параллелепипеда, а величины h_{sj} принимают одно из двух значений: 0 или k_j. Рассмотрим также

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \left\{ y : y = Ax, A \in \mathrm{conv}\overline{A} \right\}, \tag{5}$$

где $\mathrm{conv}\overline{A} = \mathrm{conv}\{A_1, \dots, A_N\}$ — выпуклый многогранник в линейном пространстве $R^{n\times n}$ матриц порядка n. Если многогранник $\mathrm{conv}\overline{A}$ из (5) задается вершинами A_s из (4), то дифференциальное включение (5) совпадает с (3).

С другой стороны, стандартная форма записи линейной системы с переключениями имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}, \tag{6}$$

где $A_s \in R^{n\times n}$ — произвольные $n \times n$-матрицы и $A(t) : R_+ \longrightarrow \overline{A}$ — кусочно-постоянное отображение. В [9] показано, что множество решений включения (5) с произвольными матрицами $A_s \in R^{n\times n}$ является замыканием множества решений системы (6) с теми же матрицами при произвольном переключении режимов. Таким образом, устойчивость системы (6) при произвольном переключении режимов эквивалентна устойчивости дифференциального включения (5). Следовательно, абсолютная устойчивость системы Лурье (1) в классе N_φ эквивалентна устойчивости системы с переключениями (6), в которой матрицы A_s определены соотношением (4). В этом смысле система Лурье эквивалентна линейной системе с переключениями.

Далее, чтобы избежать тавтологии, будем считать, что матрицы $\{A_1, \dots$ $\dots, A_N\}$ в (6) являются крайними точками множества $\mathrm{conv}\overline{A}$, т.е вершинами этого многогранника.

В соответствии с методом Ляпунова устойчивость систем с переключениями определяется существованием общей функции Ляпунова. Если устойчивость удается установить с помощью КФЛ $v(x) = x^\top Lx$ ($L = L^\top$ — матрица), то иногда говорят, что установлена “квадратичная устойчивость”. Как вопрос о существовании ОКФЛ у линейных систем с переключениями (6), так и вопрос о существовании КФЛ для дифференциального включения (5) эквивалентны вопросу о разрешимости системы линейных матричных неравенств

$$A_s^\top L + LA_s < 0, \quad s = 1, \dots, N, \tag{7}$$

относительно симметрической матрицы L $(L = L^\top)$. Матричное неравенство $W < 0$ (> 0) для матрицы $W = W^\top$ означает, что квадратичная форма $x^\top Wx$ является отрицательно (положительно) определенной, т.е. $x^\top Wx < 0$ (> 0) при $x \neq 0$. Далее в случае разрешимости системы (7) будем также говорить о существовании ОКФЛ для множества матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$.

3. Попарно связные системы с переключениями

В [18] предлагается понятие связной линейной системы с переключениями, которое опирается на следующую конструкцию. Каждой матрице A_s из системы (6) ставится в соответствие вершина графа. Две вершины графа соединяются ребром, если разность матриц, которым соответствуют эти вершины, имеет вид $bc^\top$, т.е. ранг матрицы разности равен 1. Система (6) называется связной [18], если соответствующий ей граф является связным. Связная система с переключениями между тремя линейными стационарными системами называется [18] системой треугольного типа, если каждая пара вершин из соответствующего графа соединена ребром этого графа. Перенося это свойство на системы (6) с переключениями между произвольным (конечным) числом линейных стационарных систем, приходим к следующему определению.

Определение 1. Связную систему (6) *будем называть попарно связной, если каждая пара вершин из соответствующего графа соединена ребром этого графа. В этом случае множество матриц* $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ *также будем называть попарно связным.*

Понятие попарной связности в равной степени можно отнести к дифференциальному включению (5). Термин "системы треугольного типа" оставим для попарно связных систем с переключениями между тремя подсистемами.

Теорема 1. Пусть множество матриц $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ *является попарно связным, тогда либо существует вектор* b*, такой что* $A_i - A_j = bc_{ij}^\top$*,* $b, c_{ij} \in R^n$*, либо существует вектор* c*, такой что* $A_i - A_j = b_{ij}c^\top$*,* $b_{ij}, c \in R^n$*,* $i, j = \overline{1, N}$*.*

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Следствие 1. Если множество матриц $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ *попарно связно, то либо*

$$A_1 = A, \quad A_s = A + bc_s^\top, \quad b, c_s \in R^n, \quad s = \overline{2, N}, \tag{8}$$

либо

$$A_1 = A, \quad A_s = A + b_sc^\top, \quad b_s, c \in R^n, \quad s = \overline{2, N}. \tag{9}$$

При переходе от матриц A_s к транспонированным матрицам $A_s^\top$, т.е. к множеству матриц $\{A_1^\top, \dots, A_N^\top\}$, матрицы A_s из (9) примут вид $A_1 = A^\top$, $A_s = A^\top + cb_s^\top$. В этом случае векторы b, b_s и c, c_s формально поменяются местами. В [18, 22] показана эквивалентность вопроса о существовании ОКФЛ для множества матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$ вопросу о существовании ОКФЛ для множества матриц $\{A_1^\top, \dots, A_N^\top\}$. Однако существование ОКФЛ является лишь достаточным условием устойчивости (6), поэтому естественно возникает вопрос об одновременной устойчивости систем (6), задаваемых этими множествами матриц. Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 1. Система (6)*, задаваемая матрицами* $\{A_1, \dots, A_N\}$*, является асимптотически устойчивой при произвольном переключении режимов тогда и только тогда, когда асимптотически устойчивой при произвольном переключении режимов является система* (6)*, задаваемая матрицами* $\{A_1^\top, \dots, A_N^\top\}$.

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

На основании леммы 1, не ограничивая общности, из двух представлений (8) и (9) попарно связного множества матриц можно исследовать то, которое более удобно.

Пусть попарно связное множество $\overline{A}$ представлено в виде (8) и пара $\{A, b\}$ управляема. Заметим, что выбор матрицы A значения не имеет, так как пары $\{A, b\}$ и $\{A + bc_s^\top, b\}$ одновременно управляемы при любом c_s. В этом управляемом случае очевидно существует невырожденная замена координат, приводящая матрицы A и b к канонической форме Фробениуса, т.е. к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a^1 & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В этих новых координатах все матрицы множества $\overline{A}$ будут также иметь форму Фробениуса

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a^1 + c_s^1 & a^2 + c_s^2 & a^3 + c_s^3 & \cdots & a^n + c_s^n \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где c_s^i – компоненты векторов c_s в новых координатах.

Таким образом, основной вывод настоящего раздела состоит в том, что попарно связное множество матриц $\overline{A}$ допускает представление (8) или (9). Кроме этого, в управляемом случае существует базис, в котором все такие матрицы могут быть представлены в форме Фробениуса.

4. Системы с переключениями и системы Лурье

В разделе 2 показано, что задача абсолютной устойчивости систем Лурье (1) с несколькими нелинейностями сводится к задаче устойчивости систем с переключениями. Здесь решается противоположная задача — показывается, что множества решений попарно связных систем с переключениями совпадают (с точностью до множества меры ноль) с множествами решений систем Лурье с нестационарными нелинейностями специального вида.

Пусть в попарно связной системе (6) матрицы A_s определяются соотношением (9), тогда многозначное отображение $F(x)$, определяющее дифференциальное включение (5), имеет вид

$$F(x) = \left\{ y : y = Ax + \langle c, x\rangle \sum_{s=2}^{N} \lambda_s b_s,\ \sum_{s=2}^{N} \lambda_s = 1,\ \lambda_s \geqslant 0,\ s = \overline{2, N} \right\}. \tag{12}$$

Множество изменения λ_s можно по-другому записать как

$$\lambda_2 \in [0,1],\ \ \lambda_3 \in [0, 1-\lambda_2],\ \ \lambda_4 \in [0, 1-\lambda_2-\lambda_3],\ \ldots,\ \lambda_N \in \left[0, 1 - \sum_{s=2}^{N-1} \lambda_s\right]. \tag{13}$$

Введем обозначения

$$\varphi_s = \lambda_{s+1}\langle c, x\rangle, \quad s = \overline{1, N-1}. \tag{14}$$

Тогда набор условий (13) эквивалентен следующему набору условий:

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \varphi_1\langle c,x\rangle \leqslant \langle c,x\rangle^2,\\
&0 \leqslant \varphi_2\langle c,x\rangle \leqslant \langle c,x\rangle^2 - \varphi_1\langle c,x\rangle,\\
&0 \leqslant \varphi_3\langle c,x\rangle \leqslant \langle c,x\rangle^2 - \varphi_1\langle c,x\rangle - \varphi_2\langle c,x\rangle,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&0 \leqslant \varphi_{N-1}\langle c,x\rangle \leqslant \langle c,x\rangle^2 - \sum_{s=1}^{N-2} \varphi_s\langle c,x\rangle.
\end{aligned} \tag{15}$$

Чтобы достичь буквального совпадения, в системе (1) изменим диапазон индексов и вместо (1) рассмотрим систему Лурье

$$\dot{x} = Ax + \sum_{s=1}^{N-1} b_{s+1}\varphi_s(t, \sigma_s), \quad \sigma_s = \langle c, x\rangle, \tag{16}$$

в которой нелинейные функции $\varphi_s(t, \sigma_s)$ удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения системы (16) при любых начальных условиях и неравенствам (15) при всех $\sigma_s = \langle c, x\rangle$ и $t > 0$. Следуя логике работы [15], покажем, что такая система (16), (15) эквивалентна автономному дифференциальному включению (5), (12) (эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств решений при одинаковых начальных условиях).

Действительно, для любого вектора $y = Ax + \sum_{s=1}^{N-1} b_{s+1}\varphi_s(t,\sigma_s)$ из правой части системы (16) при ограничениях (15) следует $y \in F(x)$ при $F(x)$ из (12), т.е. любое решение системы является решением включения. Наоборот, пусть $x(t)$ — решение включения (5), (12), тогда по лемме Филиппова [23] будет существовать измеримая вектор функция $\lambda(t) = (\lambda_2(t), \ldots, \lambda_N(t))$, такая что $\dot{x}(t) = Ax(t) + \langle c, x(t)\rangle \sum_{s=2}^{N} \lambda_s(t) b_s$, и почти всюду $\lambda_s(t)$ удовлетворяют условиям $\sum_{s=2}^{N} \lambda_s \leqslant 1$, $\lambda_s \geqslant 0$, или условию (13). Определим нелинейности φ_s по правилу (14), т.е. положим $\varphi_s(t,\sigma_s) = \lambda_{s+1}(t)\sigma_s = \lambda_{s+1}(t)\langle c, x\rangle$, $s = \overline{1, N-1}$. Очевидно, такие нелинейности удовлетворяют условиям (15). Следовательно, решение включения $x(t)$ является решением системы. В разделе 2 сказано, что множество решений включения (5) с произвольными матрицами $A_s \in R^{n\times n}$ является замыканием множества решений системы (6) с теми же матрицами при произвольном переключении режимов. Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в попарно связной системе* (6) *матрицы* A_s *определяются соотношением* (9)*, тогда множество ее решений при произвольных переключениях совпадает* (*с точностью до множества меры ноль*) *с множеством решений системы Лурье* (16) *при всех нелинейностях* $\varphi_s(t,\sigma_s)$, $\sigma_s = \langle c, x\rangle$, *удовлетворяющих условиям* (15).

Следствие 2. *Вопрос об устойчивости попарно связной системы* (6),(9) *при произвольных переключениях эквивалентен вопросу об устойчивости системы Лурье* (16) *при всех нелинейностях* $\varphi_s(t,\sigma_s)$, $\sigma_s = \langle c, x\rangle$, *удовлетворяющих* (15).

Замечание 1. Системы с переключениями, которые соответствуют системам Лурье и описаны в разделе 2, в общем случае попарно связными не являются.

Понятно, что КФЛ $v(x) = x^\top Lx$ для включения (5), (12) будет одновременно функцией Ляпунова для системы Лурье (16), (15) и ОКФЛ для системы с переключениями (6), (9), а ее наличие определяется разрешимостью соответствующей системы (7).

Условия (15), в свою очередь, эквивалентны неравенствам

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\langle c, x\rangle - \varphi_1) \geqslant 0,\\
&\varphi_2(\langle c, x\rangle - \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0,\\
&\varphi_3(\langle c, x\rangle - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \geqslant 0,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&\varphi_{N-1}\left(\langle c, x\rangle - \sum_{s=1}^{N-1} \varphi_s\right) \geqslant 0
\end{aligned} \tag{17}$$

на квадратичные формы в расширенном пространстве (x, φ), $\varphi \in R^{N-1}$. Поэтому достаточные частотные условия существования ОКФЛ для попарно связных систем с переключениями могут быть получены с помощью стандартной техники, основанной на использовании S-процедуры [20], как это делается в случае $N = 3$ для систем треугольного типа (теорема 4 из [18]).

Действительно, на производную $\dot v(x)$ функции Ляпунова $v(x) = x^\top Lx$ в силу системы (16) имеем неравенство

$$x^\top(A^\top L + LA)x + 2\sum_{s=1}^{N-1} \varphi_s \langle Lb_{s+1}, x\rangle < 0, \quad (x,\varphi) \neq 0, \tag{18}$$

которое должно выполняться при всех (x,φ), удовлетворяющих (17). В соответствии с приемом S-процедуры составим квадратичную форму

$$x^\top(A^\top L + LA)x + 2\sum_{s=1}^{N-1} \varphi_s \langle Lb_{s+1}, x\rangle + \sum_{s=1}^{N-1} \tau_s\varphi_s \left(\langle c, x\rangle - \sum_{q=1}^{s} \varphi_q\right) < 0, \tag{19}$$

где $\tau_s > 0$ — неопределенные параметры, $s = \overline{1, N-1}$.

Неравенство (18) в матричной форме имеет вид

$$(Ax + B\varphi)^\top Lx + x^\top L(Ax + B\varphi) < 0, \ \ (x,\varphi) \neq 0,$$

где $B = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \dots & b_N\end{pmatrix}$ и $\varphi^\top = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_{N-1}\end{pmatrix}$, а функция ограничений $F(x,\varphi) = \sum_{s=1}^{N-1} \tau_s\varphi_s \left(\langle c, x\rangle - \sum_{q=1}^{s}\varphi_q\right)$ представима в виде

$$F(x,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & C\tau/2 \\ \tau C^\top/2 & -\Gamma\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi\end{pmatrix},$$

где

$$C = \Bigl(\underbrace{c \quad c \quad \dots \quad c}_{N-1}\Bigr), \qquad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tau_{N-1}\end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\tau_2}{2} & \frac{\tau_3}{2} & \dots & \frac{\tau_{N-1}}{2} \\ \frac{\tau_2}{2} & \tau_2 & \frac{\tau_3}{2} & \dots & \frac{\tau_{N-1}}{2} \\ \frac{\tau_3}{2} & \frac{\tau_3}{2} & \tau_3 & \dots & \frac{\tau_{N-1}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\tau_{N-1}}{2} & \frac{\tau_{N-1}}{2} & \frac{\tau_{N-1}}{2} & \dots & \tau_{N-1}\end{pmatrix}.$$

Во вновь принятых обозначениях отрицательная определенность формы (19) эквивалентна матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^\top L + AL & LB + C\tau/2 \\ B^\top L + \tau C^\top/2 & -\Gamma\end{pmatrix} < 0. \tag{20}$$

Из частотной теоремы [20, с. 54] следует, что при гурвицевой A и $\Gamma > 0$ разрешимость неравенства (20) эквивалентна выполнению частотного неравенства

$$\Gamma + \operatorname{Re} W(i\omega) > 0, \quad \omega \in [-\infty, \infty], \tag{21}$$

где $W(i\omega) = \tau C^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B$ ($\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ — эрмитово сопряженная к W), E_n — единичная $n \times n$ матрица. Введем обозначение

$$W_s(i\omega) = c^\top (A - i\omega E_n)^{-1} b_{s+1}, \quad s = \overline{1, N-1}, \tag{22}$$

тогда

$$W(i\omega) = \begin{pmatrix} \tau_1 W_1(i\omega) & \tau_1 W_2(i\omega) & \dots & \tau_1 W_{N-1}(i\omega) \\ \tau_2 W_1(i\omega) & \tau_2 W_2(i\omega) & \dots & \tau_2 W_{N-1}(i\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{N-1} W_1(i\omega) & \tau_{N-1} W_2(i\omega) & \dots & \tau_{N-1} W_{N-1}(i\omega) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Полученное достаточное условие существования ОКФЛ сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть матрица A гурвицева и существуют числа $\tau_s > 0$, $s = \overline{1, N-1}$, такие что $\Gamma > 0$ и при всех $\omega \in [-\infty, \infty]$ выполняется частотное неравенство* (21), *в котором матрица $W(i\omega)$ определяется в* (22) *и* (23), *тогда попарно связная система* (6), (9) *имеет ОКФЛ* (*система* (7) *разрешима, система* (6) *устойчива*).

В [18] предлагается необходимое и достаточное частотное условие существования ОКФЛ для связных систем с переключениями. Сопоставляя критерий из [18] с достаточным условием теоремы 3 по сложности проверки, для случая произвольного количества переключаемых подсистем N можно сделать следующий вывод. В [18] критерий подробно выписан только для $N = 3$, при произвольном N из анализа операции редукции легко заключить, что при любой конфигурации графа результирующее неравенство и частотное условие его разрешимости зависят от $N(N-1)/2$ неопределенных параметров, частотное условие теоремы 3 — от $N - 1$. В обоих случаях частотные условия представляют собой условия положительной определенности некоторых эрмитовых матриц. Другой показатель сложности — размеры этих матриц, в обоих случаях они совпадают и равны $N - 1$.

5. Проблема Айзермана для систем с переключениями

Исследование ПА для системы (6) подразумевает некоторую параметризацию правой части этой системы. Сохраним обозначение $\overline{A}$ для фиксированного набора матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$ и пусть $\overline{A}$ — некоторый такой набор. Для набора матриц, зависящего от векторного параметра $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$, $k_s \geqslant 0$, будем использовать обозначение $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{k}) = \{A_1(\mathbf{k}), \dots, A_N(\mathbf{k})\}$. Будем считать, что в $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ матрицы $A_s(\mathbf{k})$ зависят от параметра $\mathbf{k}$ следующим образом:

$$A_s(\mathbf{k}) = A + k_s B_s, \quad s = \overline{1, N}, \tag{24}$$

где $A \in \operatorname{conv}\overline{A}$ — некоторая матрица и $B_s = A_s - A$. Если матрица A совпадает с какой-либо матрицей из $\overline{A}$, например $A = A_1$, то при таком представлении матрица A_1 неподвижна (не зависит от параметра), как это принято в теории абсолютной устойчивости (таково представление (4)). Очевидно, что всегда $A \in \operatorname{conv}\mathbf{A}(\mathbf{k})$.

Считаем далее, что правая часть системы (6) определяется не множеством $\overline{A}$, а множеством $\mathbf{A}$, в котором матрицы $A_s(\mathbf{k})$ определяются параметризацией (24) и матрица A гурвицева. Областью устойчивости такой системы (6) будем называть область $U_S \subseteq R^N$, для всех точек которой система (6) устойчива при произвольном переключении режимов.

Для описания области устойчивости системы (6) в пространстве параметров k_s используем тот же прием, который был предложен в [24] и затем использован в [17] для описания области абсолютной устойчивости системы с несколькими нелинейностями. Описание области устойчивости эквивалентно описанию границы этой области. Для нахождения точки границы рассматривается луч, выходящий из точки 0 и проходящий через эту точку. Далее выбирается и фиксируется произвольный вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ (естественно, $\alpha_s \geqslant 0$), направленный вдоль этого луча, и решается задача определения максимального числа k, такого что система (6) устойчива при $\mathbf{k} = k\overline{\alpha}$. Если матрицы A_s в (24) зависят от такого параметра $\mathbf{k}$, то фактически они зависят от скалярного параметра k, т.е.

$$A_s(k) = A + k\alpha_s B_s, \quad s = \overline{1, N}. \tag{25}$$

Областью $U_{H,\overline{\alpha}}$ гурвицевости системы (6) и (25) вдоль вектора $\overline{\alpha}$ будем называть максимальный полуинтервал $[0, k_{\overline{\alpha}})$, для всех точек которого матрицы $A_s(k)$ являются гурвицевыми.

Областью устойчивости системы (6) и (25) вдоль вектора $\overline{\alpha}$ будем называть область $U_{S,\overline{\alpha}}$, для всех точек которой система (6) и (25) устойчива при произвольном переключении режимов. Такая область $U_{S,\overline{\alpha}}$ автоматически является полуинтервалом. Действительно, пусть $\mathbf{k}^1$ и $\mathbf{k}^2$ — два значения векторного параметра, такие что $\mathbf{k}^1 \leqslant \mathbf{k}^2$, где неравенство понимается покомпонентно. Тогда $\operatorname{conv}\mathbf{A}(\mathbf{k}^1) \subseteq \operatorname{conv}\mathbf{A}(\mathbf{k}^2)$ просто потому, что $k_s^1 \leqslant k_s^2$ и $A_s(\mathbf{k}^1) \in [A, A_s(\mathbf{k}^2)]$. Отсюда следует, что множество решений включения (5) при $\mathbf{k}^2$ содержит в себе множество решений (5) при $\mathbf{k}^1$, а значит, из устойчивости первого следует устойчивость второго. Теперь очевидно, что область U_S является связной и даже звездной по отношению к точке 0 (из $\mathbf{k}^* \in U_S$ следует, что любой отрезок $[0, \mathbf{k}^*] \subseteq U_S$).

Одномерной ПА для систем с переключениями (вдоль вектора $\overline{\alpha}$) будем называть проблему описания систем (6) и (25), для которых $U_{H,\overline{\alpha}} = U_{S,\overline{\alpha}}$. Говоря нестрого, вектор $\mathbf{k} = k_{\overline{\alpha}}\overline{\alpha}$ будем называть "гурвицевым лучом".

Для конкретной системы интерес представляет также задача определения направлений $\overline{\alpha}$, вдоль которых одномерная ПА имеет положительное решение.

Многомерной или полной ПА для систем с переключениями будем называть проблему описания систем (6), (24), для которых одномерная ПА имеет положительное решение для любого направления $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ ($\alpha_s \geqslant 0$).

Поскольку использование КФЛ является наиболее простым и широко используемым методом исследования устойчивости систем с переключениями, то естественно сформулировать квадратичную ПА. Формулировка квадратичной одномерной ПА отличаются от "обычной" тем, что в определении области $U_{S,\overline{\alpha}}$ устойчивость заменяется на квадратичную устойчивость. Квадратичным ПА можно дать исключительно алгебраические формулировки. Квадратичные одномерные ПА имеют положительное решение, если соответствующие области гурвицевости $U_{H,\overline{\alpha}}$ совпадают с областями разрешимости соответствующих систем (7). Многомерная квадратичная ПА формулируется через одномерные, как выше.

Понятно, что при положительном решении квадратичной ПА "обычная" ПА также имеет положительное решение. Наоборот неверно, т.е. квадратичная ПА может не иметь положительного решения, в то время как "обычная" имеет.

6. Пример

В этом разделе исследование квадратичной ПА будет продемонстрировано на примере связной системы с переключениями между тремя линейными подсистемами третьего порядка. Выбор примера объясняется тем, что такие системы являются следующим по сложности шагом после систем Лурье с одной нелинейностью или, что то же самое, связных систем с переключениями между двумя подсистемами. Вопрос об ОКФЛ для систем с переключениями между тремя подсистемами определяется системой из трех матричных неравенств. Системы Лурье с двумя нелинейностями являются уже более сложным объектом, так как наличие у них КФЛ эквивалентно разрешимости системы из четырех матричных неравенств. Заметим, что попарно связные системы с переключениями между тремя подсистемами в [18] называются системами треугольного типа и для их исследования применимы результаты из [18].

Рассмотрим систему вида (6) при $N = 3$. Считаем, что матрицы $A_s(\mathbf{k})$ задаются соотношением (24), в котором $A_1(\mathbf{k}) = A$ и $B_s = bc_s^\top$. Поскольку матрица $A_1(\mathbf{k})$ от параметра не зависит, то естественно рассматривать двумерный параметр $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ и в (24) формально сдвинуть индексы таким образом, что матрицы $A_s(\mathbf{k})$ определяются соотношениями

$$(26) \qquad A_1(\mathbf{k}) = A, \quad A_2(\mathbf{k}) = A + k_1 bc_1^\top, \quad A_3(\mathbf{k}) = A + k_2 bc_2^\top, \quad b, c_i \in R^n.$$

В этом случае система (6) называется системой с переключениями треугольного типа [18]. Для одномерной ПА и $\mathbf{k} \in R^2$ направления $\overline{\alpha}$ определяются отношением $\frac{k_2}{k_1}$, т.е. $\overline{\alpha} = (1, \frac{k_2}{k_1})$ и $\mathbf{k} = k_1\overline{\alpha} = (k_1, k_2)$.

Пусть в (26) матрица A и векторы b и c_s имеют следующие численные значения:

$$(27) \qquad A_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, рассматриваемая система (6) определяется матрицами $A_s(\mathbf{k})$, где $A_1(\mathbf{k})$ определена в (27), а $A_2(\mathbf{k})$ и $A_3(\mathbf{k})$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
A_2(\mathbf{k}) &= A + k_1 b c_1^\top = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \\
A_3(\mathbf{k}) &= A + k_2 b c_2^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1+k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Матрица A_1 очевидно гурвицева, выясним области гурвицевости матриц $A_2(\mathbf{k})$ и $A_3(\mathbf{k})$. Опуская подробности, приведем результат: матрица $A_2(\mathbf{k})$ гурвицева при $k_1 \in [0, 1/3)$, $A_3(\mathbf{k})$ — при $k_2 \in [0, 8)$.

Критерий существования ОКФЛ для системы треугольного типа приводится в [18] как уточнение более общего результата. Здесь приведем этот критерий отдельно.

Введем обозначение

$$
W_i(i\omega) = c_i^\top (A - i\omega E_n)^{-1} b, \quad i = 1, 2. \tag{29}
$$

Условия критерия формулируются в терминах положительной определенности эрмитовой матрицы $D(i\omega)$, элементы которой d_{ij} выражаются через $W_i(i\omega)$ из (29) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&d_{11} = 1 + k_1 \operatorname{Re} W_1, \quad d_{12} = \frac{k_1 \varepsilon_3^-}{2} \operatorname{Re} W_1 + \frac{\varepsilon_3^+}{4}\left(\frac{k_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1} W_1 + \frac{k_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \overline{W_2}\right), \quad d_{21} = \overline{d_{12}}, \\
&d_{22} = 1 + \frac{k_1 \varepsilon_3^-}{4}\left(\varepsilon_3^- + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3^+}{\varepsilon_1}\right) \operatorname{Re} W_1 + \frac{k_2 \varepsilon_3^+}{4}\left(\varepsilon_3^+ + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3^-}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{Re} W_2,
\end{aligned} \tag{30}
$$

где $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,3}$ — неопределенные параметры и $\varepsilon_3^{\pm} = \varepsilon_3 \pm (1/\varepsilon_3)$.

Теорема 4. *Пусть в системе* (6) *матрицы* A_s *определяются соотношениями* (26) *и матрица* A *гурвицева. Если существует какой-либо набор чисел* $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,3}$, *для которых при любых* $\omega \in [-\infty, \infty]$ *выполняется частотное неравенство* $D(i\omega) > 0$, *где элементы* d_{ij} *матрицы* $D(i\omega)$ *определены в* (30), *тогда у системы* (6) *существует ОКФЛ* (*система* (7) *разрешима, система* (6) *устойчива*). *Если у системы* (6) *существует ОКФЛ* (*система* (7) *разрешима*), *то такой набор чисел* $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,3}$, *существует.*

Используя теорему 4, получим следующее утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

Утверждение 1. *Для системы* (6), *задаваемой матрицами* (27) *и* (28), *одномерная квадратичная ПА имеет положительное решение вдоль любого направления* $\overline{\alpha} = (1, k^*)$, $k^* < 24/7$.

Полученный результат представляется интересным, так как положительное решение ПА означает, что вдоль всех указанных направлений найдена точная область устойчивости исследуемой системы с переключениями.

Замечание 2. Система (6), задаваемая матрицами (27) и (28), соответствует представлению (8). Достаточное условие существования ОКФЛ для такой системы дает теорема 4 из [18], которая при $N = 3$ эквивалентна теореме 3. С помощью этого достаточного условия нельзя установить, что ПА имеет положительное решение уже для направления $\overline{\alpha} = (1, 1)$.

7. Заключение

В [18] введено понятие связной системы с переключениями. Таким образом в множестве линейных систем с переключениями определяется некоторая структура, которую можно рассматривать как отношения порядка (можно говорить о более или менее связных системах с переключениями в зависимости от количества ребер в соответствующих графах). В настоящей работе вводится понятие попарно связных систем с переключениями. Эти системы обладают максимальной “связностью”, так как соответствующие им графы содержат максимальное количество ребер. Поскольку увеличение количества ограничений уменьшает количество объектов, которые им удовлетворяют, то попарно связные системы с переключениями являются самым узким подклассом среди связных систем. Таким системам дается простое алгебраическое описание. Показано, что в некотором базисе все матрицы, определяющие попарно связную систему, могут быть представлены в форме Фробениуса. Более того, показано, что динамика таких систем может быть представлена динамикой систем Лурье с квадратичными ограничениями на нелинейности. Это позволяет использовать для исследования их устойчивости частотные критерии, основанные на S-процедуре, которые хоть и являются лишь достаточными условиями существования КФЛ, но более просты и содержат меньше неопределенных параметров, чем необходимые и достаточные условия из [18].

В работе сформулирована ПА для систем с переключениями, в том числе по отдельным направлениям. В контексте ПА если область устойчивости, полученная на основании достаточного условия, совпадает с областью гурвицевости, то в этом случае найдена полная область устойчивости. Работоспособность такого подхода продемонстрирована на примере системы третьего порядка с переключениями между тремя линейными подсистемами. Таким образом, проведенные исследования можно считать основой для того, чтобы в перспективе выделить системы с переключениями, для которых ПА имеет положительное решение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Возьмем три произвольных матрицы из множества $\overline{A}$. Считаем, что это матрицы $A_1, A_2, A_3 \in \overline{A}$. Из попарной связности $\overline{A}$ следует, что система с переключениями, определяемая этими тремя матрицами, является системой треугольного типа. Поэтому [18] для матриц A_1, A_2 и A_3 справедливо одно из двух представлений:

$$A_1 = A, \quad A_2 = A + bc_1^\top, \quad A_3 = A + bc_2^\top, \quad b, c_i \in R^n, \tag{П.1}$$

$$A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1c^\top, \quad A_3 = A + b_2c^\top, \quad b_i, c \in R^n. \tag{П.2}$$

Пусть имеет место представление (П.1). Сразу отметим, что

$$c_2 \neq \lambda c_1, \quad \lambda \in R, \tag{П.3}$$

так как в противном случае матрицы A_1, A_2, A_3 не будут крайними точками. Пусть A_4 произвольная матрица из $\overline{A}$. Тогда из попарной связности следуют соотношения:

$$\begin{gathered}
A_4 - A_1 = b_4 c_4^\top, \quad A_4 = A + b_4 c_4^\top, \\
A_4 - A_2 = b_{42} c_{42}^\top = A + b_4 c_4^\top - A - b c_1^\top = b_4 c_4^\top - b c_1^\top, \\
A_4 - A_3 = b_{43} c_{43}^\top = A + b_4 c_4^\top - A - b c_2^\top = b_4 c_4^\top - b c_2^\top.
\end{gathered}$$

Из последних двух соотношений следует (лемма 1 из [18]), что либо существует $\lambda_b \in R$, такое что $b_4 = \lambda_b b$, либо существуют $\lambda_{1c}, \lambda_{2c} \in R$, такие что $c_4 = \lambda_{1c} c_1$ и $c_4 = \lambda_{2c} c_2$. Последнее противоречит (П.3). Поскольку матрица A_4 была выбрана произвольно, то в случае представления (П.1) существует единый вектор b. В случае представления (П.2) аналогично показывается, что существует единый вектор c.

Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть система (6) при $\{A_1, \ldots, A_N\}$ является асимптотически устойчивой при любых сигналах. Из этого следует ее глобальная экспоненциальная устойчивость [14], которая означает существование таких чисел $C > 0$ и $\Delta > 0$, что при всех начальных условиях x_0 и моментах времени $t \geqslant 0$ для любого решения этой системы выполняется неравенство

$$|x(t)| \leqslant C |x(0)| e^{-\Delta t}. \tag{П.4}$$

Любое решение системы (6) при $\{A_1, \ldots, A_N\}$ имеет вид

$$x(t) = e^{A_{s_1} t_1} \cdots e^{A_{s_i} t_i} \cdots e^{A_{s_r} t_r} x(0), \tag{П.5}$$

где r — произвольное целое число, определяемое количеством переключений на интервале $[1, t]$, $\sum_{i=1}^{r} t_i = t$, i — номер интервала времени t_i, на котором включена система с номером s_i, $1 \leqslant s_i \leqslant N$. Из (П.5) следует, что

$$\| e^{A_{s_1} t_1} \cdots e^{A_{s_i} t_i} \cdots e^{A_{s_r} t_r} \|_2 \leqslant C e^{-\Delta t},$$

где $\| \cdot \|_2$ обозначает спектральную матричную норму или матричную норму, индуцированную евклидовой векторной нормой, $\|A\|_2 = \left(\lambda_{\max}\left\{A^\top A\right\}\right)^{1/2}$. Поскольку $\|A\|_2 = \|A^\top\|_2$ для произвольной матрицы A, то

$$\| e^{A_{s_r}^\top t_r} \cdots e^{A_{s_i}^\top t_i} \cdots e^{A_{s_1}^\top t_1} \|_2 \leqslant C e^{-\Delta t}.$$

В свою очередь, $y(t) = e^{A_{s_r}^\top t_r} \cdots e^{A_{s_i}^\top t_i} \cdots e^{A_{s_1}^\top t_1} y(0)$ является решением системы (6) при $\{A_1^\top, \ldots, A_N^\top\}$, в котором интервалы включения систем $\dot{y} = A_s^\top y$

занумерованы в обратном порядке по сравнению с порядком включения систем $\dot{x} = A_s x$ для $x(t)$ из (П.5). Так как соотношение (П.4) выполняется при любых законах переключения, то также аналогичное соотношение будет выполняться для любых $y(t)$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство утверждения 1. Начнем с проверки простейшего случая условий (30), которому соответствует выбор $\varepsilon_3 = 1$. В этом случае следует $\varepsilon_3^- = 0$ и $\varepsilon_3^+ = 2$ и элементы матрицы $D(i\omega)$ принимают вид (остался один неопределенный параметр $\delta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$)

$$d_{11} = 1 + k_1 \mathrm{Re}\, W_1, \quad d_{12} = \frac{1}{2}\left(k_1 \delta W_1 + \frac{k_2}{\delta}\overline{W}_2\right), \quad d_{21} = \overline{d_{12}},$$
$$d_{22} = 1 + k_2 \mathrm{Re}\, W_2.$$

Неравенства на диагональные элементы $d_{11} > 0$ и $d_{22} > 0$ совпадают с неравенствами круговых критериев устойчивости систем управления с одной нелинейностью [9, 18] или, что то же самое, определяют условия разрешимости систем из двух матричных неравенств из системы (7), первого и второго и, соответственно, первого и третьего.

Определим вид функций $W_i(p) = c_i^\top (A - pE_n)^{-1} b$. Из-за специфики векторов c_1, c_2 и b имеем $W_1(p) = \left\{(A - pE_3)^{-1}\right\}_{11}$ и $W_2(p) = \left\{(A - pE_3)^{-1}\right\}_{12}$. Поскольку матрица A задана в форме Фробениуса, то легко видеть, что $\det(A - pE_3) = -(1+p)^3$. Таким образом получим

$$W_1(p) = -\left(p^2 + 3p + 3\right)/(p+1)^3 \quad \text{и} \quad W_3(p) = 1/(p+1)^3,$$

тогда

$$\begin{aligned}
W_1(i\omega) &= -\left((i\omega)^2 + 3(i\omega) + 3\right)/(1+i\omega)^3 = \\
&= \left(\omega^2 - 3\right)/\left(1+\omega^2\right)^3 + i\omega\left(\omega^4 + 3\omega^2 + 6\right)/\left(1+\omega^2\right)^3, \\
W_2(i\omega) &= 1/(1+i\omega)^3 = (1-i\omega)^3/\left(1+\omega^2\right)^3 = \\
&= \left(1 - 3\omega^2\right)/\left(1+\omega^2\right)^3 + i\omega\left(-3+\omega^2\right)/\left(1+\omega^2\right)^3.
\end{aligned}$$

Выпишем отдельно действительную и мнимую части $W_1(i\omega)$ и $W_2(i\omega)$ из (29), поскольку они неоднократно потребуются в дальнейшем:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re} W_1(i\omega) = \frac{\omega^2 - 3}{(1+\omega^2)^3}, \quad \mathrm{Im} W_1(i\omega) = \frac{\omega(\omega^4 + 3\omega^2 + 6)}{(1+\omega^2)^3}, \\
&\mathrm{Re} W_2(i\omega) = \frac{1 - 3\omega^2}{(1+\omega^2)^3}, \quad \mathrm{Im} W_2(i\omega) = \frac{\omega(-3+\omega^2)}{(1+\omega^2)^3}.
\end{aligned} \tag{П.6}$$

Первое неравенство $d_{11} > 0$ имеет вид

$$1 + k_1 \mathrm{Re} W_1(i\omega) = 1 + k_1(\omega^2 - 3)/(1+\omega^2)^3 > 0. \tag{П.7}$$

Сделаем замену $\omega^2 = y$, тогда задача сводится к определению k_1, при которых неравенство

$$
\text{(П.8)}\qquad \begin{aligned} P_1(y) = (1+y)^3 + k_1 y - 3k_1 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3 + k_1 y - 3k_1 = \\ = y^3 + 3y^2 + y(3+k_1) + 1 - 3k_1 > 0 \end{aligned}
$$

выполнено при всех $y \geqslant 0$. Очевидно, что это произойдет только при $1 - 3k_1 > 0$, т.е. при $k_1 < 1/3$, что совпадает с условием гурвицевости матрицы A_2.

Второе неравенство $d_{22} > 0$ имеет вид

$$
\text{(П.9)}\qquad 1 + k_2 \mathrm{Re} W_2(i\omega) = 1 + k_2(1 - 3\omega^2)/(1+\omega^2)^3 > 0.
$$

Сделаем замену $\omega^2 = y$, тогда задача сводится к определению k_2, при которых неравенство

$$
\text{(П.10)}\qquad \begin{aligned} P_2(y) = (1+y)^3 + k_2 - 3k_2 y = 1 + 3y + 3y^2 + y^3 + k_2 - 3k_2 y = \\ = y^3 + 3y^2 + 3y(1-k_2) + 1 + k_2 > 0 \end{aligned}
$$

выполнено при всех $y \geqslant 0$. Видно, что при $k_2 < 1$ уже выполнено. Подробное рассмотрение, которое здесь опустим, приводит к тому, что $P_2(y) > 0$ при всех $y \geqslant 0$, если $k_2 < 4$.

Для проверки положительной определенности эрмитовой матрицы $D(i\omega) > 0$ осталось проверить неравенство $\Delta = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} > 0$. Для упрощения записи введем обозначения $k_i \mathrm{Re}\, W_i = R_i$ и $k_i \mathrm{Im}\, W_i = I_i$. В упрощенных обозначениях неравенство $\Delta > 0$ принимает вид

$$
\text{(П.11)}\qquad \Delta = (1+R_1)(1+R_2) - \frac{1}{4}\left(\delta R_1 + \frac{1}{\delta}R_2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\delta I_1 - \frac{1}{\delta}I_2\right)^2 > 0.
$$

Подставляя R_i и I_i из (П.6) и заменяя ω^2 на y, отдельно вычислим слагаемые, входящие в (П.11) (для $(1+R_1)(1+R_2)$ используем (П.7)–(П.10)):

$$
\begin{gathered} (1+R_1)(1+R_2) = \\ = \frac{1}{(1+y)^6}\left(y^3 + 3y^2 + y(3+k_1) + 1 - 3k_1\right)\left(y^3 + 3y^2 + 3y(1-k_2) + 1 + k_2\right), \end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered} \frac{-1}{4}\left(\delta R_1 + \frac{1}{\delta}R_2\right)^2 = \frac{-1}{4}\left(\delta^2 R_1^2 + 2R_1R_2 + \frac{1}{\delta^2}R_2^2\right) = \\ = \frac{-1}{(1+y)^6}\left[\frac{\delta^2 k_1^2}{4}(y-3)^2 + \frac{k_1k_2}{2}(y-3)(1-3y) + \frac{k_2^2}{4\delta^2}(1-3y)^2\right], \end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered} \frac{-1}{4}\left(\delta I_1 - \frac{1}{\delta}I_2\right)^2 = \frac{-1}{4}\left(\delta^2 I_1^2 - 2I_1I_2 + \frac{1}{\delta^2}I_2^2\right) = \\ = \frac{-1}{(1+y)^6}\left[\frac{\delta^2 k_1^2}{4}y\left(y^2+3y+6\right)^2 - \frac{k_1k_2}{2}y\left(y^2+3y+6\right)(y-3) + \frac{k_2^2}{4\delta^2}y(y-3)^2\right]. \end{gathered}
$$

Избавляясь от положительного знаменателя, приходим к выводу, что выполнение неравенства (П.11) при всех ω эквивалентно положительности полинома шестой степени

$$\Delta(1+y)^6 > 0 \tag{П.12}$$

при всех $y \geqslant 0$. Необходимым условием выполнения (П.12) является его выполнение при $y = 0$, т.е.

$$\Delta_0(\delta^2) = (1-3k_1)(1+k_2) - \frac{9\delta^2}{4}k_1^2 + \frac{3}{2}k_1k_2 - \frac{k_2^2}{4\delta^2} > 0. \tag{П.13}$$

Производная по δ^2 функции $\Delta_0(\delta^2)$ из (П.13) имеет вид

$$\left(\Delta_0(\delta^2)\right)' = -\frac{9k_1^2}{4} + \frac{k_2^2}{4\delta^4} = 0.$$

Из ее анализа следует, что $(\delta^*)^2 = \dfrac{k_2}{3k_1}$ — точка максимума. Подставим в (П.13), получим $\Delta_0((\delta^*)^2) = (1-3k_1)(1+k_2) > 0$ при $k_1 < 1/3$ (даже от k_2 не зависит).

Анализ положительности коэффициентов полинома (П.12) при этом $(\delta^*)^2 = \dfrac{k_2}{3k_1}$ позволяет сделать вывод о том, что наиболее ограничительным является требование положительности коэффициента полинома (П.12) при y, которое приводит к условию $k_2/k_1 = k^* < 24/7$.

Утверждение 1 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8. № 3. С. 246–248.
2. *Либерзон М.Р.* Очерки о теории абсолютной устойчивости // АиТ. 2006. № 10. С. 86–119.

   Liberzon M.R. Essays on the Absolute Stability Theory // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 10. P. 1610–1644.
3. *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости “в большом” динамических систем // Успехи мат. наук. 1949. Т. 14. Вып. 4(32). С. 187–188.
4. *Плисс В.А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958.
5. *Барабанов Н.Е.* О проблеме Айзермана для нестационарных систем третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 10. С. 1659–1668.
6. *Пятницкий Е.С.* Работа М.А. Айзермана по теории регулирования, теории устойчивости движения и теории колебаний / Марк Аронович Айзерман (1918–1992). М.: Физматлит, 2003. С. 82–104.
7. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

8. *Jayawardhana B., Logemann H., Ryan E.P.* The Circle Criterion and Input-to-State Stability: New perspectives on a classical result // IEEE Control Syst. Magazine. 2011. V. 31. No. 4. P. 32–67.

9. *Shorten R., Wirth F., Mason O. et al.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. No. 4. P. 545–592.

10. *Duignan R., Curran P.F.* An Investigation on the Absolute Stability of Discrete and Continuous Time Lur'e Systems // 2007 Int. Symp. Nonlinear Theory Appl. NOLTA'07, Vancouver, Canada, September 16–19, 2007. P. 349–352.

11. *Valmorbida G., Drummond R., Duncan S.R.* Regional Analysis of Slope-Restricted Lurie Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. V. 64. No. 3. P. 1201–1208.

12. *Якубович В.А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. II // АиТ. 1971. № 6. С. 25–34.

    Yakubovich V.A. Absolute Instability of Nonlinear Control Systems. II // Autom. Remote Control. 1971. V. 32. No. 6. P. 1. P. 876–884.

13. *Каменецкий В.А.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // АиТ. 1983. № 12. С. 20–30.

    Kamenetskii V.A. Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Several Nonlinear Nonstationary Elements // Autom. Remote Control. 1983. V. 44. No. 12. P. 1543–1552.

14. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhäuser, 2003.

15. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Абсолютная неустойчивость нелинейных нестационарных систем. I, II // АиТ. 1982. № 1. С. 19–27; № 2. С. 17–28.

    Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S. Absolute Instability of Nonlinear Nonstationary Systems. I, II // Autom. Remote Control. 1982. V. 43. No. 1. P. 1. P. 13–20; No. 2. P. 1. P. 147–157.

16. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. I // АиТ. 1986. № 3. 63–73.

    Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S. Lyapunov Functions that Specify Necessary and Sufficient Conditions of Absolute Stability of Nonlinear Nonstationary Control Systems. I // Autom. Remote Control. 1986. V. 47. No. 3. P. 1. P. 344–354.

17. *Каменецкий В.А., Пятницкий Е.С.* Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости // АиТ. 1987. № 1. С. 3–12.

    KamenetskiI V.A., Pyatnitskii E.S. Gradient Method of Constructing Lyapunov Functions in Problems of Absolute Stability // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 1. P. 1. P. 1–9.

18. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости гибридных систем // АиТ. 2017. № 12. С. 3–25.

    Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Hybrid Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 12. P. 2101–2119.

19. *Shorten R.S., Narendra K.S.* On Common Quadratic Lyapunov Functions for Pairs of Stable LTI Systems whose System Matrices are in Companion Form // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 4. P. 618–621.

20. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

21. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // АиТ. 2018. № 8. С. 3–26.

Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Discrete-Time Switched Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 8. P. 13711–1389.

22. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Общая функция Ляпунова в задаче синтеза управления линейными динамическими системами / Проблемы устойчивости и управления. Сб. науч. ст., посв. 80-летию акад. В.М. Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 91–103.

23. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., астроном., физ. хим. 1959. № 2. С. 25–32.

24. *Пятницкий Е.С., Скородинский В.И.* Численные методы построения функций Ляпунова и критерии абсолютной устойчивости в форме численных процедур // АиТ. 1983. № 11. С. 52–63.

Pyatnitskii E. S., Skorodinskii V.I. Numerical Method of Construction of Lyapunov Functions and Absolute Stability Criteria in the Form of Numerical Procedures // Autom. Remote Control. 1983. V. 44. No. 11. P. 1. P. 1427–1437.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 11.10.2018

После доработки 26.11.2018

Принята к публикации 07.02.2019