

# Управление в социально-экономических системах

© 2019 г. П.И. САФОНОВ, канд. техн. наук (safonov@stcloudstate.edu)  
(Государственный университет штата Миннесота, Сен-Клауд, США)

## ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ СТРУКТУР В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТИПА ЗАТРАТЫ—ВЫПУСК

На основе глобального метода последовательного улучшения Кротова предложен двойственный вычислительный алгоритм для дискретной задачи оптимального управления, соответствующей выпуклой задаче квадратичного программирования большой размерности с сепарабельным функционалом, возникающей при прогнозировании матрицы прямых затрат в динамических моделях межотраслевого баланса. С помощью декомпозиции удастся воспользоваться специальным видом матрицы ограничений для уменьшения размерности задачи.

*Ключевые слова:* модель межотраслевого баланса, матрица прямых затрат, сбалансированное прогнозирование, квадратичное программирование, декомпозиция, двойственный метод оптимального управления В.Ф. Кротова.

DOI: 10.1134/S0005231019080099

### 1. Введение

Для эффективного принятия решений и прогнозирования на макроэкономическом уровне необходимы информационные и программные средства, обеспечивающие анализ данных, имитационное моделирование и расчет оптимальных сценариев на основе математических моделей и методов системного анализа. В современной экономике сфера применения таких компьютерных систем включает разработку макроэкономических сценариев развития на уровне страны (региона) с учетом межотраслевого баланса.

Основы моделей межотраслевого баланса (моделей типа затраты—выпуск) были заложены В.В. Леонтьевым [1] и развиты многочисленными последователями. В работах В.И. Гурмана, В.Ф. Кротова и их коллективов [2–6] были предложены обобщения для модели Леонтьева, в том числе были построены оптимизационные модели для социо-эколого-экономических систем. Привлечение аппарата теории оптимального управления динамическими системами [7–9] стало основой для создания технологий для расчета сценариев в динамике с учетом тех или иных управлений, целевых критериев качества управлений и ограничений. Поскольку задачи оптимального управления, рассматриваемые в таких моделях, нередко оказываются достаточно сложными в математическом и вычислительном смыслах (например, ввиду возможной вырожденности оптимизационных задач в смысле принципа максимума

Л.С. Понтрягина, большой размерности системы и других факторов), то для решения таких задач оказывается не достаточным применение тех или иных «универсальных» методов теории оптимального управления и соответствующего программного обеспечения, т.е. требуется разработка специальных вычислительных алгоритмов и программных средств, учитывающих специфику моделей.

В частности, в работах коллективов В.И. Гурмана и В.Ф. Кротова (в Институте проблем управления РАН, и Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН) было создано специальное математическое и программное обеспечение для идентификации систем и построения динамических сценариев на основе управлений (например, [2–6, 10, 11]). Соответствующие методы решения задач оптимального управления во многом базируются на теории достаточных условий оптимальности, предложенных В.Ф. Кротовым [9].

Цель статьи — разработка вычислительного алгоритма, основанного на известном методе глобального улучшения В.Ф. Кротова, для сбалансированного прогнозирования матричных структур динамической модели типа затраты—выпуск, описанной ниже, с учетом ее специфики.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается динамическая модель следующего общего вида [12]:

$$(2.1) \quad \mathbf{X}^i(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}(t)\mathbf{X}^j(t) + \mathbf{Y}^i(t) - Imp^i(t),$$

$$(2.2) \quad \mathbf{Y}^i(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_{ij}(t)I^j(t) + C^i(t) + Exp^i(t),$$

$$(2.3) \quad K^i(t+1) = K^i(t) + V^i(t) - W^i(t),$$

$$(2.4) \quad V^i(t) = \Phi_V^i(I^i(t), \dots, I^i(t - \tau_{v_i})),$$

$$(2.5) \quad W^i(t) = \Phi_W^i(K^i(t), \dots, K^i(t - \tau_{w_i})),$$

$$(2.6) \quad \mathbf{X}^i(t) = F^i(t, K^i(t), L^i(t)),$$

$$(2.7) \quad \mathbf{A}(t) = \Phi_A(X(t), \dots, \{\mathbf{A}(t_{k_A})\}),$$

$$(2.8) \quad \mathbf{D}(t) = \Phi_D(I(t), \dots, \{\mathbf{D}(t_{k_D})\}),$$

где  $i = \overline{1, n}$ ,  $t = \overline{t_0, T}$  (например, годы),  $\mathbf{X}^i(t)$  — валовые выпуски;  $\mathbf{Y}^i(t)$  — конечный продукт;  $Imp^i(t)$ ,  $Exp^i(t)$  — соответственно импорт и экспорт  $i$ -й отрасли;  $C^i(t)$  — непроемленное потребление продукции отрасли  $i$  (включающее в себя личное потребление, расходы на оборону, прочие статьи государственного потребления, а также запасы);  $K^i(t)$  — стоимость основных производственных фондов (ОПФ);  $V^i(t)$ ,  $W^i(t)$  — величина ввода в действие и выбытие ОПФ отрасли  $i$ ;  $I^i(t)$  — капитальные вложения в  $i$ -ю отрасль в году  $t$ ;  $L^i(t)$  — численность занятых в  $i$ -й отрасли;  $\mathbf{A}(t) = \|\mathbf{a}_{ij}(t)\|$  — матрица

коэффициентов прямых затрат;  $\{\mathbf{A}(t_{k_A})\}$ ,  $\{\mathbf{D}(t_{k_A})\}$  — множества отчетных статистических матриц;  $\mathbf{D}(t) = \|\mathbf{d}_{ij}(t)\|$  — матрица технологической структуры капитальных вложений. Модель включает в себя балансовые соотношения блоков с постоянной структурой (2.1)–(2.3) и блоков с переменной структурой (2.4)–(2.8), для каждого из которых может существовать более чем один вариант соответствующих им операторов  $F_i$ ,  $\Phi_V^i$ ,  $\Phi_W^i$ ,  $\Phi_A$ ,  $\Phi_D$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Отметим, что многие практически интересные производственные функции придают модели нелинейный характер.

В общем случае данные соотношения представлены в виде уравнений с распределенными лагами (2.4) и (2.5), где  $\tau_{v_i}$  и  $\tau_{w_i}$  обозначают максимальную глубину запаздывания соответственно в процессах обновления и старения фондов  $i$ -й отрасли.

В данной статье акцент сделан на один из центральных блоков модели — блок прогнозирования технологической структуры материального производства, т. е. прогнозирование матричной функции  $\mathbf{A}(t)$ .

С внедрением в производство новых технологий происходит переход на использование новых материалов, изменение их пропорций, что влечет изменение количественных показателей, характеризующих межотраслевые связи. Применительно к модели это означает, что изменению подвергается матрица коэффициентов прямых затрат.

Моделировать происходящие технологические сдвиги можно различными способами. Один из них — задать тенденции изменения коэффициентов прямых затрат экзогенно. Это целесообразно, если надо изучить последствия технологических изменений, т. е. выяснить, как такие изменения повлияют на структуру и темпы экономического роста. Другой способ — использовать дополнительные соображения и устойчивые статистические закономерности, связывающие технологические коэффициенты с остальными переменными модели.

Ряд методов прогнозирования динамики матрицы  $\mathbf{A}(t)$  предполагает статистическое экстраполирование тенденций в изменении ее элементов. Такие алгоритмы (см., например, [13, 14]) позволяют достаточно точно отразить поведение коэффициента каждого в отдельности, но не гарантируют адекватного описания общих (суммарных) тенденций в материальных затратах и промежуточном потреблении.

Достижение сбалансированности матричных элементов с их суммами по строкам и столбцам (строчными и столбцовыми окаймлениями) обеспечивает известный метод RAS [15]. Основным предположением в нем является то, что более устойчивые и гладкие траектории, присущие окаймлениям, должны предопределять характер частных изменений элементов матрицы. Однако метод полностью абстрагируется от изменений в матрице под влиянием временного фактора и в явном виде время вообще не учитывает.

Модернизированные методы прогнозирования матриц  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{D}(t)$  синтезируют в себе оба подхода и предназначены для получения «структурно-динамического сбалансированного прогноза» [16]. Идея такого подхода состоит в нахождении прогнозных значений элементов матрицы, динамика которых определяется поведением их траекторий в предшествующий период и

$X_{ij}$	$P_i$
$Z_j$	$Q$

Рис. 1. Окаймления матрицы межотраслевых потоков.

факторами, воздействующими на них в рассматриваемый период. В отличие от метода RAS в данном методе фактор времени учитывается в явном виде. Рассматриваемый ниже метод, основанный на [16], применительно к прогнозированию матрицы прямых затрат был развит в [12].

Изложим суть метода в обобщенном виде применительно к матрице прямых затрат  $\mathbf{A}$ . Введем обозначения:  $\mathbf{X}_{ij}(t)$  — матрица межотраслевых потоков;  $\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_{ij}$  — вектор промежуточного продукта отраслей, идущего на производственное потребление;  $\mathbf{z}_j = \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{ij}$  — вектор материальных затрат отраслей;  $\mathbf{Q} = \sum_i^m \mathbf{p}_i = \sum_j^n \mathbf{z}_j = \sum_i^m \sum_j^n \mathbf{X}_{ij}$  — совокупная величина промежуточного продукта. Таким образом,  $\mathbf{p}_i$  и  $\mathbf{z}_j$ , являющиеся соответственно строчными и столбцовыми окаймлениями матрицы  $\mathbf{X}_{ij}$ , сбалансированы, в свою очередь, с величиной  $\mathbf{Q}$  (рис. 1).

Аналогично для матрицы коэффициентов прямых затрат  $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{X}_{ij}/\mathbf{X}^j$  имеет место сбалансированность:

$$(2.9) \quad \mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}^j, \quad \mathbf{z}_j = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}^j, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Если ввести величины  $\alpha_i = \mathbf{p}_i/\mathbf{X}^i$  — долю промежуточного продукта в валовом выпуске отраслей,  $\beta_j = \mathbf{z}_j/\mathbf{X}^j$  — материалоемкость валового продукта отраслей,  $\mathbf{x}_i = \mathbf{X}^i / \sum_{j=1}^n \mathbf{X}^j$  — удельный вес  $i$ -й отрасли в валовом внутреннем продукте (ВВП), то тождество (2.9) можно переписать в виде:

$$(2.10) \quad \beta_j(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_{ij}(t),$$

$$(2.11) \quad \alpha_i(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}(t) \mathbf{x}_j(t) / \mathbf{x}_i(t).$$

Величина  $\gamma = \sum_i^m \sum_j^n \mathbf{X}_{ij} / \sum_j^n \mathbf{X}^j = \mathbf{Q}/\mathbf{X}$ , интерпретируемая: а) как доля суммарного промежуточного продукта в ВВП и б) как материалоемкость общественного продукта, соответственно равна

$$(2.12) \quad \gamma(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \mathbf{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j(t) \mathbf{x}_j(t),$$

где  $\beta_j(t)$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $\gamma(t)$  — соответственно элементы окаймляющей строки, окаймляющего столбца и суммарная величина окаймления,  $\mathbf{x}_j(t)$ ,  $\mathbf{x}_i(t)$  — в общем случае весовые множители, суть коэффициенты отраслевой структуры валового продукта.

В предлагаемом методе выделяются два подхода — *деагрегационный* и *комбинированный* [12], отличающиеся способом согласования прогнозных значений окаймляющих величин с прогнозными величинами  $\hat{\alpha}_i(t)$ .

При *деагрегационном* подходе алгоритм прогнозирования разбивается на три этапа.

1. Осуществляется прогноз суммарной доли  $\gamma$ : ее расчетные величины  $\hat{\gamma}(t)$  формируются либо с помощью подбора кривых роста, либо экспертным путем.

2. Строятся “частные” (не зависимые друг от друга) прогнозы  $\hat{\alpha}_i(t)$ ,  $\hat{\beta}_j(t)$  окаймляющих долей  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ , а затем производится их согласование (балансировка) с суммарной долей  $\hat{\gamma}(t)$  в соответствии с (2.12). Для этого решаются две задачи квадратичного программирования [17]

$$(2.13) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\alpha_i(t) - \hat{\alpha}_i(t)}{\hat{\alpha}_i(t)} \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha_i(t)}, \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \mathbf{x}_i(t) = \hat{\gamma}(t), \\ \underline{\alpha}_i(t) \leq \alpha_i(t) \leq \bar{\alpha}_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\beta_j(t) - \hat{\beta}_j(t)}{\hat{\beta}_j(t)} \right)^2 \rightarrow \min_{\beta_j(t)}, \\ \sum_{j=1}^n \beta_j(t) \mathbf{x}_j(t) = \hat{\gamma}(t), \\ \underline{\beta}_j(t) \leq \beta_j(t) \leq \bar{\beta}_j(t), \quad j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

в которых минимизируется суммарное относительное отклонение искомых величин  $\alpha_i(t)$  и  $\beta_j(t)$  от их частных прогнозов. При этом учитываются нижние и верхние границы допустимого варьирования переменных  $\alpha_i(t)$  и  $\beta_j(t)$ , соответственно  $\underline{\alpha}_i(t)$ ,  $\bar{\alpha}_i(t)$  и  $\underline{\beta}_j(t)$ ,  $\bar{\beta}_j(t)$ . Отметим, что прогноз весовых коэффициентов  $\mathbf{x}_i(t)$  также осуществляется автономно.

Таким образом, при решении задач (2.13), (2.14) согласуются три группы независимо сформированных прогнозов:  $\mathbf{x}_i(t)$ ,  $\hat{\gamma}(t)$  и  $\{\hat{\alpha}_i(t), \hat{\beta}_j(t)\}$  (рис. 2).

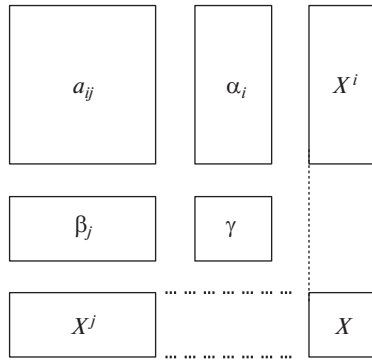


Рис. 2. Согласование независимых прогнозов.

3. Прогноз коэффициентов прямых затрат  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t)$  осуществляется на основе модификации предложенного в [16] “динамизированного” метода RAS.

Предполагается, что поведение расчетных траекторий элементов данной матрицы  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t)$  определяется близостью их к имеющимся в отдельные годы отчетного периода элементам матриц  $\mathbf{A}(t_1), \mathbf{A}(t_2), \dots, \mathbf{A}(t_k)$  и изменением элементов базисной матрицы  $\mathbf{A}^0$  под воздействием прогнозных окаймлений. (Не нарушая общности рассуждений, можно за базисную матрицу  $\mathbf{A}^0$  положить последнюю, имеющуюся в статистической отчетности  $\mathbf{A}(t_k)$ , тогда начальный год моделирования  $t_0 = t_k$ ). При этом предполагается, что “относительный прирост любого элемента структурной матрицы в году  $t$  формируется из двух аддитивных составляющих, одна из которых является общей для всех элементов данного столбца, другая — общей для всех элементов данной строки” [16]. Такая зависимость отражается формулой

$$(2.15) \quad \hat{\mathbf{a}}_{ij}(t) = \mathbf{a}_{ij}^0 (\mathbf{1} + r_i \mathbf{f}_i(t) + s_j \mathbf{g}_j(t)).$$

Функции  $\mathbf{f}_i(t)$  и  $\mathbf{g}_j(t)$ , такие что  $\mathbf{f}_i(t_0) = \mathbf{g}_j(t_0) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , определяют характер изменения составляющих относительных темпов прироста во времени. Их вид считается известным, и характер поведения в основном определяется динамикой окаймлений.

Прогноз коэффициентов матрицы  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t)$  с учетом сделанных выше предположений о характере поведения расчетных траекторий сводится к необходимости решения задачи квадратичного программирования (ЗКП) следующего вида:

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^k [\mathbf{a}_{ij}^0 (1 + r_i \mathbf{f}_i(t_l) + s_j \mathbf{g}_j(t_l) - \mathbf{a}_{ij}(t_l))]^2 \rightarrow \min_{r_i, s_j}, \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}^0 (1 + r_i \mathbf{f}_i(t) + s_j \mathbf{g}_j(t)) \mathbf{x}_j = \alpha_i(t) \mathbf{x}_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_{ij}^0 (1 + r_i \mathbf{f}_i(t) + s_j \mathbf{g}_j(t)) = \beta_j(t), \quad j = \overline{1, n}, \\ \underline{\mathbf{a}}_{ij}(t) \leq \mathbf{a}_{ij}^0 (1 + r_i \mathbf{f}_i(t) + s_j \mathbf{g}_j(t)) \leq \bar{\mathbf{a}}_{ij}(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right.$$

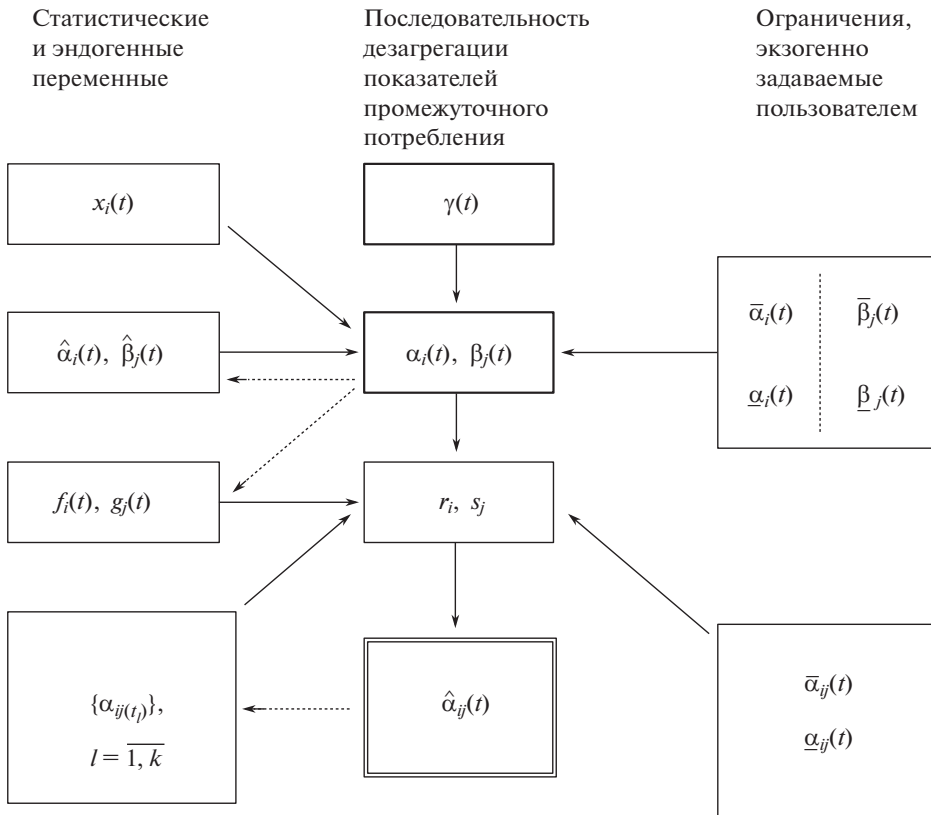


Рис. 3. Схема дезагрегационного алгоритма.

В данной постановке в отличие от [16], где рассматривается прогноз потоков, а не коэффициентов, имеют место также дополнительные ограничения типа неравенств, отражающие точку зрения экономистов, строящих прогноз. С помощью величин  $\underline{\mathbf{a}}_{ij}(t), \bar{\mathbf{a}}_{ij}(t)$  можно управлять поведением отдельных, наиболее важных коэффициентов  $\mathbf{a}_{ij}(t)$ .

На схеме (рис. 3) изобразим причинно-следственные связи в описанном дезагрегационном алгоритме прогнозирования.

Характерной особенностью “дезагрегационного” прогнозирования является то, что в нем неявно предполагают, что достоверность прогноза суммарной величины выше, чем достоверность суммы прогнозов ее составляющих (и поэтому, в частности, последние получаются исходя из первого). При этом вероятнее всего имеют в виду свойство наколения вычислительной ошибки при суммировании и то, что динамика окаймлений имеет более устойчивый и гладкий вид по сравнению с динамикой суммированных величин. Однако именно последний факт позволяет рассчитывать на то, что в данном случае ошибки частных прогнозов при суммировании будут не накапливаться, а взаимно компенсироваться. Поэтому согласование расчетных траекторий  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t)$  с прогнозами  $\alpha_i(t), \beta_j(t)$  (предварительно согласованными с  $\hat{\gamma}(t)$ ) имеет смысл не только для повышения надежности прогноза матрицы  $\mathbf{A}(t)$ , сколько по-

тому, что ее прогноз сам по себе является более сложной и не менее важной самостоятельной задачей, чем расчет более агрегированных показателей.

Таким образом, в процессе дезагрегирования информации по цепочке  $(\gamma) \rightarrow (\alpha_i, \beta_j) \rightarrow (\mathbf{a}_{ij})$  матрица  $\mathbf{A}(t)$  “теряет” статус параметра модели и становится эндогенной переменной, причем не промежуточной, а итоговой. Действительно, во-первых, из выражений (2.14)–(2.16) следует зависимость  $\mathbf{A}(t)$  от  $\mathbf{x}_i$ , а главное, во-вторых, если матрица  $\mathbf{A}(t)$  рассчитана в соответствии с системой (2.16) при уже известных величинах  $\alpha_i(t)$ , то для нахождения вектора конечного продукта  $\{\mathbf{Y}^i\}$  нет необходимости решать уравнения межотраслевого баланса  $\bar{\mathbf{Y}} = (E - A)\bar{\mathbf{X}}$ , поскольку тогда достаточно вычислить  $\mathbf{Y}^i = (1 - \alpha_i)\mathbf{X}^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Другими словами, при прогнозировании коэффициентов прямых затрат в рамках данного подхода речь идет не об “учете динамики параметра  $\mathbf{A}(t)$ ”, а о прогнозе собственно *межотраслевых связей*, моделируемых технологическими коэффициентами  $\mathbf{a}_{ij}$ .

Алгоритм прогнозирования при *комбинированном* подходе заключается в независимом построении прогнозов  $\hat{\gamma}(t)$ ,  $\hat{\alpha}_i(t)$ ,  $\hat{\beta}_j(t)$  и их *одновременном* согласовании с теоретической зависимостью (2.15) для  $\mathbf{a}_{ij}(t, r_i, s_j)$ . При этом в отличие от описанной выше трехэтапной дезагрегационной процедуры решается одна, комбинированная задача, в которой минимизируется средневзвешенное квадратическое отклонение  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t_l)$  от их статистических величин  $\mathbf{a}_{ij}(t_l)$  и искомым  $\gamma$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  от их частных прогнозов  $\hat{\gamma}(t)$ ,  $\hat{\alpha}_i(t)$ ,  $\hat{\beta}_j(t)$ :

$$(2.17) \quad \begin{aligned} & \theta_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^k (\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t_l, r_i, s_j) - \mathbf{a}_{ij}(t_l))^2 + \\ & + \theta_{\alpha} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\alpha_i - \hat{\alpha}_i(t)}{\hat{\alpha}_i(t)} \right)^2 + \theta_{\beta} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\beta_j - \hat{\beta}_j(t)}{\hat{\beta}_j(t)} \right)^2 + \\ & + \theta_{\gamma} \left( \frac{\gamma - \hat{\gamma}(t)}{\hat{\gamma}(t)} \right)^2 \rightarrow \min_{r_i, s_j, \alpha_i, \beta_j, \gamma}, \end{aligned}$$

$$(2.18) \quad \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij}(t, r_i, s_j) \mathbf{x}_j(t) = \alpha_i \mathbf{x}_i(t), \quad i = \overline{1, m},$$

$$(2.19) \quad \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{a}}_{ij}(t, r_i, s_j) = \beta_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$(2.20) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij}(t, r_i, s_j) \mathbf{x}_j(t) = \gamma,$$

$$(2.21) \quad \underline{\mathbf{a}}_{ij}(t) \leq \hat{\mathbf{a}}_{ij}(t, r_i, s_j) \leq \bar{\mathbf{a}}_{ij}(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$(2.22) \quad \underline{\alpha}_i(t) \leq \alpha_i(t) \leq \bar{\alpha}_i(t),$$

$$(2.23) \quad \underline{\beta}_j(t) \leq \beta_j(t) \leq \bar{\beta}_j(t),$$

$$(2.24) \quad \underline{\gamma}(t) \leq \gamma(t) \leq \bar{\gamma}(t).$$



Здесь  $\theta_a, \theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_\gamma$  — задаваемые экзогенно весовые множители, с помощью которых регулируется суммарная степень близости каждой из группы показателей к соответствующим статистическим значениям ( $\mathbf{a}_{ij}(t_l)$ ) либо частным прогнозам ( $\hat{\gamma}(t), \hat{\alpha}_i(t), \hat{\beta}_j(t)$ ).

В данной задаче ограничение (2.20) совместно с (2.18), (2.19) обеспечивает выполнение балансовых равенств (2.12) и поэтому может быть эквивалентно заменено на любое из них.

Отметим, что в “комбинированном” алгоритме прогноз матрицы  $\mathbf{A}(t)$  влияет на расчет конечного продукта  $\mathbf{Y}^i = (1 - \alpha_i)\mathbf{X}^i$ , поскольку в зависимости (2.17)–(2.24) величины  $\gamma, \alpha_i, \beta_j, \hat{\mathbf{a}}_{ij}$  оцениваются совместно в отличие от алгоритма (2.14)–(2.16).

Численные методы прогнозирования для описанных алгоритмов предлагаются в следующем разделе.

Следует отметить, что в рамках природно-экономической модели [4] этот метод можно применить также для прогнозирования матрицы коэффициентов прямых затрат на восстановление ресурсов  $\mathbf{A}^{(z)}$  и матрицы коэффициентов фондообразующих затрат при восстановлении ресурсов  $\mathbf{B}^{(z)}$ .

### 3. Вычислительные алгоритмы методов прогнозирования динамики технологических параметров модели

Рассмотренные выше алгоритмы прогнозирования межотраслевых матричных структур, дезагрегационный и комбинированный, предполагают решение для каждого года моделирования  $t = [t_0, T]$  задач квадратичного программирования (2.13), (2.14), (2.16) либо (2.17)–(2.24).

В силу большой размерности решение задач (2.16) и (2.17)–(2.24) известными методами нелинейного программирования представляется весьма затруднительным. Поэтому с учетом специфики данных задач для их решения может оказаться эффективным применение двойственного итерационного метода [7]. Данный алгоритм является универсальным методом решения задачи отыскания закона управления и соответствующих ему фазовых траекторий таких, чтобы процесс не выходил бы за пределы заданных ограничений, с одновременной минимизацией некоторого критерия. Он опирается на достаточные условия оптимальности управляемых процессов, которые являются эффективными в том случае, если может быть найдена некоторая функция  $\varphi$  состояния процесса, обладающая рядом специальных свойств.

#### 3.1. Двойственный метод оптимизации многошаговых процессов

Прежде чем представить вычислительный алгоритм, напомним основные конструкции двойственного метода глобального улучшения В.Ф. Кротова [7, 9]. Для сохранения терминологии статьи [7] в данном пункте принятые ранее обозначения временно переопределяются.

Рассмотрим управляемый процесс, характеризуемый дискретным аргументом  $t$ , состоянием  $y$  и управлением  $u$ , причем  $t = \overline{0, N-1}$ ,  $y \in Y = R^n$ ,

$u \in U \subset R^m$ , и удовлетворяющий уравнению

$$(3.1) \quad y(t+1) = f(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = y_0, \quad y_i(N) = b_i, \quad i = \overline{1, r} \leq n.$$

Такие процессы будем называть допустимыми, а их множество обозначим через  $D$ . Определим на множестве  $E = \{(y(t), u(t)) : y^{R^n}, u \in U\}$  функционал вида

$$(3.2) \quad J = \sum_{t=0}^{N-1} f^0(t, y(t), u(t)) + F(N, y).$$

Требуется найти последовательность  $\{y_s(t), u_s(t)\}$  элементов из  $E$ , сходящуюся к  $D$  и минимизирующую  $J$  на  $D$ :

$$(3.3) \quad J(y_s, u_s) \rightarrow d = \inf_D J.$$

Определим в соответствии с [7] класс функций  $\varphi(t, y) \in \Pi$  и следующие конструкции:

$$(3.4) \quad R(t, y, u) = \varphi(t+1, f(t, y, u)) - \varphi(t, y) - f^0(t, y, u),$$

$$(3.5) \quad G(N, y) = \varphi(N, y) + F(N, y),$$

$$(3.6) \quad L = G(N, y) - \sum_{t=0}^{N-1} R(t, y, u) - \varphi(0, y_0),$$

$$(3.7) \quad l = \min_{y_{r+1}, \dots, y_n} G(N, y) - \sum_{t=0}^{N-1} \max_{y, u} R(t, x, u) - \varphi(0, y_0).$$

Справедливы следующие утверждения [7].

*Лемма 1.*  $\forall \varphi \in \Pi$ :

1)  $L(y, u) = J(y, u)$ , если  $(y, u) \in D$ ,

2)  $l(\varphi) \leq d$ .

*Теорема 1.* Если  $(\bar{y}, \bar{u}) \in D$  и  $\bar{\varphi} \in \Pi$  такие, что  $L(\bar{\varphi}, \bar{y}, \bar{u}) = l(\bar{\varphi})$ , то  $J(\bar{y}, \bar{u}) = \min J(y, u) \equiv d = l(\bar{\varphi}) = \max_{\Pi} l(\varphi)$ .

Процесс  $(\bar{y}, \bar{u})$ , удовлетворяющий условиям теоремы, называется оптимальным. Для его отыскания будем строить последовательность  $\{\varphi_s\} \in \Pi$  начиная с производной  $\varphi_0$ , на которой  $l(\varphi_s) \rightarrow \max_{\Pi} l(\varphi)$ .

Будем искать  $\varphi_{s+1}$  в виде

$$(3.8) \quad \varphi_{s+1}(t, y) = \varphi_s(t, y) + \lambda_s \gamma_s(t, y),$$

где  $\lambda_s > 0$ ,  $\gamma_s(t, y)$  – подлежащие определению скаляр и функция.

Определим функционал вида

$$(3.9) \quad \delta_s(y, u) = \gamma_s(N, b) - \sum_{t=0}^{N-1} [\gamma_s(t+1, f(t, y, u)) - \gamma_s(t, y)] - \gamma_s(0, y_0),$$

который можно переписать следующим образом:

(3.10)

$$\delta_s(y, u) = \sum_{t=1}^N [\gamma_s(t, y) - \gamma_s(t, y(t) - z(t-1))] + \sum_{t_1=0, t_2=N} \gamma_s(t, y) \Big|_{t=t_k-0}^{t=t_k+0},$$

где  $z(t) = y(t+1) - f(t, y, u)$ .

Для разности  $\Delta l = l_s(\lambda) - l_s$  можно показать, что

$$(3.11) \quad \Delta l_s(\lambda) = \lambda \delta_s(y(t), u(t)) + \{L_s(y(t), u(t)) - l_s\},$$

где  $(y(t), u(t)) \in \bar{E}_s(\lambda)$ . Из уравнений (3.6), (3.7) следует неотрицательность второго слагаемого в формуле (3.11).

Элементарная операция улучшения функции  $\varphi_s(t, y)$  состоит в построении  $\varphi_{s+1}(t, y)$  в виде зависимости (3.8), где  $\lambda_s > 0$  и  $\gamma_s$  выбираются произвольно, так чтобы

$$(3.12) \quad \delta_s(y, u) > 0$$

хотя бы при одном значении  $(y, u) \in \bar{E}_{s+1} = \bar{E}_s(\lambda_s)$ .

Из выражения (3.11) непосредственно следует, что элементарная операция (3.8) удовлетворяет неравенству

$$(3.13) \quad \Delta l_s = l_{s+1} - l_s > 0,$$

поэтому может использоваться для построения улучшающей последовательности  $\{(y_s, u - s)\} : l_s \rightarrow d$ .

### *3.2. Применение двойственного глобального метода к решению выпуклой задачи квадратичного программирования с сепарабельным функционалом*

С учетом специфики данных задач для решения их описанным выше итерационным методом [7] необходимо провести их декомпозицию и представить в виде дискретной задачи оптимального управления вида (3.1), (3.2).

Рассмотрим ЗКП следующего вида [12]:

$$(3.14) \quad J(u) = \sum_{h=1}^N (c_h^1 u_h^2 + c_h^0 u_h) \longrightarrow \min_u,$$

$$(3.15) \quad \sum_{h=1}^N c_{ih} u_h = b_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$(3.16) \quad u_h^{\min} \leq u_h \leq u_h^{\max}, \quad h = \overline{1, N},$$

$\|C_{ih}\|, b_i, C_h^1 > 0, C_h^0, u_h^{\min}, u_h^{\max}$  — заданные величины.

Она является выпуклой задачей квадратичного программирования с сепарабельным функционалом<sup>1</sup>. В данном случае функционал представлен многочленом.

Задачу (3.14)–(3.16) можно представить в форме эквивалентной задачи оптимизации многошагового процесса с одномерным аргументом  $t = \overline{0, N}$ , скалярным управлением  $u_t$  и состоянием  $x_t \in R^n$ :

$$(3.17) \quad J(u) = \sum_{t=1}^{N-1} (c_t^1 u_t^2 + c_t^0 u_t) \longrightarrow \min_u,$$

$$(3.18) \quad x_i(t+1) = x_i(t) + c_i(t) u_t, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{0, N-1},$$

$$(3.19) \quad x_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_i(N) = b_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$(3.20) \quad u_t \in U = \{u_t : u_t^{\min} \leq u_t \leq u_t^{\max}\}.$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся двойственным методом оптимизации многошаговых процессов.

Зададим функцию  $u(t, x)$  в линейном виде

$$(3.21) \quad \varphi(t, x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) x_i$$

и определим для нее конструкции (3.24) и (3.25)

$$(3.22) \quad R(t, x, u) = \sum_{i=1}^n [\psi_i(t+1) - \psi_i(t)] x_i + \\ + \left[ \sum_{i=1}^n \psi_i(t+1) c_i(t) - c_t^0 \right] u_t - c_t^1 u_t^2,$$

$$(3.23) \quad G(N, x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(N) x_i = \sum_{i=1}^n \psi_i(N) b_i.$$

Пояснение:

$$\begin{aligned} R(t, x, u) &= \psi(t+1, f(t, x, u)) - u(t, x) - f^0(t, x, u) = \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i(t+1) [x_i + c_i(t) u(t)] - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) x_i - [c_t^1 u_t^2 + c_t^0 u_t] = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i [\psi_i(t+1) - \psi_i(t)] + \left[ \sum_{i=1}^n \psi_i(t+1) c_i(t) - c_t^0 \right] - u^2(t) c_t^1. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Многочлен  $f(x)$  называется сепарабельным, если его неприводимые множители не имеют кратных корней.

Условие существования максимума по  $x$  и функции  $R(t, x, u)$  накладывает на  $\varphi \in \Pi$  следующие условия (3.24), (3.26):

$$(3.24) \quad \psi_i(t+1) - \psi_i(t) = 0, \text{ т.е. } \psi_i(t+1) = \psi_i(t) - \psi_i = \text{const.}$$

Пояснение:

Данное положение вытекает из необходимого условия максимума

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \psi_i(t+1) - \psi_i(t) = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial R}{\partial u} &= -2c_t^1 u + \sum_{i=1}^n \psi_i(t+1) c_i(t) - c_t^0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом функция  $R$  не зависит от  $x$ :

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \bar{u}_t &= \begin{cases} u_t^{\min}, & \tilde{u} \leq u_t^{\min}, \\ \tilde{u}_t, & u_t^{\min} < \tilde{u}_t < u_t^{\max}, \\ u_t^{\max}, & \tilde{u}_t \geq u_t^{\max}, \end{cases} \\ \tilde{u}_t &= \frac{\sum_{i=1}^n \psi_i c_i(t) - c_t^0}{2c_t^1}. \end{aligned}$$

Это также вытекает из необходимого условия максимума (см. выше).

Двойственный функционал (3.27) будет следующего вида:

$$(3.27) \quad l(\psi) = \sum_{i=1}^n \psi_i b_i - \sum_{t=0}^{N-1} \{ [\psi_i c_i(t) - c_t^0] \bar{u}_t(\psi) - c_t^1 \bar{u}_t^2(\psi) \}.$$

Ставится задача:

$$\begin{cases} l(\psi) \rightarrow \max_{\psi}, \\ \sum_{h=1}^N c_{ih} u_h = b_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Функцию  $\gamma$  будем задавать в соответствии с (3.21) и (3.23):

$$(3.28) \quad \gamma(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \nu_i x_i.$$

Тогда функция  $\delta_s$  примет вид

$$(3.29) \quad \delta_s(\mathbf{x}, u) = \sum_{i=1}^n \nu_i \left( b_i - \sum_{t=0}^{N-1} c_i(t) \tilde{u}_t \right).$$

Пояснение:

$$\begin{aligned}
\delta_s(x, u) &= \sum_{t=1}^N [\gamma_s(t, x) - \gamma_s(t, x(t) - z(t-1))] + \sum_{t_1=0} \gamma_s(t, x) \Big|_{t=t_k-0}^{t=t_k+0} = \\
&= \gamma_s(N, b) - \sum_{t=0}^{N-1} [\gamma_s(t+1, f(t, x, u)) - \gamma_s(t, x)] - \gamma_s(0, x_0) = \\
&= \gamma_s(N, b) - \left\{ \gamma_s(1, f(0, x, u)) - \gamma(0, x) + \gamma_s(2, f(1, x, u)) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_s(1, x) + \dots + \gamma_s(N, f(N-1, x, u)) - \gamma_s(N-1, x) \right\} - \gamma_s(0, x_0) - \\
&\quad - \{ \dots \} = +\gamma_s(0, x) - \gamma_s(N, x) = \\
&= \gamma_s(N, b) - \gamma_s(N, x) + \gamma_s(0, x) - \gamma_s(0, x_0) = \\
&= \sum_{i=1}^n \nu_i b_i - \sum_{i=1}^n \nu_i \sum_{t=0}^{N-1} c_i(t) \bar{u}_t + 0 - \sum_{i=1}^n \nu_i 0 = \\
&= \sum_{i=1}^n \nu_i \left( b_i - \sum_{t=0}^{N-1} c_i(t) \bar{u}_t \right).
\end{aligned}$$

Для того чтобы выполнялось условие элементарной операции, т.е. для обеспечения  $\delta_s > 0$ , положим

$$(3.30) \quad \nu_i = b_i - \sum_{t=0}^{N-1} c_i(t) \bar{u}_t.$$

Таким образом, можем записать следующий алгоритм построения минимизирующей последовательности:

1 шаг: Задаемся произвольными значениями  $\psi_i^0$ .

2 шаг:  $\psi_i^{s+1} = \psi_i^s + \lambda_s \nu_i^s$ , где

$$\begin{aligned}
\lambda_s &= \operatorname{argmax}_{\lambda > 0} l_{s+1}(\lambda) \\
l_{s+1}(\lambda) &= l(\psi^{s+1}) = l(\psi^s + \lambda \nu^s).
\end{aligned}$$

3 шаг: Если  $l_{s+1} - l_s < \varepsilon$ , то выход из алгоритма, иначе переход ко второму шагу.

### 3.3. Построение численного алгоритма прогнозирования. Декомпозиция задачи

Декомпозиционными или блочными принято называть такие методы решения оптимизационной задачи, которые связаны с анализом составляющих ее подзадач [17].

Членение на подзадачи осуществляется до начала процесса решения, причем, как правило, выбор метода декомпозиции существенно зависит от этого

членения. Метод членения обычно реализуется в виде последовательности итераций, на каждой из них производится независимый анализ отдельных подзадач при фиксированных значениях параметров, связывающих подзадачи. От итерации к итерации значения этих параметров пересчитываются [18].

Обычно декомпозиционные методы приспособлены либо к вертикальному, либо к горизонтальному членению задачи. В первом случае каждая подзадача охватывает все ограничения и часть переменных общей задачи, во втором — имеет место двойственная ситуация: отдельные блоки включают все переменные и некоторые ее ограничения. Также существуют методы, которые допускают одновременное использование вертикального и горизонтального членения задачи, как например, метод, предложенный в [19].

В целевых функциях алгоритмов прогнозирования (2.16) и (2.17)–(2.24) матрицы квадратичной формы помимо диагональных членов содержат также коэффициенты при смешанных произведениях  $r_i \cdot s_j$ . Для того, чтобы избавиться от них и привести задачу к ЗКП с сепарабельным функционалом, проведем декомпозицию: будем попеременно фиксировать один из векторов  $r_i$  и  $s_j$  и решать последовательность задач  $\{\text{ЗКП}_p^1(r), \text{ЗКП}_p^2(s)\}$ :

1. Шаг 0. Задаем произвольно  $\bar{u}_j^0, j = \overline{1, N}$ ;  $\{\bar{\psi}^0\}$ .
2. Шаг  $p$ . Решаем последовательно две задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ЗКП}_p^1: \text{управление} - u_i^p = r_i, s_j = \bar{u}_j^{p-1} = \text{fixe}, l_s^p \xrightarrow{\psi_s^p} \max, \psi_0^p = \bar{\psi}^{p-1}; \\ \text{ЗКП}_p^2: \text{управление} - u_j^{p+1} = s_j, r_i = \bar{u}_i^p = \text{fixe}, l_s^{p+1} \xrightarrow{\psi_s^{p+1}} \max, \psi_0^{p+1} = \bar{\psi}^p. \end{array} \right.$$

3.  $l(\bar{\psi}^{p+1}) - l(\bar{\psi}^{p-1}) < \epsilon$ , то выход; иначе переход к п. 2.

Несмотря на то, что максимум двойственного функционала  $l^p$  в каждой из задач  $\text{ЗКП}_p^1, \text{ЗКП}_p^2$  не обеспечивает строгого выполнения ограничений — равенств (уравнений процесса), для сходимости описанной итерационной процедуры достаточно, чтобы для любого  $p$  выполнялось  $U^p = \{u^p : u^{\min}(\bar{u}^{p-1}) \leq u^p \leq u^{\max}(\bar{u}^{p-1})\} \neq 0$ . Тогда будет иметь место улучшение  $l^p(\psi), \forall p$ , что в силу построения алгоритма и обеспечивает сходимость.

Далее рассмотрим применение данной итеративной декомпозиционной схемы для решения задач в данной модели (очевидно, что задачи (2.13) и (2.14) тривиально записываются в виде (3.14)–(3.16) и не требуют декомпозиции):

Задача (2.16)

$\text{ЗКП}_p^1$ : Запишем задачу в терминах постановки (3.14)–(3.16):

$$u_h = r_i \quad (h = i = \overline{1, N}), \quad s_j - \text{fixe} \quad (N = n - \text{число отраслей}).$$

$$(3.31) \quad c_h^1 = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^k [\mathbf{a}_{hj}^0 \mathbf{f}_h(t_l)]^2, \quad h = \overline{1, N};$$

$$(3.32) \quad c_h^0 = 2 \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^k [\mathbf{a}_{hj}^0 (1 + s_j \mathbf{g}_j(t_l)) - \mathbf{a}_{hj}(t_l)] \mathbf{a}_{hj}^0 \mathbf{f}_j(t_l), \quad h = \overline{1, N};$$

$$(3.33) \quad c_{ih} = \begin{cases} \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_{hj}^0 \right) \mathbf{f}_h(t) \mathbf{x}_h \cdot \delta_{ih}, & i = \overline{1, N} \text{ (}\delta_{ih} \text{ – символ Кронекера);} \\ \mathbf{a}_{hi-N}^0 \cdot \mathbf{f}_h(t), & i = \overline{N+1, 2N}, h = \overline{1, N}; \end{cases}$$

$$(3.34) \quad b_i = \begin{cases} \alpha_i \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_{ij}^0 (1 + s_j \mathbf{g}_j(t)) \mathbf{x}_j, & i = \overline{1, N}; \\ \beta_{i-N} - \left[ \sum_m^N \mathbf{a}_{m-i-N}^0 \right] (1 + s_{i-N} \mathbf{g}_{i-N}(t)), & i = \overline{N+1, 2N}; \end{cases}$$

$$(3.35) \quad u_h^{\min} = \max_{j, \mathbf{f}_h(t) \neq 0} \left\{ \frac{\mathbf{a}_{hj}(t) - \mathbf{a}_{hj}^0 \cdot (1 + s_j \mathbf{g}_j(t))}{\mathbf{f}_h(t)} \right\}, \quad h = \overline{1, N};$$

$$(3.36) \quad u_h^{\max} = \min_{j, \mathbf{f}_h(t) \neq 0} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{a}}_{hj}(t) - \mathbf{a}_{hj}^0 \cdot (1 + s_j \mathbf{g}_j(t))}{\mathbf{f}_h(t)} \right\}, \quad h = \overline{1, N}.$$

ЗКП<sub>p</sub><sup>2</sup>:  $u_h = s_j$  ( $h = j = \overline{1, N}$ ),  $r_i$  – *fixe*.

$$(3.37) \quad c_h^1 = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^k [\mathbf{a}_{ih}^0 \mathbf{g}_h(t_l)]^2, \quad h = \overline{1, N};$$

$$(3.38) \quad c_h^0 = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^k [\mathbf{a}_{ih}^0 (1 + r_i \mathbf{f}_i(t_l)) - \mathbf{a}_{ih}(t_l)] \mathbf{a}_{ih}^0 \mathbf{g}_h(t_l), \quad h = \overline{1, N};$$

$$(3.39) \quad c_{ih} = \begin{cases} \mathbf{a}_{ih}^0 \mathbf{g}_h(t) \mathbf{x}_h, & i = \overline{1, N}; \\ \left( \sum_{m=1}^N \mathbf{a}_{mh}^0 \right) \mathbf{g}_h(t) \cdot \delta_{i-N, h}, & i = \overline{N+1, 2N}, h = \overline{1, N}; \end{cases}$$

$$(3.40) \quad b_i = \begin{cases} \alpha_i \mathbf{x}_i - \left[ \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_{ij}^0 \mathbf{x}_j \right] (1 + r_i \mathbf{f}_i(t)), & i = \overline{1, N}; \\ \beta_{i-N} - \sum_{m=1}^N \mathbf{a}_{m, i-N}^0 (1 + r_m \mathbf{f}_m(t)), & i = \overline{N+1, 2N}; \end{cases}$$

$$(3.41) \quad u_h^{\min} = \max_{i, \mathbf{g}_h(t) \neq 0} \left\{ \frac{\mathbf{a}_{ih}(t) - \mathbf{a}_{ih}^0 \cdot (1 + r_i \mathbf{f}_i(t))}{\mathbf{g}_h(t)} \right\}, \quad h = \overline{1, N};$$

$$(3.42) \quad u_h^{\max} = \min_{i, \mathbf{g}_h(t) \neq 0} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{a}}_{ih}(t) - \mathbf{a}_{ih}^0 \cdot (1 + r_i \mathbf{f}_i(t))}{\mathbf{g}_h(t)} \right\}, \quad h = \overline{1, N}.$$

Задача (2.17)–(2.24)

Декомпозиция данной задачи также основана на попеременном фиксировании одного из векторов  $r_i, s_j$ . Однако управление  $u_h$  здесь имеет для каж-



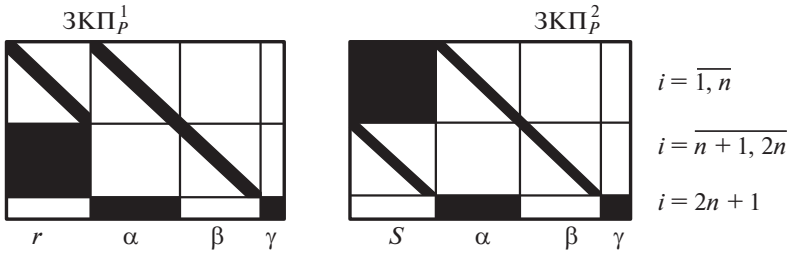


Рис. 4. Представление задач в соответствии с компонентами управления  $u_h = (r, \alpha, \beta, \gamma)$ ,  $h = \overline{1, N}$ .

дой частной задачи не  $n$ , а  $N = 3n + 1$  компонент:  $\text{ЗКП}_p^1 : u_h = \{r_i, v_i, w_j, u\}$ ,  $\text{ЗКП}_p^2 : u_h = \{s_j, v_i, w_j, u\}$ .

Структура матрицы системы линейных ограничений  $c_{ih}$  имеет вид, показанный на рис. 4, где изображен вариант, когда вместо ограничения (2.22) записано эквивалентное уравнение  $\sum_{i=1}^n v_i x_i = u$  ( $n$  — общее число отраслей в модели).

Формулы для коэффициентов  $c_h^1, c_h^0, c_{ih}, b_i, \alpha_h, \beta_h$  в данной задаче в отношении первой составляющей переменной управления  $u_h$ :  $r_i$  или  $s_j$  совпадают с приведенными выше выражениями.

Остальные элементы перечисленных векторов и матрицы коэффициентов, соответствующие компонентам  $v_i, w_j, u$  управления  $u_h$  одинаковы для обеих задач  $\text{ЗКП}_p^1, \text{ЗКП}_p^2$  и могут быть легко записаны непосредственно исходя из формулировки задачи (2.17)–(2.24).

### 3.4. Реализация и функционирование алгоритма

Описанный выше декомпозиционный алгоритм инвариантен относительно вида теоретической зависимости для  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t)$  в рамках класса линейных двухпараметрических функций времени вида

$$(3.43) \quad \hat{\mathbf{a}}_{ij} = \sigma_{ij}^1 \mathbf{f}_{ij}(t) + \sigma_{ij}^0 \mathbf{g}_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, помимо рассмотренной аддитивной формулы (2.15) можно использовать различные кривые роста типа (3.43), применяемые обычно в одномерном прогнозировании. Несмотря на существенное увеличение при этом количества оцениваемых параметров (вместо  $2n$  переменных  $r_i, s_j - 2n^2$  переменных  $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^0$ ), можно предположить, что быстродействие алгоритма практически не ухудшится. Это следует из того, что при декомпозиции  $\sigma_{ij}^1$  либо  $\sigma_{ij}^0$  становятся значениями управляющей переменной  $u_h$  при  $h = i(n-1) + j$ ;  $h = \overline{1, N}$ ;  $N = n^2 + 2n + 1$ , а сложность задачи (3.17)–(3.18) зависит не от  $N$ , а от размерности фазового вектора  $y$ , т.е. от общего числа ограничений-равенств. Если также учесть в реализации алгоритма сильную разреженность матрицы  $c_{ih}$ , то можно сократить вычислительные затраты при суммировании по  $h = \overline{1, N}$  в несколько раз.

Что касается способов конкретизации зависимости (2.15), то функции  $f_i(t)$  и  $g_j(t)$ , которые должны отражать динамику окаймлений [16], можно непо-

средственно задавать в виде относительных темпов прироста соответствующих долей  $v_i$ , и  $w_j$ :

$$(3.44) \quad f_i(t_1) = \frac{v_i(t_1) - v_i(t_0)}{v_i(t_0)}, \quad g_j(t_1) = \frac{w_j(t_1) - w_j(t_0)}{w_j(t_0)}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, k}.$$

В задаче (2.17)–(2.24) для  $t_1 = t$  величины  $v_i, w_j$  в (3.44) следует заменить на их частные прогнозы  $\hat{v}_i(t), \hat{w}_j(t), \hat{u}(t)$  и априорных ограничений  $\underline{v}_i(t), \bar{v}_i(t), \underline{w}_j(t), \bar{w}_j(t), u(t), \bar{u}(t)$ . В системе предусмотрены два способа.

1. Частные прогнозы определяются из рекуррентных формул

$$\hat{v}_i(t) = (1 + \delta_{v_i}) v_i(t-1), \quad \hat{w}_j(t) = (1 + \delta_{w_j}) w_j(t-1), \quad \hat{u}(t) = (1 + \delta_u) u(t-1),$$

где темпы прироста  $\delta_{v_i}, \delta_{w_j}, \delta_u$  задаются пользователем, так же как и динамика априорных ограничений. Для формирования последних предусмотрено несколько видов кривых роста.

2. Частные прогнозы строятся с помощью подбора временных зависимостей из заданного набора путем оценивания параметров по рядам статистических наблюдений. Найденные параметры затем пользователь может корректировать для задания требуемых тенденций в прогнозном периоде. Ограничения в данном случае формируются в виде «трубки»:

$$\begin{aligned} \hat{v}_i(1 - \Delta_{v_i}) &\leq \hat{v}_i \leq \hat{v}_i(1 + \Delta_{v_i}), \\ \hat{w}_j(1 - \Delta_{w_j}) &\leq w_j \leq \hat{w}_j(1 + \Delta_{w_j}), \\ \hat{u}(1 - \Delta_u) &\leq u \leq \hat{u}(1 + \Delta_u) \end{aligned}$$

с заданными величинами допустимых относительных отклонений  $\Delta_{v_i}, \Delta_{w_j}$ , и  $\Delta_u$ .

Аналогично можно двумя способами формировать ограничения на  $\mathbf{a}_{ij}$ .

1. Строятся частные прогнозы  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t)$ , например, в виде уравнения (3.43), и тогда

$$\underline{\mathbf{a}}_{ij}(t) = (1 - \Delta_{ij}) \hat{\mathbf{a}}_{ij}(t), \quad \bar{\mathbf{a}}_{ij}(t) = (1 + \Delta_{ij}) \hat{\mathbf{a}}_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

При решении задач согласования происходит уточнение параметров  $\sigma_{ij}^1$ ,  $\sigma_{ij}^0$  зависимости (3.43). Отметим, что для эффективного построения функций (3.43) требуется представительная динамика отчетных матриц  $\{\mathbf{a}_{ij}(t_1)\}$ ,  $l = \overline{1, K}$ , где  $K \geq 15 - 20$ .

2. В случае отсутствия длинных статистических рядов  $\{\mathbf{a}_{ij}(t)\}$  можно предложить в качестве частных прогнозов брать рекуррентные зависимости  $\hat{\mathbf{a}}_{ij}(t) = (1 + \delta_{\mathbf{a}_{ij}}) \mathbf{a}_{ij}(t-1)$  и строить «трубку» ограничений с помощью допустимых отклонений  $\Delta_{ij}$ .

Для наиболее важных коэффициентов прямых затрат (их доля не превышает 20%) можно жестко фиксировать плановые значения  $\mathbf{a}_{ij}(t)$ , т. е.  $\Delta_{ij} = 0$ .

В процессе функционирования алгоритма пользователь помимо указанных экзогенных величин может управлять параметрами работы алгоритма  $\theta_a, \theta_y, \theta_w, \theta_u, \{\varepsilon_j\}$  для достижения требуемой точности и обеспечения сходимости и совместности решаемой задачи.

#### 4. Заключение

На основе метода глобального улучшения В.Ф. Кротова в работе предложен вычислительный алгоритм для численного прогнозирования матрицы  $\mathbf{A}(t)$  прямых затрат в рассмотренной динамической модели межотраслевого баланса.

В описанных процедурах прогнозирования сочетается возможность экспертно-аналитического формирования частных прогнозов показателей промежуточного потребления с учетом требования их сбалансированности и согласования со статической и модельной информацией. Данный подход позволяет моделировать достаточно широкий спектр технологических изменений в структуре материального производства.

Декомпозиция алгоритмов прогнозирования и применение для решения задач квадратичного программирования (ЗКП) с выпуклым сепарабельным функционалом двойственного метода оптимизации многошаговых процессов [7], основанного на операции улучшения функции Кротова, дает возможность существенно увеличить быстродействие алгоритмов по сравнению с использованием стандартных программ решения ЗКП общего вида.

Исследования, изложенные в данной статье, были начаты во время работы автора в Институте проблем управления (ИПУ) РАН имени В.А. Трапезникова в лаборатории 45 под руководством В.Ф. Кротова. Автор признателен сотрудникам лаборатории А.Г. Александрову, О.В. Моржину и Л.А. Селивановой за обсуждение результатов и помощь в работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leontief W.W.* Input-Output Economics. 2nd Ed. N.Y.: Oxford Univer. Press, 1986.
2. Оптимальное управление природно-экономическими системами / Под ред. В.И. Гурмана, А.И. Москаленко. Новосибирск: Наука, 1980.
3. *Кротов В.Ф.* Исследование нелинейных оптимизационных моделей развития многоотраслевой экономики. Ч. I–III // *Авт.* 1981. № 10. С. 129–136; № 11. С. 114–123; 1982. № 1. С. 114–122.  
*Krotov V.F.* Investigation of Nonlinear Optimization Models of Growth in a Multisectoral Economy. I–III // *Autom. Remote Control.* 1981. V. 42. No. 10. P. 1385–1391; No. 11. P. 1524–1531; 1982. V. 43. No. 1. P. 91–98.
4. Эколого-экономическая стратегия развития региона / Под ред. В.И. Гурмана. Новосибирск: Наука, 1990.
5. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. М.: Наука, 2003.
6. *Proops J., Safonov P.* Modeling in Ecological Economics / Edward Elgar Publ. U.K., 2004.
7. *Кротов В.Ф.* Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнений I, II // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1975. № 5, № 6.
8. *Кротов В.Ф., Фельдман Н.Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1983. № 2. С. 160–168.
9. *Krotov V.F.* Global Methods in Optimal Control Theory. N.Y.: Marcel Dekker, 1996.

10. *Гурман В.И., Матвеев Г.А., Трушкова Е.А.* Социо-эколого-экономическая модель региона в параллельных вычислениях / Управление большими системами. Сб. тр. Вып. 32. М.: ИПУ РАН, 2011. С. 109–130.
11. *Расина И.В., Блинов А.О., Гусева И.С.* Магистралы в задаче оптимизации стратегии развития региона на многокомпонентной модели // Вест. Бурят. гос. ун-та. Сер. 9. Математика и информатика. 2011. С. 36–42.
12. *Сафонов П.И.* Алгоритм прогнозирования прямых затрат в динамической модели межотраслевого баланса / Вопросы создания АСПР. Применение экономико-математических методов в перспективном планировании. Сб. научн. трудов ГВЦ Госплана СССР. М.: 1988. Вып. 87. С. 118–138.
13. *Николаева И.Г., Новикова Т.А.* Метод статистического прогнозирования прямых затрат / Прикладные задачи экономического моделирования. Вып. 13. М.: ВНИИСИ, 1984.
14. *Николаева И.Г.* Анализ и прогноз межотраслевых связей. М.: Экономика, 1981.
15. *Stone R., Brown J.A.C.* A Long-Term Growth Model of the British Economy // Eur. Future Figures. Amsterdam, 1962.
16. *Седелев Б.В., Журавлева Л.В.* Сбалансированный прогноз структурно-динамических компонент макроэкономических процессов. Прикладные задачи экономического моделирования / Сб. тр. ВНИИСИ. М., 1984. Вып. 13. С. 87–95.
17. *Ляшенко И.Н. и др.* Агрегирование и декомпозиция в моделях народнохозяйственного планирования. Киев: Знание, 1980.
18. *Овсеенко О.А., Шемякина Т.Ю.* Методы декомпозиции процессов управления. М.: МИУ, 1986.
19. *Гольштейн Е.Г.* Метод декомпозиции задач линейного и выпуклого программирования / Экономика и мат. методы. М., 1985. Вып. 6. Т. 21.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрустальевым.*

Поступила в редакцию 14.02.2017

После доработки 25.07.2018

Принята к публикации 08.11.2018