Автоматика и телемеханика, № 8, 2019

© 2019 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ: II. ЗАДАЧА СИНТЕЗА[1]

Получены и обсуждены результаты, связанные с задачей синтеза для билинейной системы при произвольных ограниченных внешних возмущениях. Поставлены и решены задачи конструктивного построения эллипсоида стабилизируемости и области стабилизируемости билинейной системы управления как в непрерывном, так и в дискретном времени. Главным инструментом при этом является техника линейных матричных неравенств. Предложенный простой и универсальный подход имеет большой потенциал и возможности для обобщений, в частности — на различные робастные постановки задачи.

Ключевые слова: билинейная система управления, ограниченные внешние возмущения, квадратичная функция Ляпунова, линейная обратная связь, эллипсоид стабилизируемости, область стабилизируемости, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.1134/S000523101908004X

1. Введение

Задачам, связанным с вопросами устойчивости, стабилизации и синтеза управления для билинейных систем, традиционно уделяется достаточно большое внимание в публикациях, начиная с появления монографии [1]; при этом предлагаются как самые различные постановки задач, так и подходы к их решению, см. [2–15] и др.; в частности, в некоторых публикациях (см., например, [6]) предпринимаются попытки эллипсоидального подхода к рассматриваемой проблематике. Среди наиболее идейно близких работ отметим [16, 17], которые также посвящены построению квадратичных функций Ляпунова для задач стабилизации билинейных систем при помощи техники линейных матричных неравенств [18, 19].

В недавних публикациях [20–22] на основе техники линейных матричных неравенств и квадратичных функций Ляпунова для билинейной системы управления эффективно строился так называемый эллипсоид стабилизируемости такой, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю. В дальнейшем это позволило конструировать невыпуклые области стабилизируемости билинейных систем управления.

[1] Исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00140).

Однако настоящая статья существенно отличается от всех указанных публикаций: в ней рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию *произвольных ограниченных внешних возмущений*. Эта тематика (применительно к линейным системам) восходит к работам Б.В. Булгакова, см. [23–25], который занимался так называемой *проблемой о накоплении возмущений*. В настоящей статье ставятся и решаются новые задачи стабилизации и управления билинейными системами при внешних возмущениях; в частности, предложен подход к конструктивному построению эллипсоида стабилизируемости и области стабилизируемости билинейной системы управления. Данная статья является непосредственным продолжением работы [26], посвященной вопросам анализа для билинейной системы с внешними возмущениями.

Статья организована следующим образом: раздел 2 посвящен построению эллипсоида стабилизируемости билинейной системы, подверженной воздействию внешних возмущений; в разделе 3 рассматривается построение области стабилизируемости билинейной системы; в разделе 4 обсуждаются билинейные системы управления в дискретном времени; раздел 5 содержит заключительные комментарии.

Несмотря на то что в статье рассматриваются системы со скалярным управлением, предложенный подход в полной мере распространим и на системы с многомерным управлением. При этом выкладки становятся несколько более громоздкими, в то время как идейная сторона меняется мало.

Всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $^\top$ — символ транспонирования, I — единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Эллипсоид стабилизируемости

Рассмотрим билинейную систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bxu + bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, скалярным управлением $u \in \mathbb{R}$ и внешним возмущением $w \in \mathbb{R}^m$, измеримым по t и ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leqslant \gamma \quad \text{при всех } t \geqslant 0. \tag{2}$$

Таким образом, рассматриваются L_∞-ограниченные внешние возмущения. Класс таких возмущений будем называть *допустимым*.

Целями этого раздела являются: а) построение эллипсоида стабилизируемости билинейной системы (1), (2), замкнутой статической линейной обратной связью

$$u = k^\top x, \quad k \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

и б) нахождение управления вида (3) такого, для которого эллипсоид стабилизируемости максимален (по тому или иному критерию).

Замкнув билинейную систему (1), (2) обратной связью (3), приходим к квадратичной динамической системе вида

$$\dot{x} = (A_c + Bxk^\top)x + Dw,$$

где

$$A_c = A + bk^\top.$$

В [26] было установлено достаточное условие, при котором эллипсоид

$$\mathcal{E} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\Big\}, \quad P \succ 0, \tag{4}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для рассматриваемой квадратичной системы.

Теорема 1 [26]. *Эллипсоид* (4) *является эллипсоидом стабилизируемости для системы*

$$\dot{x} = (A + Bxh^\top)x + Dw, \quad \|w(t)\| \leqslant \gamma,$$

если его матрица P *удовлетворяет матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Ph & \gamma D \\ h^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых α *и* ε.

Воспользовавшись теоремой 1, приходим к соотношениям

$$\begin{pmatrix} A_cP + PA_c^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Pk & \gamma D \\ k^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0, \tag{5}$$

которые должны выполняться при некоторых значениях скалярных параметров α и ε.

Первое из соотношений (5) принимает вид

$$\begin{pmatrix} (A + bk^\top)P + P(A + bk^\top)^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Pk & \gamma D \\ k^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Введем вспомогательную векторную переменную

$$y = Pk \in \mathbb{R}^n,$$

исключая k; при этом в силу $P \succ 0$ вектор k восстанавливается единственным образом:

$$k = P^{-1}y.$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & y & \gamma D \\ y^\top & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

со скалярными параметрами ε и α, линейному относительно матричной переменной P и векторной переменной y.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть матрица P и вектор y удовлетворяют матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & y & \gamma D \\ y^\top & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых значениях скалярных параметров ε и α.

Тогда линейная обратная связь (3) с регулятором

$$k = P^{-1} y$$

стабилизирует систему (1) внутри эллипсоида

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2).

Понятно, что не при любом размахе внешних возмущений γ эллипсоид стабилизируемости для системы (1), (2) будет существовать. Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе γ дается следующим утверждением.

Теорема 3. *Максимальный размах $\widehat{\gamma}$ внешних возмущений (2) в системе (1), при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи*

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & y & \gamma D \\ y^\top & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменой $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярной переменной γ и скалярных параметров α и ε.

Естественно стремиться максимизировать эллипсоид стабилизируемости по некоторому критерию. В частности, максимизируя (при $\gamma \leqslant \widehat{\gamma}$) объем эллипсоида, получаем следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации

$$\max \log \det P$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & y & \gamma D \\ y^\top & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0, \tag{6}$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$ и скалярных параметров ε и α.

Тогда

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для билинейной системы (1)*, замкнутой линейной обратной связью с регулятором*

$$\widehat{k} = \widehat{P}^{-1}\widehat{y},$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2)*.*

Обратим внимание, что и теорема 2 и ее следствие 1 предполагают осуществление процедуры двумерной оптимизации по α и по ε, поскольку каждый из этих параметров нелинейно входит в соответствующие ограничения.

Замечание 1. В случае когда матрица B единичная (или может быть приведена к единичной с помощью линейного преобразования), можно избежать необходимости проведения оптимизации на двумерной сетке. В самом деле, при этом первое из матричных неравенств (6) примет вид

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon P & y & \gamma D \\ y^\top & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вводя новую скалярную переменную

$$\mu = \alpha + \varepsilon$$

и тем самым исключая ε, получаем матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \mu P & y & \gamma D \\ y & \alpha - \mu & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

линейное относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$ и скалярной переменной α, с одним скалярным параметром μ.

3. Область стабилизируемости

В разделе 2 был найден максимальный (по критерию объема) эллипсоид стабилизируемости $\mathcal{E}$ для системы (1), (2). Как и при решении задачи анализа в [26], введем в рассмотрение множество, образованное объединением эллипсоидов стабилизируемости; естественно назвать его *областью стабилизируемости* системы (1), (2). Очевидно, что область стабилизируемости будет обладать тем же свойством, что и каждый образующий ее эллипсоид стабилизируемости — траектория системы, исходящая из любой точки x_0 внутри этой области, будет оставаться в ней при всех допустимых внешних возмущениях (2). Однако следует подчеркнуть, что в отличие от эллипсоида стабилизируемости, всем точкам которого соответствует общий стабилизирующий регулятор, здесь ситуация принципиально иная: различным точкам области стабилизируемости могут соответствовать различные регуляторы, стабилизирующие билинейную систему (1).

Отметим, что поскольку областью стабилизируемости по существу является объединение эллипсоидов стабилизируемости, то в общем случае она может оказаться невыпуклой.

В рамках техники линейных матричных неравенств по произвольному вектору c можно эффективно построить точку, лежащую на границе области стабилизируемости системы по направлению c: выберем направление, определяемое вектором c единичной длины, и будем требовать принадлежности точки ρc эллипсоиду стабилизируемости, максимизируя параметр ρ. Поскольку условие принадлежности точки ρc эллипсоиду стабилизируемости с матрицей P представимо по лемме Шура в линейном относительно P и ρ виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c^\top \\ \rho c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

приходим к следующему результату, устанавливающему простую характеризацию области стабилизируемости билинейной динамической системы, подверженной воздействию внешних возмущений.

Т е о р е м а 4. *Пусть c — заданный вектор и пусть $\widehat{\rho}$ — решение задачи*

$$\max \rho$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & y & \gamma D \\ y^\top & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c \\ \rho c^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярной переменной ρ и скалярным параметрам α и ε.

Тогда точка $\widehat{\rho}c$ лежит на границе области стабилизируемости системы (1), (2) *по направлению c.*

4. Система в дискретном времени

Рассмотрим билинейную систему управления в дискретном времени

$$x_{\ell+1} = Ax_\ell + Bx_\ell u_\ell + bu_\ell + Dw_\ell, \tag{7}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, с начальным состоянием x_0, фазовым состоянием $x_\ell \in \mathbb{R}^n$, скалярным управлением $u_\ell \in \mathbb{R}$ и внешним возмущением $w_\ell \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$\|w_\ell\| \leqslant \gamma \quad \text{при всех } \ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Замкнув билинейную систему (7), (8) статической линейной обратной связью

$$u_\ell = k^\top x_\ell, \quad k \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

приходим к дискретной квадратичной динамической системе

$$x_{\ell+1} = (A_c + Bx_\ell k^\top)x_\ell + Dw_\ell,$$

где $A_c = A + bk^\top$.

В [26] установлено достаточное условие, при котором эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{x_\ell \in \mathbb{R}^n\colon \quad x_\ell^\top P^{-1} x_\ell \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0, \tag{10}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для рассматриваемой дискретной квадратичной системы, а именно имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 5 [26]. *Эллипсоид* (10) *является эллипсоидом стабилизируемости для системы*

$$x_{\ell+1} = (A + Bx_\ell h^\top)x_\ell + Dw_\ell, \quad \|w_\ell\| \leqslant \gamma,$$

если его матрица P удовлетворяет матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых α и ε.

Воспользовавшись теоремой 5, приходим к соотношениям

$$
\begin{pmatrix}
-\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & PA_c^\top \\
0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\
0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\
k^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\
A_c P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P
\end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0, \tag{11}
$$

которые должны выполняться при некоторых значениях скалярных параметров α и ε.

Первое из соотношений (11) принимает вид

$$
\begin{pmatrix}
-\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & P(A+bk^\top)^\top \\
0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\
0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\
k^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\
(A+bk^\top)P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P
\end{pmatrix} \preccurlyeq 0.
$$

Введем вспомогательную векторную переменную

$$
y = Pk \in \mathbb{R}^n,
$$

исключая k; при этом в силу $P \succ 0$ вектор k восстанавливается единственным образом:

$$
k = P^{-1}y.
$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$
\begin{pmatrix}
-\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\
0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\
0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\
y^\top & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\
AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P
\end{pmatrix} \preccurlyeq 0
$$

со скалярными параметрами ε и α, линейному относительно матричной переменной P и векторной переменной y.

Таким образом, получен следующий результат.

Т е о р е м а 6. *Пусть матрица P и вектор y удовлетворяют матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых значениях скалярных параметров ε и α.

Тогда линейная обратная связь (9) *с регулятором*

$$k = P^{-1}y$$

стабилизирует систему (7) *внутри эллипсоида*

$$\mathcal{E} = \Big\{ x_\ell \in \mathbb{R}^n: \quad x_\ell^\top P^{-1} x_\ell \leqslant 1 \Big\}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (8).

Как и в непрерывном случае, эллипсоид стабилизируемости для системы (7), (8) существует не при любом размахе внешних возмущений γ. Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе γ дается следующим дискретным аналогом теоремы 3.

Т е о р е м а 7. *Максимальный размах $\widehat{\gamma}$ внешних возмущений* (8) *в системе* (7), *при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи*

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменой $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярной переменной γ и скалярных параметров α и ε.

Максимизируя (для допустимого $\gamma \leqslant \widehat{\gamma}$) объем эллипсоида, получаем следующее следствие из теоремы 6.

Следствие 2. Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации

$$\max \log\det P$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$ и скалярных параметров ε и α.

Тогда

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x_\ell \in \mathbb{R}^n: \quad x_\ell^\top \widehat{P}^{-1} x_\ell \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для билинейной системы (7), замкнутой линейной обратной связью (9) с регулятором

$$\widehat{k} = \widehat{P}^{-1}\widehat{y},$$

при всех допустимых внешних возмущениях (8).

Наконец, следующая теорема является дискретной версией теоремы 4.

Теорема 8. Пусть c — заданный вектор и пусть $\widehat{\rho}$ — решение задачи

$$\max \rho$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c \\ \rho c^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярной переменной ρ и скалярным параметрам α и ε.

Тогда точка $\widehat{\rho} c$ лежит на границе области стабилизируемости системы (7), (8) по направлению c.

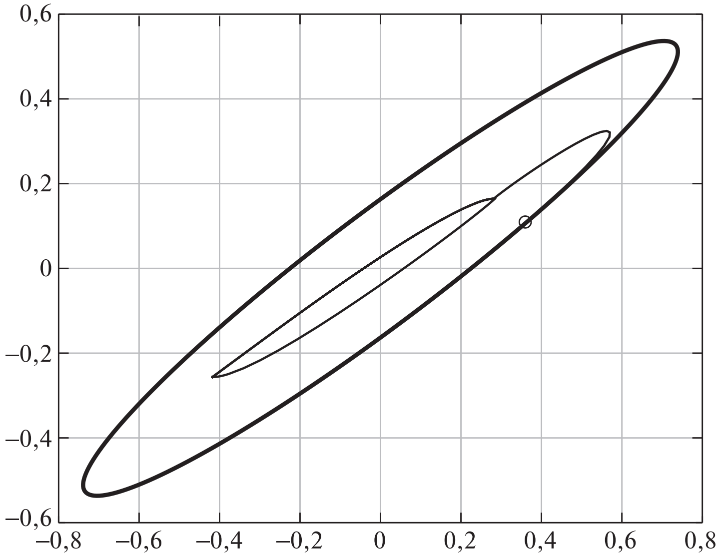

Рис. 1. Эллипс стабилизируемости и траектория замкнутой системы из примера 1.

Пример 1. Рассмотрим систему управления вида (1) с параметрами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = I, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Теорема 3 дает максимально допустимый размах внешних возмущений

$$\widehat{\gamma} = 1{,}8157;$$

примем $\gamma = 1$. Согласно следствию 1 получаем матрицу

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5464 & 0{,}3779 \\ 0{,}3779 & 0{,}2879 \end{pmatrix}$$

эллипса стабилизируемости системы и соответствующую матрицу

$$\widehat{k} = \begin{pmatrix} 34{,}3307 \\ -64{,}3609 \end{pmatrix}$$

стабилизирующего регулятора.

На рис. 1 показан найденный эллипс стабилизируемости для системы (12), (2) и траектория замкнутой системы при некотором допустимом внешнем возмущении.

Далее, воспользовавшись теоремой 4, находим область стабилизируемости билинейной системы. На рис. 2 сплошной линией показана найденная область стабилизируемости; для сравнения на том же рисунке показан найденный выше эллипс стабилизируемости, максимальный по критерию объема. Обратим внимание на невыпуклость полученной области стабилизируемости.

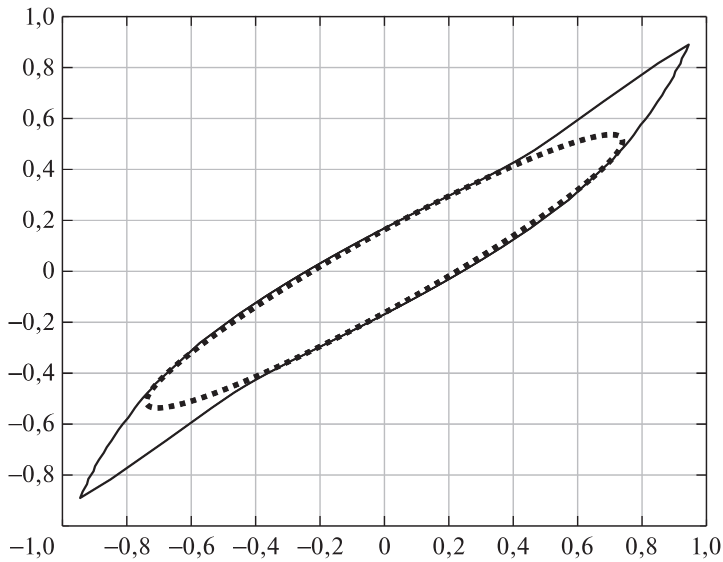

Рис. 2. Область стабилизируемости и эллипс стабилизируемости из примера 1.

Пример 2. Рассмотрим билинейную систему вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 13/6 & 5/12 \\ -50/3 & -8/3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = I.$$

Эта система представляет собой модель химического реактора (см. [27]); здесь x_1 и x_2 соответственно — безразмерные фазовые переменные температуры и концентрации. Применение предложенного подхода позволило построить эллипс стабилизируемости с матрицей

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7799 & -4{,}1707 \\ -4{,}1707 & 27{,}2303 \end{pmatrix}$$

и соответствующий регулятор

$$\widehat{k} = \begin{pmatrix} -0{,}1996 \\ -0{,}0673 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

На рис. 3 показан найденный эллипс стабилизируемости и траектория замкнутой системы при внешнем возмущении

$$w(t) = 0{,}01 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

и начальном условии (см. [28])

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Все вычисления проводились в среде Matlab с использованием программного пакета `cvx` [29, 30].

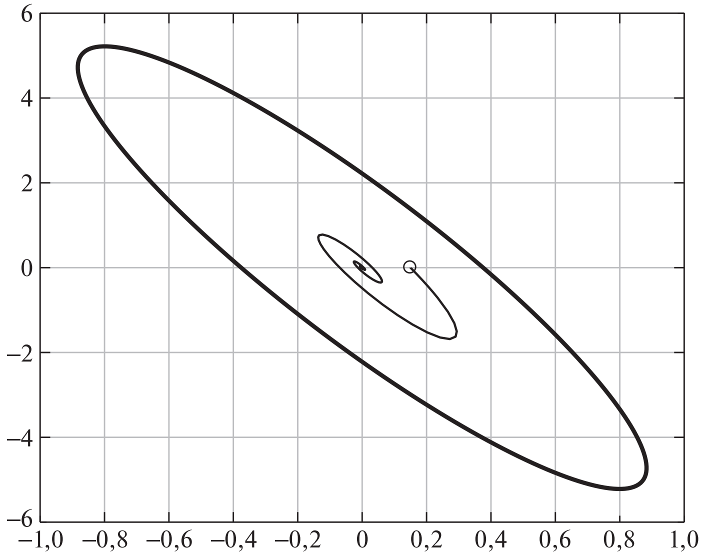

Рис. 3. Эллипс стабилизируемости и траектория замкнутой системы из примера 2.

5. Заключение

В статье введены понятия эллипсоида стабилизируемости и области стабилизируемости билинейной системы управления, подверженной воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений, и предложен легко реализуемый с вычислительной точки зрения подход к их конструктивному построению.

Естественным развитием полученных результатов будет служить их распространение на системы с многомерным управлением, на разнообразные робастные постановки задачи (в частности — со структурированной матричной неопределенностью в матрицах системы), а также на задачи синтеза линейной обратной связи по выходу билинейной системы.

Автор признателен Б.Т. Поляку за интерес к работе, плодотворные обсуждения и полезные предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mohler R.R.* Bilinear Control Processes. N.Y.: Academic Press, 1973.
2. *Ryan E., Buckingham N.* On Asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1983. V. 28. Iss. 8. P. 863–864.
3. *Chen L.K., Yang X., Mohler R.R.* Stability Analysis of Bilinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. Iss. 11. P. 1310–1315.
4. *Čelikovský S.* On the Global Linearization of Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1990. V. 15. No. 5. P. 433-439.
5. *Čelikovský S.* On the Stabilization of the Homogeneous Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1993. V. 21. No. 6. P. 503–510.

6. *Tibken B., Hofer E.P., Sigmund A.* The Ellipsoid Method for Systematic Bilinear Observer Design // Proc. 13th IFAC World Congr. San Francisco, USA, June 30–July 5, 1996. P. 377–382.
7. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом // ДАН. Теория управления. 2004. Т. 398. № 1. С. 38–43.
8. *Belozyorov V.Y.* Design of Linear Feedback for Bilinear Control Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2002. V. 11. No. 2. P. 493–511.
9. *Belozyorov V.Y.* On Stability Cones for Quadratic Systems of Differential Equations // J. Dyn. Control Syst. 2005. V. 11. No. 3. P. 329–351.
10. *Andrieu V., Tarbouriech S.* Global Asymptotic Stabilization for a Class of Bilinear Systems by Hybrid Output Feedback // IEEE Trans. Autom. Control. 2013. V. 58. No. 6. P. 1602–1608.
11. *Coutinho D., de Souza C.E.* Nonlinear State Feedback Design with a Guaranteed Stability Domain for Locally Stabilizable Unstable Quadratic Systems // IEEE Trans. Circuits Syst. I. Regular Papers. 2012. V. 59. No. 2. P. 360–370.
12. *Omran H., Hetel L., Richard J.-P., et al.* Stability Analysis of Bilinear Systems under Aperiodic Sampled-Data Control // Automatica. 2014. V. 50. No. 4. P. 1288–1295.
13. *Kung C.-C., Chen T.-H., Chen W.-C., et al.* Quasi-Sliding Mode Control for a Class of Multivariable Discrete Time Bilinear Systems // Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). Seoul, Korea. October 2012. P. 1878–1883.
14. *Athanasopoulos N., Bitsoris G.* Constrained Stabilization of Bilinear Discrete-Time Systems Using Polyhedral Lyapunov Functions // Proc. 17th IFAC World Congr. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 2502–2507.
15. *Athanasopoulos N., Bitsoris G.* Stability Analysis and Control of Bilinear Discrete-Time Systems: A Dual Approach // Proc. 18th IFAC World Congr. Milano, Italy, August 28–September 2, 2011. P. 6443–6448.
16. *Tarbouriech S., Queinnec I., Calliero T.R., et al.* Control Design for Bilinear Systems with a Guaranteed Region of Stability: An LMI-Based Approach // Proc. 17th Mediterranean Conf. on Control & Automation (MED'09). Thessaloniki, Greece. June 2009. P. 809–814.
17. *Amato F., Cosentino C., Merola A.* Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control // IEEE Trans. Circuits Syst. II. Express Briefs. 2009. V. 56. No. 1. P. 76–80.
18. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
19. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
20. *Khlebnikov M.V.* Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // 14th Europ. Control Conf. (ECC'15). Linz, Austria, July 15–17, 2015. IEEE Catalog Number(USB): CFP1590U-USB. P. 160–164.
21. *Хлебников М.В.* Квадратичная стабилизация билинейной системы управления // АиТ. 2016. № 6. С. 47–60.

    Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 980–991.
22. *Khlebnikov M.V.* Quadratic Stabilization of Discrete-Time Bilinear Control Systems // 2018 Europ. Control Conf. (ECC18). Limassol, Cyprus, June 12–15, 2018. IEEE Catalog Number(USB): CFP1890U-USB. P. 201–205.

23. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. Вып. 5. С. 339–342.
24. *Гноенский Л.С.* Задача Булгакова о накоплении возмущений / Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение. Под ред. В.В. Александрова. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993. С. 7–29.
25. *Жермоленко В.Н.* Максимальное отклонение колебательной системы второго порядка с внешним и параметрическим возмущениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 3. С. 75–80.
26. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: I. Задача анализа // АиТ. 2019. № 2. С. 46–63.

    Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: I. Analysis // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 234–249.
27. *Hofer E.P.* Nonlinear and Bilinear Models for Chemical Reactor Control // Math. Model. 1987. V. 8. P. 406–411.
28. *Kang D., Won S., Jang Y.J.* Guaranteed Cost Control for Bilinear Systems by Static Output Feedback // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219. No. 14. P. 7398–7405.
29. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. URL `http://cvxr.com/cvx`, September 2013.
30. *Grant M., Boyd S.* Graph Implementations for Nonsmooth Convex Programs / Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar), V. Blondel, S. Boyd, H. Kimura, editors. Springer, 2008. P. 95–110. URL `http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html`

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 17.01.2019

После доработки 26.02.2019

Принята к публикации 25.04.2019