Автоматика и телемеханика, № 8, 2019

Управление в технических системах

© 2019 г. **Я.Г. САПУНКОВ, канд. физ.-мат. наук (ChelnokovYuN@gmail.com),**
Ю.Н. ЧЕЛНОКОВ, д-р физ.-мат. наук (ChelnokovYuN@gmail.com)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов)

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОВОРОТ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ПОСРЕДСТВОМ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ТЯГИ[1]

С использованием кватернионов и принципа максимума решена в нелинейной постановке задача об оптимальном переводе орбиты космического аппарата (КА) с переменной массой на заданную плоскость. Управление движением аппарата производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты КА. Учитывается изменение массы аппарата за счет расхода рабочего тела на процесс управления. Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой линейную свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса тяги, затраченных на процесс управления.

Излагается теория решения задачи. Приводятся результаты расчетов оптимального управления для случаев, когда в минимизируемом комбинированном функционале качества процесса управления одновременно учитываются оба критерия, и для случаев, когда минимизируется лишь суммарный импульс тяги. Получены примеры оптимального управления, содержащие до 192 пассивных и активных этапов. Установлены закономерности оптимального управления поворотом плоскости орбиты КА.

Ключевые слова: космический аппарат, ориентация орбиты и плоскости орбиты, ограниченная (малая) реактивная тяга, оптимальное управление, кватернион.

DOI: 10.1134/S0005231019080087

1. Введение

В работе с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) и принципа максимума Понтрягина изучается задача оптимальной переориентации плоскости орбиты КА с переменной массой посредством ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Частным случаем этой задачи является хорошо известная и имеющая большое практическое значение задача коррекции угловых элементов орбиты КА, когда изменения

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-01-00205.

угловых элементов плоскости орбиты в процессе управления имеют малые значения. Использование управления, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА, позволяет корректировать элементы орбиты КА, сохраняя форму и размеры орбиты КА неизменными. Это ценное свойство изучаемого процесса переориентации орбиты КА является полезным как при решении задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета, например при управлении конфигурацией группировки спутников.

При решении задачи оптимального управления плоскостью орбиты КА учитывается изменение массы аппарата за счет расхода рабочего тела на процесс управления. Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой линейную свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса величины тяги, затраченных на процесс управления. Для выбранного функционала оптимальное управление состоит из пассивных этапов, на которых тяга отсутствует, и активных этапов, на которых тяга принимает максимальное значение.

В статье приводится краткий обзор работ по дифференциальным уравнениям ориентации орбиты КА и изучаемой проблеме оптимальной переориентации плоскости орбиты и орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Излагается кватернионная нелинейная теория решения задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты КА переменной массы в непрерывной постановке с использованием ограниченной (малой) тяги, ортогональной плоскости орбиты КА, для нефиксированного числа включений реактивной тяги. В отличие от большинства других работ в качестве управления рассматривается не вектор реактивного ускорения центра масс КА, а вектор реактивной тяги двигателя КА. В состав используемой для решения задачи математической модели, описывающей процесс переориентации плоскости орбиты КА, входят кватернионное дифференциальное уравнение ориентации оскулирующей орбиты КА, дифференциальное уравнение для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите, и дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы КА в процессе переориентации плоскости его орбиты.

Приводятся результаты расчетов оптимального управления в случаях, когда учитываются оба критерия оптимальности и когда минимизируется лишь импульс величины реактивной тяги, что равносильно минимизации расхода рабочего тела на процесс управления. Показано, что с уменьшением допустимого максимального значения величины тяги увеличивается продолжительность процесса управления и число этапов в процессе оптимального управления. Получены примеры оптимального управления, содержащие до 192 пассивных и активных этапов. Анализ результатов расчетов позволил определить закономерности в оптимальном управлении плоскостью орбиты КА.

Отметим, что оптимальное управление посредством ортогональной тяги удобно использовать в основном для решения задачи коррекции плоскости орбиты КА (коррекции наклонения и долготы восходящего узла) при сохранении формы и размеров орбиты в случаях, когда разности между угловыми элементами начальной и конечной орбиты малы. Однако в статье также приведены примеры численного решения задачи оптимального управления для немалых разностей угловых элементов орбиты. Это, с одной стороны, демонстрирует возможности разработанной программы численного решения задачи (ее работоспособность для широкого диапазона изменения параметров, входящих в постановку задачи), а с другой стороны, позволяет, более полно установить закономерности такого управления. Кроме того, в будущем нельзя исключить необходимости решения задачи для случаев больших изменений значений наклонения и долготы восходящего узла при сохранении неизменными формы и размеров орбиты КА.

2. Задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты КА

Будем считать, что вектор ускорения $\mathbf{w}$ центра масс КА от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости оскулирующей орбиты, т.е. ортогонально радиус-вектору $\mathbf{r}$ и вектору $\mathbf{v}$ скорости центра масс КА (коллинеарно вектору $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ момента скорости центра масс КА). Тогда дифференциальные уравнения движения центра масс КА в ньютоновском гравитационном поле, описывающие изменение размеров и формы мгновенной орбиты КА, интегрируются, давая уравнение конического сечения. Поэтому управляемое движение центра масс КА в этом случае описывается дифференциальными уравнениями, характеризующими изменение мгновенной ориентации орбиты КА или используемой (например, орбитальной) вращающейся системы координат, в которой записываются исходные уравнения движения центра масс КА, и дифференциальным уравнением для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите. В процессе такого управления оскулирующая орбита КА поворачивается в пространстве, не изменяя своих размеров и формы.

Движение центра масс КА будем рассматривать в инерциальной системе координат – геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3$ (X) с началом в центре O притяжения Земли. Ось OX_3 этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси OX_1 и OX_2 лежат в плоскости экватора Земли, ось OX_1 направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось OX_2 дополняет систему до правой тройки векторов.

Введем также в рассмотрение систему координат ξ, связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы координат находится в центре O (или в перицентре орбиты), ось ξ_1 направлена вдоль радиус-вектора перицентра орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора $\mathbf{c}$ момента скорости центра масс КА относительно центра O, а ось ξ_2 образует правую тройку с осями ξ_1 и ξ_3. Ориентация системы координат ξ в инерциальной системе координат X характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и традиционно задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты [1, 2]: долготой восходящего узла Ω_u, наклоном орбиты i и угловым расстоянием перицентра от узла ω_π.

Дифференциальные уравнения, описывающие мгновенную ориентацию орбиты КА в инерциальной системе координат в угловых элементах орбиты в рассматриваемом случае ортогональности вектора реактивной тяги плоскости оскулирующей орбиты КА, имеют вид [1, 2]

$$\begin{gathered}
d\Omega_u/dt = (r/c) w \sin(\omega_\pi + \vartheta) \operatorname{cosec} i, \\
di/dt = (r/c) w \cos(\omega_\pi + \vartheta), \quad d\omega_\pi/dt = -(r/c) w \sin(\omega_\pi + \vartheta) \operatorname{ctg} i, \\
d\vartheta/dt = c/r^2, \quad r = p/(1 + e\cos\vartheta), \quad c = \mathrm{const},
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где ϑ – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите), $r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиус-вектора центра масс КА, p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, $c = |\mathbf{c}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v}$ центра масс КА), w – проекция вектора реактивного ускорения $\mathbf{w}$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости оскулирующей орбиты КА), t – время.

Задача оптимального поворота плоскости орбиты КА в угловых переменных формулируется следующим образом: требуется построить управление w, переводящее орбиту, изменение ориентации которой описывается уравнениями (2.1), из заданного начального положения

$$\Omega_u = \Omega_u(t_0) = \Omega_u^0, \quad i = i(t_0) = i^0, \quad \omega_\pi = \omega_\pi(t_0) = \omega_\pi^0, \quad i^0 \neq 0, \pi$$

в требуемое конечное положение

$$\Omega_u = \Omega_u(t_1) = \Omega_u^*, \quad i = i(t_1) = i^*, \quad i^* \neq 0, \pi$$

при свободном значении углового расстояния перицентра от узла ω_π на правом конце поворота. При этом должен минимизироваться выбранный функционал качества процесса поворота плоскости орбиты КА.

Частные случаи задачи переориентации плоскости орбиты КА рассматривались в [3–7]. В [8] рассматривается задача коррекции угловых элементов орбиты Ω_u, i и ω_π с помощью реактивного ускорения, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА, называемого в этой работе “бинормальным реактивным ускорением”. Задача решается с помощью принципа максимума и усреднения уравнений. Из усредненных уравнений получен ряд аналитических соотношений для определения затрат характеристической скорости в частных случаях коррекции одного или двух элементов орбиты (наклона орбиты, долготы восходящего узла) при условии малости изменения наклона орбиты и долготы восходящего узла. По словам авторов [8] уравнения задачи оптимизации в полном объеме не приведены и не проанализированы из-за большой громоздкости уравнений для сопряженных переменных.

Замечание 1. Модель (2.1), которая описывает ориентацию оскулирующей орбиты КА при ортогональности вектора ускорения к ее плоскости и имеет особенность для наклонения i при значениях $i = 0$ и $i = \pi$, является частью системы дифференциальных уравнений для всех шести кеплеровых оскулирующих элементов орбиты при произвольном векторе тяги двигательной установки [9, стр. 97]. При этом, наряду с указанными особыми значениями наклонения, здесь имеется особое значение эксцентриситета $e = 1$, когда орбита становится круговой и исчезает возможность однозначного определения углового расстояния перицентра от узла ω_π. Решение этой проблемы получено в начале 1970-х гг. с применением двух векторов в пространстве состояний орбитального движения КА – вектора эксцентриситета $\mathbf{e} = \{e\cos\varpi,\ e\sin\varpi\}$, где $\{\cdot\} \equiv \mathrm{col}\,(\cdot)$, $\varpi = \Omega_u + \omega_\pi$, и вектора наклонения $\mathbf{i} = \{i\cos\Omega_u,\ i\sin\Omega_u\}$ [10, 11]. Этот метод, впервые реализованный в системе навигации и управления движением советского спутника связи Радуга на геостационарной орбите в 1974 г. [12], в настоящее время модифицирован и успешно применяется на борту российских спутников связи, навигации и геодезии [13]. Проблема вырожденности классических орбитальных элементов частично решается в механике космического полета за счет использования так называемых «невырожденных» орбитальных элементов с элементами Лагранжа $P_1 = e\sin\varpi$, $P_2 = e\cos\varpi$ и $Q_1 = \mathrm{tg}(i/2)\sin\Omega_u$, $Q_2 = \mathrm{tg}(i/2)\cos\Omega_u$ (иногда для них используют термин “equinoctial elements”) и соответствующих уравнений ориентации орбиты R. Battin [14, 15]. В этих уравнениях сохраняется лишь особое значение наклонения $i = \pi$.

Решение задач оптимальной переориентации плоскости орбиты и орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты, с помощью уравнений (2.1) в классических угловых элементах орбиты в строгой нелинейной постановке достаточно сложно в силу нелинейности этих уравнений, наличия в них особых точек $i = 0, \pi$, а также в силу громоздкости уравнений для сопряженных переменных. Поэтому для решения задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты и орбиты КА вместо угловых элементов орбиты целесообразно использовать [16–24] параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона).

Дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера имеют вид [16–20]

$$\begin{gathered} 2d\Lambda_0/dt = -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2, \quad 2d\Lambda_1/dt = \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3, \\ 2d\Lambda_2/dt = \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3, \quad 2d\Lambda_3/dt = \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2; \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} d\vartheta/dt = c/r^2, \quad r = p/(1 + e\cos\vartheta), \quad c = \mathrm{const}, \\ \Omega_1 = (r/c)w\cos\vartheta, \quad \Omega_2 = (r/c)w\sin\vartheta, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где Λ_j $(j = \overline{0,3})$ – параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА (системы координат ξ) в инерциальной системе координат X; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 = 0$ – проекции вектора $\mathbf{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси $O\xi_i$.

Отметим, что уравнения ориентации орбиты в параметрах Эйлера вида (2.2) использовались для описания орбитального движения и другими авторами [25, 26].

Параметры Эйлера Λ_j связаны с угловыми элементами орбиты соотношениями [17]

$$\begin{gathered} \Lambda_0 = \cos(i/2)\cos((\Omega_u + \omega_\pi)/2), \quad \Lambda_1 = \sin(i/2)\cos((\Omega_u - \omega_\pi)/2), \\ \Lambda_2 = \sin(i/2)\sin((\Omega_u - \omega_\pi)/2), \quad \Lambda_3 = \cos(i/2)\sin((\Omega_u + \omega_\pi)/2). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Соотношения (2.4) получены с использованием кватернионных формул сложения конечных поворотов [17, 27, 28] (на основе умножения кватернионов, соответствующих трем элементарным поворотам на углы Ω_u, i и ω_π в указанной последовательности).

Угол наклона орбиты i определяется через параметры Эйлера по формуле

$$i = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\Lambda_1^2+\Lambda_2^2}{\Lambda_0^2+\Lambda_3^2}}.$$

Для определения угловых элементов Ω_u и ω_π сначала вычисляются величины $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\omega}$ по формулам

$$\tilde{\Omega} = \mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda_0\Lambda_2+\Lambda_1\Lambda_3}{\Lambda_0\Lambda_1-\Lambda_2\Lambda_3}, \quad \tilde{\omega} = \mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda_1\Lambda_3-\Lambda_0\Lambda_2}{\Lambda_0\Lambda_1+\Lambda_2\Lambda_3},$$

а затем вычисляются Ω_u и ω_π по следующему однозначному алгоритму:

а) если $\tilde{\Omega} \geq 0$ и $\Lambda_0\Lambda_2+\Lambda_1\Lambda_3 \geq 0$, то $\Omega_u = \tilde{\Omega}$, а если $\Lambda_0\Lambda_2+\Lambda_1\Lambda_3 < 0$, то $\Omega_u = \tilde{\Omega}+\pi$;

б) если $\tilde{\Omega} < 0$ и $\Lambda_0\Lambda_1-\Lambda_2\Lambda_3 \leq 0$, то $\Omega_u = \tilde{\Omega}+\pi$, а если $\Lambda_0\Lambda_1-\Lambda_2\Lambda_3 > 0$, то $\Omega_u = \tilde{\Omega}+2\pi$;

в) если $\tilde{\omega} \geq 0$ и $\Lambda_1\Lambda_3-\Lambda_0\Lambda_2 \geq 0$, то $\omega_\pi = \tilde{\omega}$, а если $\Lambda_1\Lambda_3-\Lambda_0\Lambda_2 < 0$, то $\omega_\pi = \tilde{\omega}+\pi$;

г) если $\tilde{\omega} < 0$ и $\Lambda_0\Lambda_1+\Lambda_2\Lambda_3 \leq 0$, то $\omega_\pi = \tilde{\omega}+\pi$, а если $\Lambda_0\Lambda_1+\Lambda_2\Lambda_3 > 0$, то $\omega_\pi = \tilde{\omega}+2\pi$.

Эти формулы получены из соотношений (2.4) с учетом диапазонов изменения углов i, Ω_u и ω_π: $0 \leq i \leq \pi$, $0 \leq \Omega_u \leq 2\pi$, $0 \leq \omega_\pi \leq 2\pi$. Такие формулы применяются здесь для вычисления значений этих углов в конечный момент времени процесса управления через параметры Λ_j.

Используя вектор параметров Эйлера $\boldsymbol{\Lambda} = \{\Lambda_0, \boldsymbol{\Lambda}_v\}$, $\boldsymbol{\Lambda}_v = \{\Lambda_i\}$, $i = 1, 2, 3$, уравнения (2.2) можно представить в векторном виде

$$d\Lambda_0/dt = -(\Omega\cdot\boldsymbol{\Lambda}_v)/2, \quad d\boldsymbol{\Lambda}_v/dt = (\Lambda_0\Omega+\Omega\times\boldsymbol{\Lambda}_v)/2,$$

$$\Omega \equiv \{\Omega_i\} = (r/c)w\{\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0\}.$$

Уравнения (2.2) в кватернионной записи принимают компактный вид [16–20] (здесь и далее применяются общепринятые обозначения операций с кватернионами [17, 18, 27, 28])

$$(2.5) \qquad 2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = \boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{\Omega}_\xi, \quad \boldsymbol{\Omega}_\xi = \Omega_1\mathbf{i}_1+\Omega_2\mathbf{i}_2 = (r/c)w(\cos\vartheta\,\mathbf{i}_1+\sin\vartheta\,\mathbf{i}_2),$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0+\Lambda_1\mathbf{i}_1+\Lambda_2\mathbf{i}_2+\Lambda_3\mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $\boldsymbol{\Omega}_\xi$ – отображение вектора $\boldsymbol{\Omega}$ на базис ξ (вектор $\boldsymbol{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты направлен вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс КА и определяется формулой: $\mathbf{\Omega} = (w/c)\mathbf{r}$); $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, $\circ$ – символ кватернионного умножения.

Отметим, что уравнения (2.2), (2.3) или (2.5), (2.3) – система пяти нелинейных стационарных дифференциальных уравнений первого порядка относительно параметров Эйлера Λ_j и истинной аномалии ϑ. Эти уравнения, в отличие от четырех нелинейных дифференциальных уравнений (2.1) ориентации орбиты в угловых элементах орбиты Ω_u, i, ω_π, не имеют особых точек $i = 0$, π, к тому же при переходе в них от времени t к новой независимой переменной ϑ в соответствии с дифференциальным соотношением $d\vartheta = (c/r^2)dt$ получаем (при $w = w(\vartheta)$) систему четырех линейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно параметров Эйлера Λ_j (в то время как дифференциальные уравнения в угловых элементах орбиты остаются существенно нелинейными).

Указанные обстоятельства делают использование уравнений (2.2), (2.3) или (2.5), (2.3) для решения задач переориентации орбиты и ее плоскости с помощью реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты КА, более удобным и эффективным в сравнении с использованием уравнений в угловых оскулирующих элементах (2.1). Такое решение задачи переориентации орбиты КА постоянной массы в инерциальной системе координат в непрерывной постановке (с использованием в качестве управления вектора реактивного ускорения центра масс КА от ограниченной (малой) тяги и принципа максимума) рассмотрено в [21, 22]. В [23, 24] эта задача изучается в кватернионной постановке с помощью импульсной реактивной тяги.

Исследованию задачи оптимальной переориентации орбиты КА постоянной массы в непрерывной постановке (с использованием в качестве управления вектора реактивного ускорения центра масс КА) и с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат посвящены работы [19, 29, 30]. Использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат более удобно при аналитическом исследовании задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке, однако использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА имеет преимущество при численном решении задачи оптимальной переориентации орбиты КА и ее плоскости, так как кватернион ориентации орбиты КА является оскулирующим (медленно изменяющимся) элементом орбиты. Кватернион ориентации орбитальной системы координат таким свойством не обладает, так как является быстро меняющейся переменной.

Отметим также, что уравнения Battin [14, 15], также как и используемые здесь уравнения (2.2), (2.3) (или (2.5), (2.3)) ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера, не имеют особой точки (деления на ноль) при $i = 0$. Однако уравнения Battin и сопряженные к ним уравнения значительно сложнее кватернионных регулярных фазовых уравнений (2.2), (2.3) (или (2.5), (2.3)) и ниже приводимых сопряженных уравнений решаемой задачи как с аналитической, так и с вычислительной точек зрения. К тому же кватернионное фазовое уравнение (2.5) (кватернионное уравнение ориентации орбиты КА, эквивалентное четырем скалярным уравнениям (2.2)) обладает свойством самосопряженности: оно с точностью до обозначения кватернионной переменной совпадает с кватернионным сопряженным уравнением, что позволяет понизить размерность краевой задачи оптимизации на 4 единицы с использованием новой кватернионной переменной, являющейся мультипликативной композицией кватернионных фазовой и сопряженной переменных (в виде их произведения). Таким свойством классические дифференциальные уравнения (2.1) ориентации орбиты в угловых элементах орбиты Ω_u, i, ω_π и уравнения Battin не обладают, причем соответствующие им сопряженные уравнения гораздо сложнее фазовых.

3. Кватернионная постановка задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты КА

Изменение ориентации орбиты КА переменной массы с помощью реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты КА, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} 2d\mathbf{\Lambda}/dt = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = (r/c)(u^*/m^*)(\cos\vartheta\,\mathbf{i}_1 + \sin\vartheta\,\mathbf{i}_2), \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad \frac{dm^*}{dt} = -|u^*|\beta^*, \quad r = \frac{p}{1+e\cos\vartheta}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где m^* – масса аппарата, u^* – проекция вектора реактивной тяги $\mathbf{u}^*$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивной тяги, перпендикулярной плоскости оскулирующей орбиты КА), β^* – коэффициент пропорциональности, равный обратной величине скорости истечения рабочего тела из сопла реактивного двигателя [31].

На величину тяги u^* наложено ограничение

$$|u^*| \le u_m^*. \tag{3.2}$$

Компоненты Λ_j $(j = \overline{0,3})$ кватерниона ориентации орбиты $\mathbf{\Lambda}$ выражаются через угловые элементы орбиты Ω_u, i и ω_π по формулам (2.4).

Перейдем к безразмерным переменным $\rho, \tau, m, u, u_m, \beta$ по формулам

$$r = p\rho, \;\; t = \frac{p^2}{c}\tau, \;\; ,m^* = m_0^* m, \;\; u^* = \frac{c^2 m_0^*}{p^3}u, \;\; u_m^* = \frac{c^2 m_0^*}{p^3}u_m, \;\; \beta^* = \frac{p}{c}\beta, \tag{3.3}$$

где m_0^* – начальная масса аппарата.

Уравнения движения КА (3.1) в безразмерных переменных примут вид

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{\Lambda}}{d\tau} = \frac{u}{2\,(1+e\cos\vartheta)\,m}\mathbf{\Lambda} \circ (\mathbf{i}_1\cos\vartheta + \mathbf{i}_2\sin\vartheta)\,, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = (1+e\cos\vartheta)^2\,, \quad \frac{dm}{d\tau} = -\beta\,|u|\,. \end{gathered} \tag{3.4}$$

На управляющий параметр – безразмерную тягу u наложено ограничение

$$|u| \le u_m. \tag{3.5}$$

В начальный момент времени состояние управляемой системы (3.4) определяется соотношениями

$$\vartheta = \vartheta_n, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_n, \quad m = 1, \tag{3.6}$$

где компоненты кватерниона ориентации орбиты $\mathbf{\Lambda}_n$ выражаются однозначно через угловые элементы начальной орбиты КА $i_n, \Omega_{un}, \omega_{\pi n}$ по формулам (2.4).

Требуется перевести КА на новую орбиту, плоскость которой определяется угловыми элементами i_k, Ω_{uk}.

Таким образом, при оптимизации поворота плоскости орбиты краевое начальное условие $\mathbf{\Lambda}_n$ определяется однозначно согласно (2.4), но при назначении правого краевого условия $\mathbf{\Lambda}_k$ значение углового расстоянием перицентра от узла ω_π является свободным.

В фазовом пространстве $\vartheta \times \mathbf{\Lambda} \times m$ многообразие, на которое требуется перевести управляемую систему (3.4), определяется соотношениями

$$\begin{aligned} &\Lambda_0 \sin\Omega_{uk} \sin\frac{i_k}{2} - \Lambda_2 \cos\frac{i_k}{2} - \Lambda_3 \cos\Omega_{uk} \sin\frac{i_k}{2} = 0, \\ &\Lambda_1 \sin\Omega_{uk} \cos\frac{i_k}{2} - \Lambda_3 \sin\frac{i_k}{2} - \Lambda_2 \cos\Omega_{uk} \cos\frac{i_k}{2} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

получающимися после подстановки угловых элементов орбиты i_k, Ω_{uk} в (2.4) и последующего исключения из них незаданного $\omega_{\pi k}$. Для этого необходимо из соотношений, определяющих Λ_2 и Λ_3, выразить $\sin(\omega_{\pi k}/2)$ и $\cos(\omega_{\pi k}/2)$ и подставить их в соотношения для Λ_0 и Λ_1.

Качество процесса перевода КА на новую орбиту будем определять минимальным значением функционала

$$J = \int\limits_0^{\tau_k} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|)\, d\tau, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \tag{3.8}$$

который представляет собой линейную свертку с постоянными весовыми множителями α_1 и α_2 двух критериев: времени и импульса величины тяги, затраченных на процесс управления. Изменяя величины весовых множителей в функционале (3.8), можно усиливать влияние того или иного критерия на процесс управления.

Таким образом, требуется найти оптимальное управление безразмерной реактивной тягой $u = u(\tau)$, удовлетворяющее ограничению (3.5), которое переводит управляемую систему (3.4) из начального состояния (3.6) на многообразие (3.7) и сообщает функционалу (3.8) минимальное значение.

Промежуток времени процесса управления заранее не задается. Ниже рассматривается случай, когда $\alpha_2 > 0$, чтобы учесть влияние импульса величины тяги на качество процесса управления.

4. Решение задачи с помощью принципа максимума Понтрягина

Функция Гамильтона для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 |u|) + \chi(1 + e\cos\vartheta)^2 + \\ + \frac{u}{2(1+e\cos\vartheta)m}\left(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}\circ(\mathbf{i}_1\cos\vartheta + \mathbf{i}_2\sin\vartheta)\right) - \eta\beta|u|. \tag{4.1}$$

Здесь и далее для кватернионов $\mathbf{a} = a_0 + \mathbf{a}_v$ и $\mathbf{b} = b_0 + \mathbf{b}_v$ используется аналог их скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{scal}((a_0 - \mathbf{a}_v)\circ(b_0 + \mathbf{b}_v)) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, где a_j и b_j – компоненты кватернионов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (a_0, b_0 и $\mathbf{a}_v, \mathbf{b}_v$ – скалярная и векторная части кватернионов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

Сопряженные переменные χ, $\mathbf{M} = M_0 + M_1\mathbf{i}_1 + M_2\mathbf{i}_2 + M_3\mathbf{i}_3$, η, соответствующие фазовым переменным ϑ, $\mathbf{\Lambda}$, m, удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\chi}{d\tau} = 2e\chi(1+e\cos\vartheta)\sin\vartheta + \\ + \frac{u}{2(1+e\cos\vartheta)^2 m}\left(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}\circ(\mathbf{i}_1\sin\vartheta - \mathbf{i}_2(e+\cos\vartheta))\right), \tag{4.2}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\tau} = \frac{u}{2(1+e\cos\vartheta)m}\mathbf{M}\circ(\mathbf{i}_1\cos\vartheta + \mathbf{i}_2\sin\vartheta), \tag{4.3}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{u}{2(1+e\cos\vartheta)m^2}\left(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}\circ(\mathbf{i}_1\cos\vartheta + \mathbf{i}_2\sin\vartheta)\right). \tag{4.4}$$

Введем новую кватернионную переменную

$$\mathbf{N} = N_0 + N_1\mathbf{i}_1 + N_2\mathbf{i}_2 + N_3\mathbf{i}_3 \equiv N_0 + \mathbf{N}_v = \tilde{\mathbf{\Lambda}}\circ\mathbf{M}, \tag{4.5}$$

компоненты которой вычисляются по явным соотношениям ($\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ – сопряженный кватернион: $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \Lambda_0 - \Lambda_1\mathbf{i}_1 - \Lambda_2\mathbf{i}_2 - \Lambda_3\mathbf{i}_3$).

Функция H и уравнения (4.2), (4.4), которым удовлетворяют сопряженные переменные χ и η, примут вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 |u|) + \chi(1 + e\cos\vartheta)^2 + \\ + \frac{u}{2(1+e\cos\vartheta)m}(N_1\cos\vartheta + N_2\sin\vartheta) - \eta\beta|u|, \tag{4.6}$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = 2e\chi(1+e\cos\vartheta)\sin\vartheta + \\ + \frac{u}{2(1+e\cos\vartheta)^2 m}(N_1\sin\vartheta - N_2(e+\cos\vartheta)), \tag{4.7}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{u}{2(1+e\cos\vartheta)m^2}(N_1\cos\vartheta + N_2\sin\vartheta). \tag{4.8}$$

Из условия максимума для функции H следует, что оптимальное управление определяется через фазовые и сопряженные переменные по формулам

$$(4.9) \qquad u = \begin{cases} u_m \mathrm{sign}(\nu_u), & \text{если} \quad \varepsilon_u \geq 0; \\ u = 0, & \text{если} \quad \varepsilon_u < 0, \end{cases}$$

где $\nu_u = N_1 \cos\vartheta + N_2 \sin\vartheta$ и $\varepsilon_u = |\nu_u| \,/\, [2m(1 + e\cos\vartheta)] - \alpha_2 - \eta\beta$.

Особый режим управления в настоящей работе не рассматривается.

Из первого уравнения системы (3.4) и из соотношений (4.9) следует, что на активном этапе управления орбита КА вращается с безразмерным вектором угловой скорости $\mathbf{\Omega}_{\xi d} = u_m \mathrm{sign}(\nu_u)\,(\mathbf{i}_1 \cos\vartheta + \mathbf{i}_2 \sin\vartheta)\,/[m\,(1 + e\cos\vartheta)]$, а на пассивном этапе ориентация орбиты не изменяется.

Так как правый конец траектории в фазовом пространстве $\vartheta \times \mathbf{\Lambda} \times m$ является подвижным, то в конце движения, т.е. в момент $\tau = \tau_k$, должны выполняться условия трансверсальности. На истинную аномалию ϑ и на массу m в конце движения не налагается никаких условий, поэтому соответствующие им сопряженные переменные χ и η при $\tau = \tau_k$ должны обращаться в нули, т.е.

$$(4.10) \qquad \chi(\tau_k) = 0, \quad \eta\,(\tau_k) = 0.$$

Из соотношений (3.7) с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа [32] выводятся условия трансверсальности для сопряженной кватернионной переменной $\mathbf{M}$

$$(4.11) \qquad \begin{aligned} M_0 &= \lambda_1 \sin\Omega_{uk} \sin\frac{i_k}{2}, \\ M_1 &= \lambda_2 \sin\Omega_{uk} \cos\frac{i_k}{2}, \\ M_2 &= -\lambda_1 \cos\frac{i_k}{2} - \lambda_2 \cos\Omega_{uk} \cos\frac{i_k}{2}, \\ M_3 &= -\lambda_1 \cos\Omega_{uk} \sin\frac{i_k}{2} - \lambda_2 \sin\frac{i_k}{2}. \end{aligned}$$

Если из первых двух соотношений формул (4.11) выразить неопределенные множители λ_1 и λ_2 через M_0 и M_1 и подставить их в третье и четвертое соотношения этих формул, то в результате получатся условия трансверсальности, свободные от множителей Лагранжа:

$$(4.12) \qquad \begin{aligned} M_2 \sin\Omega_{uk} \sin\frac{i_k}{2} + M_0 \cos\frac{i_k}{2} + M_1 \cos\Omega_{uk} \sin\frac{i_k}{2} &= 0, \\ M_3 \sin\Omega_{uk} \cos\frac{i_k}{2} + M_1 \sin\frac{i_k}{2} + M_0 \cos\Omega_{uk} \cos\frac{i_k}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Из соотношений (3.7) и (4.12) можно получить, что при $\tau = \tau_k$

$$(4.13) \qquad (\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}) = 0.$$

Для этого из первого соотношения системы (3.7) находится $\cos(i_k/2)$ и подставляется в первое соотношение системы (4.12). Аналогично, из второго соотношения системы (3.7) находится $\sin(i_k/2)$ и подставляется во второе соотношение системы (4.12). Соотношения, полученные из системы (4.12), приводятся к общему знаменателю. Далее первое из полученных соотношений умножается на $\cos(i_k/2)$, а второе умножается на $\sin(i_k/2)$, левые и правые части полученных уравнений складываются. В результате слагаемые, в которые входят произведения фазовых и сопряженных переменных с разными индексами, уничтожаются, а произведения с одинаковыми индексами складываются. В итоге получается соотношение (4.13).

Условием (4.13) можно заменить одно из условий (4.12). Для уравнений системы (3.4) и (4.3) соотношение $(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}) = c = \text{const}$ является первым интегралом, причем согласно (4.13) значение $c = 0$. По этой причине соотношение (4.13) имеет место во все время процесса управления. Тогда согласно (4.5) и (4.13) компонента $N_0 \equiv 0$.

Для компонент N_1, N_2, N_3 кватерниона $\mathbf{N}$ можно получить на основе (3.4), (4.3), (4.5) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{dN_1}{d\tau} = -\frac{u\sin\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)m}N_3, \quad \frac{dN_2}{d\tau} = \frac{u\cos\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)m}N_3, \\ \frac{dN_3}{d\tau} = \frac{u}{(1+e\cos\vartheta)m}\left(N_1\sin\vartheta - N_2\cos\vartheta\right). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Сопряженную кватернионную переменную $\mathbf{M}$ можно исключить из рассмотрения, если вместо уравнения (4.3) в постановке краевой задачи оптимального управления использовать систему уравнений (4.14). Так как скалярная составляющая N_0 кватерниона $\mathbf{N}$ равна нулю, то можно ввести вектор $\mathbf{N}_v$ с координатами N_1, N_2, N_3, который представляет собой векторную часть кватерниона $\mathbf{N}$. Тогда систему дифференциальных уравнений (4.14) можно записать в виде векторного дифференциального уравнения

$$d\mathbf{N}_v/d\tau = (u/m)(\mathbf{N}_v \times (\cos\vartheta\,\mathbf{i}_1 + \sin\vartheta\,\mathbf{i}_2))/(1+e\cos\vartheta). \tag{4.15}$$

С помощью (4.5) и с учетом того, что $N_0 = 0$, второе условие трансверсальности из системы (4.12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} (\Lambda_0 N_3 + \Lambda_1 N_2 - \Lambda_3 N_1)\sin\Omega_{uk}\cos(i_k/2) - \\ -(\Lambda_1 N_1 + \Lambda_2 N_2 + \Lambda_3 N_3)\cos\Omega_{uk}\cos(i_k/2) + \\ +(\Lambda_0 N_1 + \Lambda_2 N_3 - \Lambda_3 N_2)\sin(i_k/2) = 0. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Так как время момента окончания процесса не задается заранее, то в конечный момент времени функция Гамильтона (4.6) равна нулю:

$$H_{\text{opt}}(\tau_k) = 0. \tag{4.17}$$

Отметим, что $H_{\text{opt}}(\tau) = 0$ является первым интегралом изучаемой задачи.

Таким образом, принцип максимума Понтрягина сводит поставленную задачу оптимального управления к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (3.4), (4.7), (4.8), (4.14) (или (4.15)) 11-го порядка (в скалярном исчислении) с граничными условиями (3.6) в начальный момент времени и условиями (3.7), (4.10), (4.16), (4.17) в конце процесса управления (в количестве, равном 12). При этом в каждый момент времени оптимальное управление определяется через фазовые и сопряженные переменные из соотношений (4.9).

Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче оптимальной переориентации плоскости орбиты КА с переменной массой управляющим параметром является тяга реактивного двигателя КА, в то время как в работах [21–24, 29, 30] авторов статьи и их коллег управляющим параметром являлось ускорение КА от тяги реактивного двигателя, к тому же в этих работах рассматривалось решение в различных постановках задачи оптимальной переориентации орбиты КА с постоянной массой, а не плоскости орбиты КА с переменной массой. Формула (4.9) показывает, что на структуру оптимального управления существенно влияет изменение массы КА в процессе управления и скорость истечения рабочей массы из сопла двигателя, связанная с параметром β, фигурирующим в законе управления, обратной зависимостью. В дифференциальных фазовых и сопряженных уравнениях, а также в дифференциальных уравнениях линии переключения управления (4.14) в рассматриваемой задаче присутствует в явном виде переменная масса КА, что оказывает качественное влияние на процесс переориентации плоскости орбиты КА, свойства которого изучаются в следующем разделе.

5. Результаты расчетов и их анализ

Сформулированная краевая задача решалась численно с помощью комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Для улучшения сходимости итерационного процесса производилось уточнение моментов разрыва управления по специальному алгоритму, описанному ниже. Оптимальное управление состоит из нескольких этапов: активных и пассивных. На активных этапах управляющий параметр принимает значения $u = u_m$ или $u = -u_m$ (на активных этапах происходит изменение ориентации орбиты). На пассивных этапах $u = 0$ (на пассивных этапах ориентация орбиты не изменяется и совпадает с ориентацией орбиты, соответствующей ориентации орбиты конца предыдущего этапа).

Численное решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений связано с большими трудностями, так как приходится подбирать недостающие начальные условия, а также промежуток времени процесса управления. На сходимость итерационного процесса при решении краевой задачи оптимизации влияет выбор начального приближения. Дополнительные трудности со сходимостью процесса численного решения возникают при наличии разрывов управляющих параметров. В рассматриваемой задаче при малых значениях максимальной тяги число этапов, а следовательно, и число разрывов управления возрастает. По этой причине необходимо, чтобы алгоритм решения задачи учитывал наличие разрывов управления.

Таблица 1

u_m	τ_k	ϑ_k	m_k	J	$\omega_{\pi k}$	n_{et}
0,25	1,720485	130,8325°	0,954649	0,781403	64,9135°	2
0,125	2,301065	158,9216°	0,947368	0,970003	65,2837°	2
0,075	4,786863	283,8775°	0,940712	1,640374	64,8113°	4
0,05	7,277088	86,7048°	0,935770	2,301095	64,7793°	6

При решении краевой задачи методом Ньютона или методом градиентного спуска необходимо вычислять невязки выполнения краевых условий и их производных по начальным условиям сопряженных переменных и по промежутку времени процесса. Невязки будут точнее вычисляться при интегрировании системы дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты, если моменты разрыва управляющего параметра не будут оказываться внутри шага интегрирования. По этой причине на каждом шаге интегрирования надо проверять, был ли разрыв управления внутри шага. Для этого вычисляется согласно (4.9) в левой и правой точке шага выражение

$$\varepsilon_u = |\nu_u| \,/\, [2m(1 + e\cos\vartheta)] - \alpha_2 - \eta\beta.$$

Если знаки выражения одинаковые, то разрыв управления внутри шага интегрирования отсутствовал. Если же знаки разные, то разрыв был. На шаге, внутри которого был разрыв управления, производится интегрирование с более мелким шагом. Мелкий шаг, в котором окажется разрыв, делится на два пропорциональных шага интегрирования, разделенных точкой разрыва управления.

В примерах, результаты расчетов для которых приводятся в таблицах 1–5, начальное состояние системы (3.4) определяется параметрами

$$e = 0{,}1,\ \ \vartheta_n = 30{,}0^\circ,\ \ i_n = 7{,}0^\circ,\ \ \Omega_{un} = 30{,}0^\circ,\ \ \omega_{\pi n} = 50{,}0^\circ,\ \ m_n = 1{,}0. \tag{5.1}$$

Ориентация плоскости конечной орбиты определяется углами

$$i_k = 20{,}0^\circ, \quad \Omega_{uk} = 15{,}0^\circ. \tag{5.2}$$

Примеры различаются максимальными значениями тяги u_m, значениями коэффициента β, который определяет отношение характерного значения скорости движения КА по орбите к скорости истечения рабочего тела из сопел двигателя КА, и значениями весовых множителей α_1, α_2 в функционале (3.8). Результаты расчетов представлены в безразмерных переменных, углы в градусах.

В табл. 1 для значений $\alpha_1 = 0{,}25$, $\alpha_2 = 1{,}5$, $\beta = 0{,}2$ и различных значений u_m приведены значения длительности процесса управления (вторая колонка), значения истинной аномалии КА и массы КА в конце процесса (третья и четвертая колонки соответственно), значения функционала качества процесса (пятая колонка), значения углового расстояния до перицентра орбиты в конце процесса управления (шестая колонка) и число этапов n_{et} в процессе управления (седьмая колонка). Из расчетов, представленных в

Таблица 2

β	τ_k	ϑ_k	m_k	J	$\omega_{\pi k}$	n_{et}
0,2	5,491449	329,0163°	0,949182	0,254090	64,8251°	4
0,5	5,445041	325,8902°	0,879008	0,241984	64,8136°	4
1,0	5,377398	321,3655°	0,775613	0,224387	64,7971°	4

Таблица 3

β	τ_k	ϑ_k	m_k	J	$\omega_{\pi k}$	n_{et}
0,2	8,586485	154,5172°	0,949954	0,250230	64,8388°	6
0,5	8,535597	152,0992°	0,880727	0,238546	64,8316°	6
1,0	8,461673	148,5677°	0,778526	0,221474	64,8215°	6

табл. 1, видно, что с уменьшением максимального значения тяги, которая может создаваться двигательной установкой аппарата, увеличивается продолжительность процесса управления по переводу орбиты КА на заданную плоскость, незначительно увеличивается расход рабочего тела (топлива) и соответственно уменьшается масса аппарата в конце процесса, увеличиваются значения функционала качества процесса управления, увеличивается число этапов процесса управления от двух при u_m, равном 0,25 или 0,125, до четырех при $u_m = 0{,}075$ и до шести при $u_m = 0{,}05$. Для всех примеров первый этап является пассивным. Важно отметить, что угловое расстояние до перицентра орбиты в конце процесса управления слабо зависит от величины максимальной тяги u_m. Отсюда следует, что при всех значениях u_m аппарат в результате процесса перевода его на заданную плоскость орбиты каждый раз оказывается вблизи одного и того же положения на орбите.

Проводились расчеты для других значений весовых множителей в функционале качества (3.8). Отметим, что если число этапов в процессе управления равно двум, то в этом случае оптимальный процесс управления не зависит от значений весовых множителей в функционале (3.8). В этом случае от весовых множителей зависят лишь сопряженные переменные. Это связано с тем, что в этом случае для определения двух моментов окончания этапов (пассивного и активного) имеются два условия: (2.4) (при $\Omega_u = \Omega_{un}$, $i = i_n$ и $\omega_\pi = \omega_{\pi n}$) и (3.7). Благодаря этому краевую задачу для системы дифференциальных уравнений для фазовых переменных можно решать без уравнений для сопряженных переменных. По этой причине далее рассматриваются решения задач оптимального управления для $u_m = 0{,}075$, $u_m = 0{,}05$ и $u_m = 0{,}025$, для которых при заданных граничных условиях (5.1) и (5.2) число этапов управления больше двух.

Ниже в виде таблиц приводятся результаты решения задачи оптимального управления для $\alpha_1 = 0{,}0$ и $\alpha_2 = 1{,}0$ и нескольких значений коэффициента β. В этой задаче требуется перевести КА из начального состояния (5.1) на орбиту, плоскость, которой определяется условиями (5.2), с минимальным значением импульса величины тяги двигателя (с минимальным расходом рабочего тела). В табл. 2 приводятся результаты решения задачи для $u_m = 0{,}075$, а в табл. 3 – для $u_m = 0{,}05$. В отличие от табл. 1 в табл. 2 и 3 в первой колонке приводятся значения коэффициента β.

Таблица 4

№	u	τ	i°	Ω_u°	ω_π°	ϑ°	M
1	0,0	0,356075	7,0	30,0	50,0	53,5317	1,0
2	–0,025	2,375833	9,5604	25,4348	54,5403	162,4352	0,949506
3	0,0	3,788566	9,5604	25,4348	54,5403	229,3201	0,949506
4	0,025	5,557657	11,6824	19,9718	59,9271	333,5040	0,905279
5	0,0	6,764364	11,6824	19,9718	59,9271	55,4346	0,905279
6	–0,025	8,716633	14,5198	18,5903	61,2971	160,6597	0,856472
7	0,0	10,202816	14,5198	18,5903	61,2971	231,1084	0,856472
8	0,025	11,903208	16,9037	15,4391	64,3495	331,2583	0,813962
9	0,0	13,173439	16,9037	15,4391	64,3495	57,37776	0,813962
10	–0,025	15,056534	20,0	15,0	64,7932	158,8377	0,766885

Таблица 5

u_m	τ_k	$J = \Delta m_k$	ϑ_k	n_{ob}	n_{et}	$\omega_{\pi k}$
0,075	5,377398	0,224387	321,3655°	0	4	64,7971°
0,05	8,461673	0,221474	148,5677°	1	6	64,8215°
0,025	15,056534	0,233115	158,8377°	2	10	64,7932°
0,0125	31,069513	0,235341	332,7422°	4	20	64,7170°
0,005	75,758654	0,239085	335,9647°	11	48	64,6988°
0,0025	152,301870	0,239065	335,9453°	23	96	64,6912°
0,00125	305,388734	0,239055	335,9358°	47	192	64,6873°

Из табл. 2 и 3 видно, что с увеличением максимальной тяги u_m и с уменьшением коэффициента β повышается эффективность двигательной установки КА, так как при этом увеличивается конечная масса аппарата и, следовательно, уменьшаются затраты рабочего тела на процесс управления. С увеличением коэффициента β уменьшается значение функционала качества процесса. Наиболее значительно изменение коэффициента β влияет на поведение массы аппарата. На время процесса управления, на угловое расстояние до перицентра в конце процесса изменение коэффициента β влияет незначительно.

Для тех же граничных условий (5.1), (5.2) и $\alpha_1 = 0{,}0$, $\alpha_2 = 1{,}0$, $\beta = 1{,}0$ при условии, что максимальное значение тяги $u_m = 0{,}025$, число этапов в оптимальном управлении оказалось равным десяти. В табл. 4 приводятся результаты расчета для каждого этапа управления. В первой колонке указывается номер этапа управления, во второй – управление на этапе, в третьей колонке по восьмую – момент времени, угол наклона орбиты, угол восходящего узла, угловое расстояние до перицентра, истинная аномалия и масса аппарата в конце каждого этапа соответственно. Значение функционала качества $J = 0{,}233115$.

В табл. 5 приводятся для различных значений максимальной тяги двигателя КА результаты расчета оптимального управления поворотом плоскости орбиты КА при тех же начальных условиях и начальной ориентации орбиты (5.1) и той же ориентации плоскости конечной орбиты (5.2), что и выше, при условии, что $\alpha_1 = 0{,}0$, $\alpha_2 = 1{,}0$, $\beta = 1{,}0$. В первой колонке табл. 5 указано

Таблица 6

u_m	τ_k	$J = \Delta m_k$	ϑ_k	n_{ob}	n_{et}	$\omega_{\pi k}$
0,0025	12,246738	0,020574	354,8571°	1	8	50,9921°
0,001	31,382276	0,020571	354,8337°	4	20	50,9918°
0,0005	63,275304	0,020570	354,8270	9	40	50,9916°

Таблица 7

u_m	τ_k	$J = \Delta m_k$	ϑ_k	n_{ob}	n_{et}	$\omega_{\pi k}$
0,0025	11,577105	0,020536	356,9952°	1	7	49,0069°
0,001	30,707830	0,020500	356,6382°	4	19	49,0067°
0,0005	62,599522	0,020491	356,5389°	9	39	49,0064°
0,00025	126,385110	0,020486	356,4930°	19	79	49,0064°

Таблица 8

β	τ_k	m_k	ϑ_k	Δm_k	J	$\omega_{\pi k}$
0,2	126,400366	0,995848	357,5861°	0,004162	0,020810	49,0064°
0,5	126,394885	0,989673	357,1705°	0,010327	0,020654	49,0065°
1,0	126,385110	0,979514	356,4930	0,020486	0,020486	49,0064°

максимальное значение допустимой тяги, для которой производится расчет, во второй колонке – продолжительность процесса управления, в третьей колонке – значение функционала качества процесса, который определяет расход рабочего тела на процесс управления Δm_k, в четвертой колонке – значение истинной аномалии, определяющей положение КА на орбите, в пятой и шестой колонках указано число полных витков n_{ob}, выполненных КА в процессе движения, и число этапов n_{et} в оптимальном управлении соответственно, в седьмой колонке указано значение углового расстояния до перицентра орбиты в конце процесса управления.

Из табл. 5 видно, что наименьший расход рабочего тела наблюдается при $u_m = 0{,}05$, угловое расстояние до перицентра орбиты в конце процесса слабо зависит от значения максимальной тяги.

Ниже приводятся результаты решения задачи об оптимальном повороте плоскости орбиты при условии, что плоскости начальной и конечной орбит близки друг к другу. Различия между соответствующими угловыми элементами составляют один градус. Расчеты проводились при значениях $\alpha_1 = 0{,}0$, $\alpha_2 = 1{,}0$, $\beta = 1{,}0$, $e = 0{,}1$. В начальный момент положение орбиты и положение КА на орбите определяется условиями (5.1). Ориентация плоскости конечной орбиты определяется углами

$$i_k = 8{,}0^\circ, \quad \Omega_{uk} = 29{,}0^\circ. \tag{5.3}$$

В табл. 6 представлены результаты расчетов для трех значений максимальной тяги. На первом этапе пассивное движение, на втором этапе $u = -u_m$, на третьем этапе пассивное движение, на четвертом этапе $u = u_m$ и далее этапы повторяются.

Таблица 9

u_m	τ_k	$J = \Delta m_k/\beta$	ϑ_k	n_{ob}	n_{et}	$\omega_{\pi k}$
0,00025	27,665243	0,001740	151,8025°	4	18	49,9008°
0,0001	59,646801	0,001788	156,0003°	9	38	49,9007°
0,00005	120,127999	0,001794	317,0792°	18	76	49,9007°
0,000025	241,419823	0,001792	317,0605°	37	148	49,9007°

В табл. 7 приводятся расчеты с другим начальным значением истинной аномалии, когда начальные условия определяются параметрами

$$e = 0{,}1,\ \vartheta_n = 75{,}0^\circ,\ i_n = 7{,}0^\circ,\ \Omega_{un} = 30{,}0^\circ,\ \omega_{\pi n} = 50{,}0^\circ,\ m_n = 1{,}0, \tag{5.4}$$

а конечные условия (5.3) сохраняются. В этом случае первый этап активный $u = u_m$, второй этап пассивный, третий этап активный $u = -u_m$, четвертый этап пассивный и далее этапы повторяются. За счет увеличения начальной аномалии, характеризующей положение КА на начальной орбите, первый этап в отличие от приведенных ранее примеров оказался активным.

Из табл. 6 и 7 видно, что с уменьшением максимального значения тяги существенно увеличивается продолжительность процесса и незначительно уменьшается расход рабочего тела (в пятом знаке).

В табл. 8 для различных значений коэффициента β приводятся результаты расчета оптимального поворота плоскости орбиты КА для случая, когда $u_m = 0{,}00025$, $\alpha_1 = 0{,}0$, $\alpha_2 = 1{,}0$, начальные условия определяются соотношениями (5.4), а ориентация плоскости конечной орбиты – соотношениями (5.3). В этом случае КА совершает 19 полных витков, оптимальное управление содержит 39 этапов, первый этап активный $u = u_m$, второй этап пассивный, третий этап активный $u = -u_m$, четвертый этап пассивный и далее этапы повторяются, на последнем этапе $u = -u_m$.

Из табл. 8 видно, что от значения коэффициента β существенно зависит только расход рабочего тела на процесс управления Δm_k, другие показатели процесса меняются незначительно.

В табл. 9 для нескольких малых значений максимальной тяги u_m приводятся результаты расчета оптимального поворота плоскости орбиты КА на малые углы для случая, когда $\alpha_1 = 0{,}0$, $\alpha_2 = 1{,}0$, $\beta = 0{,}5$, начальные условия определяются соотношениями (5.1), а ориентация плоскости конечной орбиты параметрами (5.5):

$$i_k = 6{,}9^\circ, \quad \Omega_{uk} = 30{,}1^\circ. \tag{5.5}$$

Во всех случаях, представленных в табл. 9, первый этап оптимального управления пассивный, второй этап активный $u = u_m$, третий этап пассивный, четвертый этап активный $u = -u_m$ и далее этапы повторяются. Из табл. 9 видно, что при малых углах поворота плоскости орбиты и малых значениях максимальной тяги расход рабочего тела на оптимальный процесс и конечное значение углового расстояния до перицентра слабо зависят от максимального значения тяги.

На основе анализа большого количества расчетов можно сделать выводы о некоторых закономерностях оптимального управления, которые, в частности, иллюстрируются табл. 4.

Совокупность следующих друг за другом четырех этапов, которая начинается с пассивного этапа и оканчивается активным этапом, укладывается в одном витке и длительность таких совокупностей при переходе к следующей аналогичной совокупности с той же последовательностью этапов уменьшается. Уменьшение длительности таких совокупностей этапов ослабевает с уменьшением максимальной тяги. В табл. 4 имеются две такие совокупности, следующие друг за другом: этапы 3–6 и этапы 7–10. В момент начала третьего этапа истинная аномалия местонахождения КА была равна 162,4352°, а в момент окончания шестого этапа истинная аномалия стала равной 160,6597°. Следовательно, за четыре этапа этой совокупности истинная аномалия нахождения КА изменилась на 358,2245°, меньше 360°, и, следовательно, все четыре этапа совокупности 3–6 оказались внутри одного витка. Началу совокупности 3–6 соответствовало $\tau = 2{,}375833$, а окончанию совокупности $\tau = 8{,}716633$. Следовательно, длительность совокупности этапов 3–6 равна 6,340800. Аналогично, на совокупности этапов 7–10 истинная аномалия нахождения КА изменилась на 358,1784°, а длительность совокупности этапов равна 6,339901, меньше, чем длительность предыдущей совокупности.

Совокупность четырех следующих друг за другом этапов, которая начинается с активного этапа и оканчивается пассивным этапом, выходит за рамки одного витка, и длительность таких совокупностей при переходе к следующей аналогичной совокупности с той же последовательностью этапов увеличивается. Увеличение длительности таких совокупностей этапов ослабевает с уменьшением максимальной тяги. В табл. 4 имеются две такие совокупности, следующие друг за другом: 2–5 и 6–9. На совокупности этапов 2–5 истинная аномалия местонахождения КА изменилась на 361,9029°, больше 360°, и, следовательно, на совокупности этапов 2–5 КА проходит больше чем один виток. Длительность нахождения КА на этой совокупности этапов равна 6,408289. На совокупности этапов 6–9 истинная аномалия нахождения КА изменилась на 361,9330°, а длительность нахождения КА на этой совокупности этапов равна 6,409072 и, следовательно, дольше, чем на предыдущей совокупности этапов.

Длительности соответствующих активных этапов и разности между истинными аномалиями КА в конце и начале этапа для следующих друг за другом совокупностей из четырех этапов уменьшаются при переходе к следующей совокупности. По мере уменьшения максимальной тяги этот эффект ослабевает. В табл. 4 в совокупности этапов 2–5 второй этап активный. Длительность этого этапа равна 2,019758, а разность между истинными аномалиями равна 108,9035°. В совокупности 6–9 соответствующим второму этапу является активный шестой этап. Длительность шестого этапа равна 1,952269, а разность между истинными аномалиями равна 105,2251°. Видно, что длительность этапа и разность между истинными аномалиями для шестого этапа меньше, чем для второго этапа. Аналогичный вывод можно сделать из сравнения характеристик соответствующих друг другу четвертого и восьмого этапов.

Длительности соответствующих пассивных этапов и разности между истинными аномалиями КА в конце и начале этапа для следующих друг за другом совокупностей из четырех этапов увеличиваются при переходе к следующей совокупности. По мере уменьшения максимальной тяги этот эффект ослабевает. В табл. 4 в совокупности этапов 2–5 третий этап пассивный. Длительность этого этапа равна 1,412733, а разность между истинными аномалиями равна 66,8849°. В совокупности 6–9 соответствующим третьему этапу является активный седьмой этап. Длительность седьмого этапа равна 1,486183, а разность между истинными аномалиями равна 70,4487°. Видно, что длительность этапа и разность между истинными аномалиями для седьмого этапа больше, чем для третьего этапа. Аналогичный вывод можно сделать из сравнения характеристик соответствующих друг другу пятого и девятого этапов.

Отметим, что длительность первого этапа существенно зависит от начального значения истинной аномалии и по этой причине длительность первого этапа не подчиняется перечисленным закономерностям.

6. Заключение

В статье получено с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА и принципа максимума Понтрягина в нелинейной постановке новое решение задачи об оптимальном переводе орбиты КА с переменной массой на заданную плоскость. Управление движением аппарата производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты КА. Минимизируются время и суммарный импульс тяги, затраченные на процесс управления. Расчеты оптимального управления выполнены для случая минимизации комбинированного функционала качества процесса управления и для случая минимизации суммарного импульса тяги. Получены примеры численного решения задачи, содержащие до 192 активных и пассивных этапов управления (большое количество активных и пассивных этапов управления связано с малостью величины тяги реактивного двигателя, характерной для современных двигателей КА).

Исследовано влияние максимальной величины тяги, скорости истечения рабочего тела из сопла двигателя, весовых множителей в функционале качества процесса управления на процесс перевода орбиты КА на заданную плоскость: на длительность процесса управления, на число и длительность этапов управления, а также на суммарный расход топлива. Установлено, что угловое расстояние до перицентра орбиты в конце процесса управления слабо зависит от перечисленных выше параметров. Длительность процесса управления, а также число этапов управления слабо зависят от скорости истечения рабочего тела, но существенно зависят от максимального значения тяги.

Выявлены закономерности в поведении длительностей совокупностей из четырех активных и пассивных этапов управления, следующих друг за другом в процессе оптимального управления ориентацией плоскости орбиты КА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
2. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А. и др.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
3. *Копнин Ю.М.* К задаче поворота плоскости орбиты спутника // Космич. исследования. 1965. Т. 3. Вып. 4. С. 22–30.
4. *Лебедев В.Н.* Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.
5. *Борщевский М.З., Иослович М.В.* К задаче о повороте плоскости орбиты спутника при помощи реактивной тяги // Космич. исследования. 1969. Т. 7. Вып. 6. С. 8–15.
6. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
7. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета: Уч. пос. М.: Наука, 1990.
8. *Ишков С.А., Романенко В.А.* Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника земли с двигателем малой тяги // Космич. исследования. 1997. Т. 35. № 3. С. 287–296.
9. *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н.* Баллистика и навигация космических аппаратов. М.: Дрофа, 2004.
10. *Чернявский Г.М., Бартенев В.А., Малышев В.А.* Управление орбитой стационарного спутника. М.: Машиностроение, 1984.
11. *Решетнёв М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А. и др.* Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.: Машиностроение, 1988.
12. *Bartenev V., Malyshev V., Rayevsky V., et al.* Attitude and orbit control systems of Russian communication, geodetic and navigation spacecraft // Space Technol. 1999. V. 19. No. 3–4. P. 135–147.
13. *Testoyedov N., Rayevsky V., Somov Ye., et al.* Attitude and orbit control systems of Russian communication, navigation and geodesic satellites: History, Present and Future // IFAC PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 6422–6427.
14. *Battin R.H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. N.Y.: AIAA Press, 1987.
15. *Huntington G.T., Rao A.V.* Optimal Reconfiguration of a Tetrahedral Formation via a Gauss Pseudospectral Method // Proc. AAS/AIAA Astrodynam. Special. Conf. AS 05-338. 2005. P. 1–22.
16. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 2 // Космич. исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
17. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006.
18. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011.
19. *Челноков Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 897–914.

20. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космич. исследования. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336.

21. *Сергеев Д.А., Челноков Ю.Н.* Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 185–188.

22. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. № 3. С. 87–95.

23. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Ч. 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 8. С. 567–575.

24. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Ч. 2 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 9. С. 633–643.

25. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celestial Mechan. 1976. V. 13. No. 2. P. 253–263.

26. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980.

27. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.

28. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.

29. *Челноков Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.

30. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 1–1. С. 84–92.

31. *Ильин В.А., Кузмак Г.Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976.

32. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 25.04.2018

После доработки 05.03.2019

Принята к публикации 25.04.2019