

Управление в технических системах

© 2019 г. Г.И. БЕЛЯВСКИЙ, д-р техн. наук (beliavsky@hotmail.com),
Н.В. ДАНИЛОВА, канд. физ.-мат. наук (danilova198686@mail.ru),
И.А. ЗЕМЛЯКОВА (eizzzie@yandex.ru)
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;
Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗЛАДКОЙ¹

Рассматривается обобщение процессов с разладкой, а именно процессы с векторной разладкой. Для такого типа задач рассматривается класс задач оптимального управления без обнаружения разладки. Предложен вычислительный метод решения задач управления на конечном временном интервале и с целевым функционалом, определенным на конце интервала, основанный на использовании мартингальной техники. Рассмотрен вычислительный эксперимент для модели с двумя барьерами и двумя моментами останова.

Ключевые слова: процессы с разладкой, векторная разладка, мартингал, мартингальная мера, винеровский процесс, квантильное хеджирование.

DOI: 10.1134/S0005231019080063

1. Введение

Процессы, о которых пойдет речь, достаточно популярны на протяжении длительного времени. Эти процессы называются процессами со сменой режимов. Процессы с разладкой являются важным подклассом процессов со сменой режимов. В связи с разладкой основная задача, которая обсуждается в публикациях, заключается в наиболее быстром обнаружении момента разладки [1–3]. Рассмотрим обобщение процессов с разладкой, а именно процессы с векторной разладкой, и важный класс задач оптимального управления такого рода процессами без обнаружения разладки. Будем рассматривать задачи управления на конечном временном интервале и с целевым функционалом, определенным на конце интервала. Для этих задач будет предложен вычислительный метод их решения. При этом будет использована мартингальная техника, применяемая, например, в стохастической финансовой математике [4, 5]. Статья построена следующим образом. В разделе 2 излагаются основные понятия, которые используются в остальных разделах, приводится решаемая задача оптимального управления и описывается метод ее решения.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01038).

В разделе 3 рассматривается модель, для которой приводится решение задачи управления. В разделе 4 рассматривается решение задачи квантильного хеджирования для изучаемой модели. В разделе 5 приводятся результаты эксперимента. В разделе 6 подводятся итоги статьи и намечается направление дальнейшего исследования.

2. Основные понятия

Рассмотрим стохастический базис $\langle \Omega, (F_t)_{t \geq 0}, F, P \rangle$. Пространство элементарных случайных событий Ω – это пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ траекторий, фильтрация $(F_t)_{t \geq 0}$ наделена набором стандартных свойств, σ -алгебра $F = \sigma \left(\bigcup_{t \in [0, T]} F_t \right) = F_T$. Основным источником случайности будем считать стандартный винеровский процесс, канонически заданный $W_t(\omega) = \omega(t)$, более того будем считать, что данный процесс определяет стохастический базис в следующем смысле: вероятностная мера P является винеровской мерой, фильтрация $F_t = \sigma(W_s, s \in [0, t] \cup N)$, где N – σ -алгебра, содержащая все множества нулевой меры.

Рассмотрим процесс Ито: $dX(\omega, t) = \alpha_X(\omega, t) dt + \beta_X(\omega, t) dW_t$. В следующих далее формулах траектория ω будет опущена там, где это не приводит к непониманию. Допустим, что коэффициент $\beta_X(t) \neq 0$ с вероятностью единица, тогда процесс Ито X можно записать в виде $dX(t) = \beta_X(t) \left(\frac{\alpha_X(t)}{\beta_X(t)} dt + dW_t \right)$. Далее будем интересоваться процессом $d\bar{W} = \frac{\alpha_X(t)}{\beta_X(t)} dt + dW_t$, который будет процессом Ито при выполнении условия существования интеграла $P \left(\int_0^T |\chi_X(s)| ds < \infty \right) = 1$, $\chi_X(t) = \frac{\alpha_X(t)}{\beta_X(t)}$. Для дальнейшего понадобится одно из утверждений теоремы Гирсанова, см., например, [4, с. 833].

Теорема 1. Рассмотрим процесс

$$Z_t = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \chi_X^2(s) ds + \int_0^t \chi_X(s) dW_s \right).$$

Если $E Z_t = E \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \chi_X^2(s) ds + \int_0^t \chi_X(s) dW_s \right) = 1$, то относительно меры $d\bar{P}_T = Z_T dP_T$ процесс Ито $d\bar{W}_t = \chi_X(t) dt + dW_t$ будет стандартным винеровским процессом, а процесс плотности Z_t будет равномерно интегрируемым мартингалом.

Через P_T обозначено сужение меры на σ -алгебру F_T . Достаточным условием выполнения равенства для математического ожидания является условие $P \left(\int_0^T \chi_X^2(s) ds < \infty \right) = 1$. Поскольку $Z_T > 0$, то новая мера эквивалентна исходной мере. Относительно этой новой меры процесс X выражается непосредственно через стандартный винеровский процесс \bar{W}_t в виде интеграла Ито $X(t) = X(0) + \int_0^t \beta_X(s) d\bar{W}_s$, для существования которого достаточным

условием является равенство $P\left(\int_0^T \beta_X^2(s) ds < \infty\right) = 1$. При выполнении этого условия процесс X – мартингал с непрерывной траекторией, причем существует единственная мера, относительно которой процесс X будет мартингалом. Далее используем теорему о представлении мартингалов [4, с. 313].

Теорема 2. Пусть $Y(t)$ – мартингал с непрерывной траекторией, тогда существует единственный прогрессивно измеримый процесс $\beta_Y(t)$, причем $P\left(\int_0^T \beta_Y^2(s) ds < \infty\right) = 1$, для которого $Y(t) = Y(0) + \int_0^t \beta_Y(s) dW_s$.

Следствие. При условии, что $\beta_X(t) \neq 0$, мартингал Y может быть выражен через мартингал X следующим образом: $Y(t) = Y(0) + \int_0^t \beta_{Y/X}(s) dX_s$, где $\beta_{Y/X}(t) \beta_X(t) = \beta_Y(t)$. Причем это представление является единственным.

Рассмотрим задачу оптимального управления на конечном интервале $[0, T]$ следующего вида:

$$\begin{aligned} & \min_{\beta_{Y/X}, y_0} E(\Phi(Y_T, \xi)) \\ & \text{при ограничениях} \\ (1) \quad & Y(t) = y_0 + \int_0^t \beta_{Y/X}(s) dX_s, \\ & X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha_X(s) dX_s + \int_0^t \beta_X(s) dW_s, \\ & y_0 \leq a. \end{aligned}$$

Здесь случайная величина ξ измерима относительно σ -алгебры F_T , функция двух переменных $\Phi(x, y)$ – выпуклая функция по первой переменной при произвольном значении второй переменной.

Далее процесс X будем называть базовым процессом, а процесс $\beta_{Y/X}$ – управлением или стратегией. Для решения этой задачи рассмотрим мартингальную меру \bar{P} : $d\bar{P}_T = Z_T dP_T$. Процесс плотности Z_t был определен ранее. Относительно этой новой меры процессы X_t и Y_t – мартингалы с непрерывными траекториями. Предположим, что существует решение задачи

$$(2) \quad \min_{\eta} E(\Phi(\eta, \xi)) \text{ при условии } \bar{E}\eta \leq a.$$

Допустим, что η^* – решение задачи (2). Рассмотрим процесс

$$(3) \quad V(t) = \bar{E}(\eta^*/F_t)$$

который является равномерно интегрируемым мартингалом относительно определенной ранее фильтрации и меры \bar{P} , поэтому процесс (3) выражается в виде

$$(4) \quad V(t) = \bar{E}\eta^* + \int_0^t \beta_{V/X}(s) dX_s.$$

Поскольку $\bar{E}[\eta^*] < \infty$ и $V(T) = \eta^*$, то процесс $\beta_{Y/X} = \beta_{V/X}$ и начальное значение $y_0 = E\eta^*$ являются решением задачи (1). При получении разложения (4) применено приведенное ранее следствие. Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 3. Если существует решение задачи (2), то решение задачи (1) строится так:

1. Определяется мартингальная мера \bar{P} при помощи процесса плотности Z ;
2. Решается задача (2);
3. Вычисляется мартингал V и разложение мартингала (4) по процессу X .

На разложении мартингала V остановимся подробнее. Явный способ вычисления разложения получается при предположении о существовании функции $M(x, t) \in C^{2,1}$ такой, что $V(\omega, t) = M(X(\omega, t), t)$, и предположении, что интегрант $\beta_X(\omega, t) = \beta_X(X(\omega, t), t)$. При этих предположениях можно использовать формулу Ито для вычисления разложения. Действительно, с использованием формулы Ито дифференциал $dV(\omega, t) = \left[\frac{\partial M}{\partial t}(X(t), t) + \frac{1}{2} \beta_X^2(X(t), t) \frac{\partial^2 M(X(t), t)}{\partial x^2} \right] + \beta_X(X(t), t) \frac{\partial M(X(t), t)}{\partial x} d\bar{W}_t$ с использованием разложения (4) – тот же самый дифференциал $dV(\omega, t) = \beta_{V/X}(X(\omega, t), t) \beta_X(X(\omega, t), t) d\bar{W}_t$. Из сравнения дифференциалов возникает фундаментальное уравнение для функции M

$$(5) \quad \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \beta_X^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0$$

с начальным условием $M(x, 0) = \bar{E}\eta^*$ и выражение для интегранта в разложении (4)

$$(6) \quad \beta_{V/X} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Поскольку $\beta_{V/X}$ может зависеть от всей предыстории процесса \bar{W} , то будем использовать другие соотношения для вычисления разложения (4), например, если X и Y являются квадратично интегрируемыми мартингалами с квадратическими характеристиками $\langle X \rangle_t$ и $\langle Y \rangle_t$. Применение этих характеристик позволяет выразить через них интегрант в разложении (4):

$$(7) \quad \beta_{V/X}(t) = \frac{d\langle XV \rangle_t}{d\langle X \rangle_t}.$$

Рассмотрим два примера.

В примере 1 требуется найти

$$(8) \quad \min_{\beta_{Y/X}, y_0} E(\xi - Y_T)^2$$

при выполнении ограничений (1). Будем считать, что случайная величина ξ – квадратично интегрируемая. Следуя предложенной вычислительной схеме,

необходимо решить задачу (2), чтобы найти η^* . Далее используем результат, приведенный в [6, гл. 6], из которого следует, что задача (2) эквивалентна задаче

$$(9) \quad \min_{\eta} E(\bar{\xi} - \eta)^2 \text{ при условии, что } EZ_T \eta = 0.$$

В (9) $\bar{\xi} = \xi - a$. Решение задачи (9) будет иметь вид

$$(10) \quad \eta^* = \bar{\xi} - \frac{EZ_T \bar{\xi}}{EZ_T^2} Z_T.$$

Используя (10), вычисляем процесс $Y_t = a + E(\eta^*/F_t)$ и оптимальное управление, используя (6) или (7).

В примере 2 требуется найти

$$(11) \quad \min_{\beta_{Y/X}, y_0} (\xi - Y_T)^+$$

при тех же ограничениях. Случайная величина $\xi > 0$ и ее математические ожидания $E\xi < \infty$ и $\bar{E}\xi < \infty$. В (11) использовано обозначение $(x)^+ = \max(x, 0)$. Согласно предложенной схеме необходимо решить задачу (2), которая эквивалентна задаче

$$(12) \quad \max E\xi\zeta \text{ при ограничениях } 0 \leq \zeta \leq 1 \text{ и } \bar{E}\xi\zeta \leq a.$$

Рассмотрим две новые меры: $d\tilde{P} = \frac{\xi}{E\xi}$ и $d\bar{\bar{P}} = \frac{\xi}{E\xi} d\bar{P}$, относительно которых задача (12) будет иметь вид

$$(13) \quad \max \tilde{E}\zeta \text{ при ограничениях } 0 \leq \zeta \leq 1 \text{ и } \bar{\bar{E}}\zeta \leq \alpha, \quad \text{где } \alpha = \frac{a}{E\xi}.$$

Задача (13) является рандомизированной задачей Неймана–Пирсона. Решение рандомизированной задачи приведено в [7]. Следуя [7], приведем решение

$$(14) \quad \zeta^* = I_{\{d\tilde{P} - \lambda^* d\bar{\bar{P}} > 0\}} + \varepsilon I_{\{d\tilde{P} - \lambda^* d\bar{\bar{P}} = 0\}},$$

В (14) λ^* – наименьшее значение λ , при котором $\bar{\bar{E}}I_{\{d\tilde{P} - \lambda^* d\bar{\bar{P}} > 0\}} \leq \alpha$ и $\varepsilon = \frac{\alpha - \bar{\bar{E}}I_{\{d\tilde{P} - \lambda^* d\bar{\bar{P}} > 0\}}}{\bar{\bar{E}}I_{\{d\tilde{P} - \lambda^* d\bar{\bar{P}} = 0\}}}$. Так как $0 \leq \alpha - \bar{\bar{E}}I_{\{d\tilde{P} - \lambda^* d\bar{\bar{P}} > 0\}} < \bar{\bar{E}}I_{\{d\tilde{P} - \lambda^* d\bar{\bar{P}} = 0\}}$, то $0 \leq \alpha < 1$. После этого находим решение задачи (2) $\eta^* = \xi\zeta^*$, процесс Y и оптимальное управление.

3. Основная модель

После описания вычислительной схемы рассмотрим основной класс исследуемых моделей базового процесса X . Процессы α_X и β_X , участвующие в определении процесса X , задаются последовательностью моментов останова $0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$, с вероятностью единица стремящихся к бесконечности, и двумя детерминированными последовательностями μ и σ с не равными нулю элементами следующим образом:

$$(15) \quad \alpha_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i I_{\{\tau_i < t \leq \tau_i\}}, \quad \beta_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i I_{\{\tau_i < t \leq \tau_i\}}.$$

Поскольку рассматривается конечный отрезок $[0, T]$, то уместно определить случайную величину $\kappa_T = \sup \{n : \tau_n \leq T\}$ и использовать ее в качестве верхнего предела сумм в (15):

$$(16) \quad \begin{aligned} \alpha_X(t) &= \sum_{i=1}^{\kappa_T} \mu_i I_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}} + \mu_{\kappa_T+1} I_{\{\tau_{\kappa_T} < t \leq T\}}, \\ \beta_X(t) &= \sum_{i=1}^{\kappa_T} \sigma_i I_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}} + \sigma_{\kappa_T+1} I_{\{\tau_{\kappa_T} < t \leq T\}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $P(\kappa_T < \infty) = 1$ и траектории процессов (16) полунепрерывны слева. Отсюда и из того, что τ_i – моменты останова, следует утверждение.

Утверждение 1. Процессы α_X и β_X – прогрессивно измеримы и интегралы $\int_0^T |\alpha_X(s)| ds$, $\int_0^T \beta_X^2(s) ds$ и $\int_0^T \left(\frac{\alpha_X(s)}{\beta_X(s)}\right)^2 ds$ – конечны с вероятностью единица.

Следовательно, существует единственная мартингальная мера, относительно которой процесс X является мартингалом с плотностью

$$(17) \quad Z_T = \exp\left(-\frac{1}{2}A_T + \sqrt{A_T}\varepsilon\right).$$

В (17) ε – стандартная нормальная случайная величина. Случайная природа процесса A определяется моментами останова. Процесс A имеет вид

$$(18) \quad A_t = \sum \left(\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 (t \wedge \tau_i - t \wedge \tau_{i-1}).$$

Относительно мартингальной меры процесс

$$(19) \quad \bar{W}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{\sigma_i} (t \wedge \tau_i - t \wedge \tau_{i-1}) + W_t$$

является винеровским процессом.

Рассмотрим для данной модели вторую задачу из раздела 2, используя (17), (18) и (19). Будем считать, что случайная величина $\xi = f(X_T)$. Причем функция f такова, что $f(x) > 0$, $Ef(X_T) < \infty$ и $\bar{E}f(X_T) < \infty$. Относительно мартингальной меры случайная величина X_T определяется равенством:

$$(20) \quad X_T = x_0 + \sqrt{U_T}\varepsilon.$$

В (20) $U_t = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 (t \wedge \tau_i - t \wedge \tau_{i-1})$. Относительно исходной меры случайная величина

$$(21) \quad X_T = x_0 + C_T + \sqrt{U_T}\varepsilon,$$

где $C_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (t \wedge \tau_i - t \wedge \tau_{i-1})$. Вычислим математическое ожидание $Ef(X_T)\eta(X_T)$ по исходной мере. Из (21) следует, что искомое математическое ожидание вычисляется по формуле

$$(22) \quad \begin{aligned} & E(f(X_T)\varsigma(X_T)) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E \left(\frac{1}{\sqrt{U_T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varsigma(x) \exp\left(-\frac{1}{2U_T}(x-x_0-C_T)^2\right) dx \right). \end{aligned}$$

Из (22) получаем, что $d\tilde{P}(x) = \tilde{p}(x) dx$, где

$$(23) \quad \frac{E\left(f(x) \exp\left(-\frac{1}{2U_T}(x-x_0-C_T)^2\right) \frac{1}{\sqrt{U_T}}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} E\left(f(x)\varsigma(x) \exp\left(-\frac{1}{2U_T}(x-x_0-C_T)^2\right) \frac{1}{\sqrt{U_T}}\right) dx}.$$

Для меры $\bar{\bar{P}}$ получаем аналогичный результат:

$$(24) \quad \bar{\bar{p}}(x) = \frac{E\left(f(x) \exp\left(-\frac{1}{2U_T}(x-x_0)^2\right) \frac{1}{\sqrt{U_T}}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} E\left(f(x)\varsigma(x) \exp\left(-\frac{1}{2U_T}(x-x_0)^2\right) \frac{1}{\sqrt{U_T}}\right) dx}.$$

Из (14), (23) и (24) следует, что оптимальное значение

$$(25) \quad \varsigma^*(x) = I_{\{\tilde{p}(x)-\lambda^*\bar{\bar{p}}(x)>0\}} + \varepsilon I_{\{\tilde{p}(x)-\lambda^*\bar{\bar{p}}(x)=0\}},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \bar{\bar{E}}I_{\{\tilde{p}(X_T)-\lambda^*\bar{\bar{p}}(X_T)>0\}}}{\bar{\bar{E}}I_{\{\tilde{p}(X_T)-\lambda^*\bar{\bar{p}}(X_T)=0\}}}.$$

Из (25) следует, что случайная величина η^* будет функцией от X_T :

$$(26) \quad \eta^*(X_T) = f(X_T) \left(I_{\{\tilde{p}(X_T)-\lambda^*\bar{\bar{p}}(X_T)>0\}} + \varepsilon I_{\{\tilde{p}(X_T)-\lambda^*\bar{\bar{p}}(X_T)=0\}} \right).$$

Далее, используя (26), рассмотрим вычисление условного математического ожидания $\bar{E}(\eta^*(X_T)/F_t)$ по мартингальной мере. Для этого представим случайную величину X_T следующим образом: $X_T = X_t + \int_t^T \sigma(s) d\bar{W}_s$. Следовательно, условный закон $Law(X_T - X_t/U_T - U_t) = Law(\sqrt{U_T - U_t}\varepsilon)$. Из измеримости X_t и U_t относительно F_t и выполнения условий регулярности следует, что условное математическое ожидание является функцией относительно t , X_t и U_t , т.е.

$$(27) \quad M(X_t, U_t, t) = \bar{E}(\eta^*(X_T)/F_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^*(x) E_{U_T - U_t} \left(\frac{\exp\left(-\frac{(x - X_t)^2}{2(U_T - U_t)}\right)}{\sqrt{U_T - U_t}} \right) dx.$$

Формула (27) существенно упрощается, если разладка затрагивает только снос процесса X (классический вариант разладки), т.е. $\sigma_i = \sigma$. Соответствующая формула будет иметь вид

$$(28) \quad M(X_t, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(T-t)}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \eta^*(x) \exp\left(-\frac{(x - X_t)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dx \right).$$

В (28) функция M зависит только от двух аргументов. Далее вычисляем функцию $M(x, t)$, решая уравнение (5), и вычисляем управление β по формуле (6).

4. Приложение к финансовой математике

Будем рассматривать модель финансового рынка как пары активов: рискованного (стоимость акции) S и безрискового (банковский счет) B . Эти активы представлены своими ценами $S(t)$ и $B(t)$, $t \in [0, T]$ то есть речь идет о (B, S) -рынке с непрерывным временем.

Активы подчиняются следующим уравнениям:

$$(29) \quad dS(t) = S(t) dX(t), \quad dB(t) = rB(t) dt$$

с начальными значениями S_0 и B_0 . Рассматривается самофинансируемый портфель, капитал которого $G(t)$ удовлетворяет уравнению: $dG(t) = \gamma(t)dS(t) + \beta(t)dB(t)$. Задача заключается в вычислении

$$(30) \quad \min_{\gamma, \beta} (f(S(T)) - G(T))^+$$

с учетом (29) при ограничении $G_0 \leq a$. В (30) функция $f(x) \geq 0$ и ограничена сверху. Сведем задачу (30) к решенной задаче (11), для этого рассмотрим дисконтированный процесс $\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)}$, дифференциал которого $d\bar{S}(t) = \bar{S}(t)((\alpha_X(t) - r)dt + \beta_X(t)dW_t)$. При этом дифференциал дисконтированного капитала $d\bar{G}(t) = d\frac{G(t)}{B(t)} = \gamma(t)d\bar{S}(t)$. Определим $\bar{f}(\bar{S}(T)) =$

$= f(\bar{S}(T)B(T))/B(T)$, что позволяет рассмотреть эквивалентную и более простую задачу: $\min_{\gamma} E(\bar{f}(\bar{S}_T) - \bar{G}(T))^+$ при ограничениях $\bar{G}_0 \leq \frac{a}{B_0}$ и $\bar{G}(t) = \bar{G}_0 + \int_0^t \gamma(s) d\bar{S}(s)$, которая совпадает с задачей (11), если положить $X(t) = \bar{S}(t)$ и $Y(t) = \bar{G}(t)$. Далее, не нарушая общности, будем считать, что $r = 0$.

Для случая, когда разладка затрагивает только снос, а $\beta_X(t) = \sigma$ является константой, решениями первого уравнения из (11) являются $S(t) = S_0 \exp(\bar{C}(t) - \sigma W_t)$ и $S(t) = S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} + \sigma W_t\right)$ для исходной меры и мартингальной меры соответственно. Процесс $\bar{C}(t) = C(t) - \frac{\sigma^2}{2}t$.

5. Пример. “Модель с двумя барьерами и двумя моментами остановки”

Модель была представлена на московском симпозиуме “Advanced Finance and Stochastics” [8]. Данная модель поведения стоимости рискового актива возникает в ситуации, когда “регулятор” желает удержать стоимость в пределах заданного коридора, причем тренд цены в начальный момент времени – возрастающая функция. На рассматриваемом отрезке $[0, T]$ регулятор принимает участие в торгах не более двух раз. Первый раз он продает актив, когда актив достигает верхнего уровня, с целью получить убывающий тренд. Во второй раз регулятор покупает актив с целью получить возрастающий тренд, когда цена достигает нижнего уровня.

Таким образом, необходимо рассмотреть векторный момент остановки (τ_1, τ_2) , в котором $\tau_1 = \inf(t \in [0, T] : S(t) = M_1)$, где $M_1 > S_0$ и $\tau_2 = \inf(t \in (\tau_1, T] : S(t) = M_2)$, где $M_2 < S_0$. Определим снос

$$\bar{C}(t) = \left(\mu_1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t \wedge \tau_1) + \left(\mu_2 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t \wedge \tau_2 - t \wedge \tau_1) + \left(\mu_3 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t \wedge \tau_2).$$

Предполагаем выполнение следующих неравенств: $\mu_1 - \frac{\sigma^2}{2} > 0$, $\mu_2 - \frac{\sigma^2}{2} < 0$, $\mu_3 - \frac{\sigma^2}{2} > 0$. Найдем плотность $p(x, y)$ распределения для векторного момента остановки (τ_1, τ_2) , определенной на множестве $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq y\}$, используя равенство для плотности: $p(x, y) = p(y/x) \cdot p(x)$. Для определения плотности закона распределения первого момента остановки – $p(x)$ воспользуемся тем, что $\tau_1 = \inf(t : m_1 t + \sigma W_t = \bar{M}_1)$, где $m_1 = \mu_1 - \frac{\sigma^2}{2}$ и $\bar{M}_1 = \ln \frac{M_1}{S_0}$. Для определения плотности $p(y/x)$ условного закона распределения воспользуемся строго марковским свойством винеровского процесса. В соответствии с этим свойством условное поведение второго момента остановки определяется равенством $\tau_2 = x + \inf(t : m_2 t + \sigma W_t = \bar{M}_2)$, где $m_2 = \frac{\sigma^2}{2} - \mu_2$ и $\bar{M}_2 = \ln \frac{M_2}{M_1}$. Пусть $p(m, M, x)$ – плотность закона распределения момента остановки $\tau = \inf(t : mt + \sigma W_t = M)$, определенная на множестве $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$. Параметры плотности m и M – положительные числа. Плотность $p(m, M, x) = \frac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{mM}{\sigma^2}\right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(m^2 x + \frac{M^2}{x}\right)\right)$, см. [4, с. 265]. Плотность совместного закона распределения выражается через плотность

$p(m, M, x)$ следующим образом: $p(x, y) = p(m_1, \overline{M}_1, x) p(m_2, \overline{M}_2, y - x)$. Явный вид плотности совместного закона распределения позволяет без особого труда вычислить функцию $\zeta^*(x)$ и решить задачу квантильного хеджирования для модели с двумя барьерами.

5.1. Вычислительный эксперимент

Функция $f(x) = (x - K)^+$. Для расчета выбраны следующие исходные данные: $\mu_1 = 0,1$; $\mu_2 = -0,1$; $\mu_3 = 0,1$; $\sigma = 0,05$; $S_0 = K = 6$; $M_1 = 7$; $M_2 = 5$; $\alpha = 0,35$. Функция $F(\lambda) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{p}(s) I_{\{\overline{p}(s) - \lambda^* \overline{p}(s) > 0\}}(s) ds - \alpha \right)$ – непрерывная функция, поэтому $\varepsilon = 0$ в (25).

На рис. 1 приведен график $F(\lambda)$ для значений $\lambda \in [0,3; 1,5]$.

Решение уравнения $F(\lambda) = 0 - \lambda = 0,7$.

Далее в расчетах использована радемахеровская аппроксимация $\Delta S_n = S_{n-1} \sigma / \sqrt{N} \delta_n$, $P(\delta_n = 1) = P(\delta_n = -1) = 1/2$.

Результаты вычислений приведены на рис. 2 и в таблице. При $N = 10$ и $N = 11$ вычисленные значения α совпадают и равны 0,3496. Для $N = 10$ и случайной траектории рассчитан портфель, который приведен в таблице.

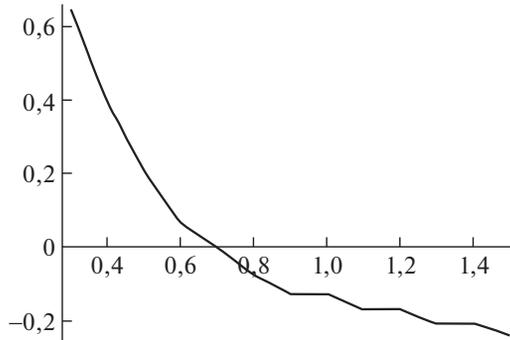


Рис. 1. График $F(\lambda)$ для значений $\lambda \in [0,3; 1,5]$.

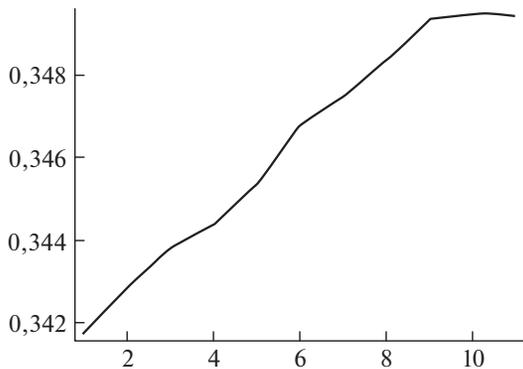


Рис. 2. График зависимости вычисленного α от значений N ($N = 3, \dots, 11$) (точное значение $\alpha = 0,35$).

Расчет портфеля

n	Произвольно выбранный путь на дереве (значения ε_n)	Значения S_n в атомах выбранного пути	Значения Y_n в атомах выбранного пути	Значения γ_n в атомах выбранного пути	Значения β_n в атомах выбранного пути
0		6	0,07966675650	0,4297220522	-2,498665556
1	1	6,094868328	0,1204337691	0,5907306195	-3,479991574
2	1	6,191236656	0,1773614912	0,7757321767	-4,625379997
3	-1	6,093344609	0,1014234805	0,5837691069	-3,455682860
4	-1	5,997000371	0,04518069073	0,3500031905	-2,053788572
5	-1	5,902179469	0,01199307250	0,1285132911	-0,7465154357
6	-1	5,808857818	0	0	0
7	-1	5,717011711	0	0	0
8	1	5,807405601	0	0	0
9	1	5,899228744	0	0	0
10	-1	5,805953748	0		

Для радемахеровской аппроксимации является справедливым равенство

$$\gamma_n = \frac{\overline{\mathbb{E}}(\Delta Y_n \Delta S_n / F_{n-1})}{\overline{\mathbb{E}}((\Delta S_n)^2 / F_{n-1})} = \frac{\Delta Y_n}{\Delta S_n} \Big|_{\delta_n=1} = \frac{\Delta Y_n}{\Delta S_n} \Big|_{\delta_n=-1}.$$

Вторая составляющая портфеля $\beta_n = Y_{n-1} - \gamma_n S_{n-1}$.

6. Заключение

Рассмотрена модель с векторной разладкой, для которой предложен алгоритм решения широкого класса задач стохастического оптимального управления. В качестве примера решена задача квантильного хеджирования для модели с коридором. Приведены результаты применения алгоритма. Дальнейшие исследования будут направлены на получение приемлемого вычислительного алгоритма для решения рассмотренных задач стохастического оптимального управления для других моментов остановки. При этом предполагается аппроксимация винеровского процесса с использованием принципа Донскера–Прохорова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shiryaev A.* Quickest Detection Problems in the Technical Analysis of the Financial Data / Mathematical finance. Ed. H. Geman, D. Madan, S. Pliska, T. Vorst. Springer, 2000. P. 487–521.
2. *Gapeev P. V., Peskir G.* The Wiener Disorder Problem With Finite Horizon Stoch // Proc. Appl. 2006. V. 116. No. 12. P. 1770–1791.
3. *Truonga C., Oudrec L., Vayatisa N.* A review of change point detection methods // arXiv:1801.00718v1 [cs.CE] 2 Jan 2018.
4. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
5. *Фельмер Г., Шид А.* Стохастические финансы. М.: МЦНМО, 2008.

6. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
7. *Rudloff B.* A Generalized Neyman–Pearson Lemma for Hedge Problems in Incomplete Markets // Workshop “Stochastic Analysis”. 27.09.2004–29.09.2004. P. 241–249.
8. *Beliaevsky G., Danilova N.* About (B.S) – Market Model with Stochastic Switching of Parameters // Proc. Int. Conf. Advanced Finance and Stochastics. Book of abstracts. Moscow. 24–28 June 2013.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 23.10.2018

После доработки 23.02.2019

Принята к публикации 25.04.2019