

# Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2019 г. А.Н. КАРКИЩЕНКО, д-р физ.-мат. наук (karkishalex@gmail.com)  
(Научно-конструкторское бюро робототехники и систем управления, Таганрог)

## ОБ ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ СЦЕНЫ ПО ОДНОМУ И ДВУМ ЛОКАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ<sup>1</sup>

Рассматривается задача формальной оценки сложности сцены с многочисленными препятствиями, на которой перемещаются подвижные объекты. Предполагается, что имеется лишь ограниченная информация о расположении препятствий в небольшой части сцены, получаемая сенсорными системами одного или нескольких объектов. Доказываются верхние и нижние оценки сложности сцены при одном и двух наблюдениях локальных областей.

*Ключевые слова:* подвижный объект, сцена, триангуляция, локальная сложность, интегральная сложность, оценка сложности.

**DOI:** 10.1134/S0005231019080105

### 1. Введение

В настоящее время активно изучаются и разрабатываются методы управления поведением автономных подвижных объектов в сложных средах с большим количеством разнородных препятствий [1, 2]. Экспериментально установлено [3], что выбор стратегий для планирования движения объектов существенно зависит от интуитивно понимаемой сложности среды функционирования. В простых средах можно использовать классические методы планирования. Описание ряда таких методов, основанных на решении задач управления подвижным объектом по его полной модели по уравнениям динамики и кинематики и по уравнениям кинематики, можно найти, например, в [4]. Однако в сложных средах эффективными оказываются методы, основанные на интеллектуальных технологиях, а также комплексное использование разных методов. Понятие сложности среды на сегодняшний день во многом является интуитивным, что не позволяет формализовать процедуру выбора того или иного подхода к планированию движения объектов. В связи с этим необходимо иметь количественно измеримый показатель, характеризующий сложность среды функционирования подвижного объекта, позволяющий обоснованно выбирать наиболее подходящий метод планирования.

В ряде публикаций, например, [5–8] рассматриваются подходы к определению сложности сцен с точки зрения визуальной видимости образующих ее поверхностей, даются оценки сложности полигональных сцен, вводится понятие сложности видимой части трехмерной сцены в зависимости от точки

---

<sup>1</sup> Работа была выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-19-00621).

наблюдения и разрабатываются методы оценки видимой сложности сцены при анимации. Однако эти методы порождены задачами машинной графики и имеют слабое отношение к оценке сложности, которая содержательно характеризует особенности перемещения в среде подвижных объектов.

В [9] рассмотрена задача формального определения сложности среды функционирования подвижного объекта, перемещающегося на плоскости. На основе физически интерпретируемой величины, характеризующей возможность прохождения среды с препятствиями, построена нормированная локальная мера сложности в секторе обзора системы технического зрения, зависящая от расположения цели, к которой должно осуществляться движение. Введена интегральная мера сложности сцены, не зависящая от положения цели, но характеризующая сложность среды при фиксированном положении подвижного объекта. Представляется, что описанный в [9] подход в достаточной степени соответствует физическому смыслу интуитивно понимаемой сложности среды, в которой происходит выполнение задач автономными подвижными объектами.

С содержательной точки зрения данная статья посвящена оценке сложности плоской среды (*сцены*) на основе данных систем технического зрения совокупности автономных объектов. Неформальная постановка задачи состоит в следующем. Подвижные объекты независимо перемещаются на плоской поверхности, выполняя стоящие перед ними задачи. Объекты обладают сенсорной системой, позволяющей наблюдать некоторый участок сцены; с помощью специального алгоритма каждый объект может вычислить сложность этого участка в смысле безопасной проходимости (при наличии препятствий) между любыми двумя точками наблюдаемого участка. По совокупности таких локальных сложностей необходимо провести обоснованные оценки априори неизвестной сложности всей сцены. Другими словами, возникает задача уточнять сведения о сложности сцены непосредственно в процессе функционирования группы объектов с помощью средств, имеющихся на борту каждого из объектов.

Способ вычисления сложности наблюдаемого участка был описан ранее в [9] и кратко излагается далее. В общем случае сложность можно рассматривать как функцию множества, определенную на всех возможных подмножествах сцены. Свойства такой функции во многом зависят от ее конкретного определения. В данной статье сложность интерпретируется как степень свободы, с которой объект может попасть в произвольную целевую точку сцены.

Прожодимость при наличии препятствий — нелокальное свойство, что затрудняет анализ и построение вычислительно эффективных методов расчета. Это можно пояснить следующими рассуждениями. Если имеется некоторая область на сцене, то ее интегральную проходимость нельзя точно вычислить лишь на основе анализа картины препятствий внутри этой области. Действительно, может существовать большое количество возможных путей частично или полностью проходящих за пределами анализируемой области, которые не будут приняты во внимание. Поэтому для точного вычисления проходимости области необходимо иметь информацию обо всей сцене и проводить вычисления, учитывая полную картину препятствий.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся основные предположения и допущения, которые используются в данной статье. В разделе 3 вводится триангуляция Делоне сцены, строится взвешенный топологический граф триангуляции, дается конструктивное определение проходимости на сцене и приводится описание матричной процедуры вычисления проходимостей. В разделе 4 определяются понятия локальной сложности и сложностной меры для случая триангулированной сцены. В разделах 5 и 6 доказываются верхние и нижние оценки сложности сцены по известным оценкам сложности локальной области при одном и при двух наблюдениях.

## 2. Основные предположения и допущения

Будем считать, что сцена  $S$  является связной, ограниченной и выпуклой областью. Предположим также, что на сцене находится конечное количество препятствий и несколько (в частности, один) подвижных объектов. Все препятствия и объекты представляют собой круги с известными радиусами. Если препятствие не является кругом, то будем считать, что оно замещается минимальным кругом, содержащим это препятствие внутри. Поэтому размеры препятствий и объекта характеризуются одним числом – радиусом представляющего их круга. Количество, размеры и положение препятствий на сцене заранее неизвестны планирующей системе объектов. Будем предполагать также, что размеры препятствий достаточно малы в сравнении с размерами сцены.

Наблюдаемая каждым подвижным объектом часть сцены тоже является связной и выпуклой областью. Несмотря на то, что в дальнейшем никаких особых условий на форму наблюдаемой области не накладывается, можно для конкретности считать, что она представляет собой некоторый сектор, что согласуется с современными методами сканирования, например с помощью лазерных устройств. Представленные далее иллюстрации отражают именно такое понимание формы наблюдаемой области. Особо подчеркнем, что пространство за пределами наблюдаемой объектом области считается полностью ему неизвестным.

Будем предполагать, что все объекты в значительной степени автономны и могут обмениваться лишь незначительным объемом информации — координатами своего положения на сцене и точными сведениями о границах наблюдаемой области. Вместе с тем каждый из них имеет полную информацию о своей зоне наблюдения, в частности о положении всех препятствий и их геометрических характеристиках.

## 3. Триангуляция сцены. Топологический граф. Матрица проходимостей

Предположим, что известно положение всех препятствий на сцене. Рассмотрим триангуляцию Делоне [10], взяв в качестве точек (узлов) триангуляции центры препятствий. В результате получим разбиение области, лежащей внутри выпуклой оболочки центров препятствий. Триангуляция Делоне и двойственная к ней диаграмма Вороного многократно использовались и показали свою эффективность при планировании путей перемещения движущихся объектов [11–16].

Область внутри каждого треугольника, построенного в результате триангуляции, для краткости будем называть треугольником Делоне или просто треугольником. При этом важно, чтобы триангулированной оказалась вся сцена, включая области, примыкающие к границе сцены. Один из способов как это можно сделать, основанный на введении так называемых виртуальных препятствий, описан в [9].

Пусть  $s_{ПО}$  – точка, задающая текущее положение подвижного объекта на сцене, а  $s_{Ц}$  – положение цели, в которую должен попасть объект. Тогда любой путь из  $s_{ПО}$  в  $s_{Ц}$  будет пересекать некоторую последовательность треугольников Делоне. Введем топологический граф  $G = (X, U)$ , в котором множество вершин  $X$  соответствует множеству треугольников, а множество ребер  $U$  – границам ненулевой длины, соединяющим треугольники. Из этого определения следует, что граф имеет петли при каждой вершине, поскольку каждый треугольник пересекается сам с собой, следовательно, и со своими границами. В результате  $s_{ПО}$  и  $s_{Ц}$  будут отождествлены с некоторыми вершинами  $x_{ПО}$  и  $x_{Ц}$ , а соответствующий путь будет соответствовать некоторому пути на графе.

Движение вдоль каждого ребра в этом пути имеет ограничение, которое обуславливает возможность физического прохождения объекта между препятствиями. Это ограничение можно определить следующим образом. Рассмотрим два треугольника в триангуляции Делоне, которые соответствуют смежным вершинам  $x_i$  и  $x_j$  графа  $G = (X, U)$ . Поскольку вершины смежные, то по определению соответствующие треугольники имеют общую границу ненулевой длины, которая соединяет центры двух препятствий. Предположим, что положения этих препятствий задаются векторами координат своих центров, например,  $\Pi_{ij}^{(1)}$  и  $\Pi_{ij}^{(2)}$ .

Если эти препятствия имеют радиусы  $r_i$  и  $r_j$ , то для подвижного объекта радиуса  $\rho$  условие проходимости имеет вид:

$$d(x_i, x_j) = \left\| \Pi_{ij}^{(1)} - \Pi_{ij}^{(2)} \right\|_2 - r_i - r_j - 2\rho \geq 0,$$

где  $\|*\|_2$  – евклидово расстояние. Другими словами, свободное расстояние между препятствиями должно быть больше, чем диаметр подвижного объекта. Если же объект и целевая точка окажутся в одном и том же треугольнике Делоне, т.е. они окажутся отождествленными с одной и той же вершиной графа, то проходимость объекта к цели ничем не ограничена, и поэтому будем считать ее символически равной бесконечности. Указанные условия можно описать с помощью функции на ребрах графа  $w(u) = w((x_i, y_i)) = w(u_{ij}) = w_{ij}$ :

$$w_{ij} = \begin{cases} d(x_i, x_j) H[d(x_i, x_j)], & \text{если } i \neq j, \\ \infty, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где  $H(*)$  – функция Хевисайда. Таким образом,  $G = (X, U, w)$ ,  $|X| = N$ , – взвешенный граф триангуляции Делоне. Значение  $w_{ij}$  будем называть *шириной ребра*.

Пусть  $P_i = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_{l+1}}$  – некоторый путь на графе  $G$  из  $x_{\text{ПО}}$  в  $x_{\text{Ц}}$  длины  $l$ , т.е.  $x_{i_1} = x_{\text{ПО}}$ ,  $x_{i_{l+1}} = x_{\text{Ц}}$ . *Шириной пути* будем называть величину  $w(P_i) = \min_{k \in \{1, \dots, l\}} w(u_{i_k, i_{k+1}})$ , где  $u_{i_k, i_{k+1}}$  – ребро, соединяющее вершины  $x_{i_k}$  и  $x_{i_{k+1}}$ . Другими словами, ширина пути равна наименьшей ширине среди всех ребер, образующих этот путь. Пусть теперь  $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_L\}$  – множество путей, соединяющих  $x_{\text{ПО}}$  и  $x_{\text{Ц}}$ . Тогда под *проходимостью* к цели будем понимать максимальную ширину среди всех путей

$$\kappa_{x_{\text{ПО}} \rightarrow x_{\text{Ц}}} = \max_{i \in \{1, \dots, L\}} w(P_i).$$

Существует простая матричная процедура для вычисления проходимости  $\kappa_{x_{\text{ПО}} \rightarrow x_{\text{Ц}}}$ . Рассмотрим матрицу смежности  $R = (r_{ij})_{i,j=1}^N$  графа  $G = (X, U, w)$ , где

$$r_{ij} = \begin{cases} w(u_{ij}), & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежные,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица  $R$  имеет размеры  $N \times N$ , симметрична и отражает не только смежность вершин, но и определенную на ребрах графа функцию  $w(u)$ .

Определим максиминную композицию  $R^{[2]} = R \circ R$  матрицы  $R$  с собой по правилу:  $R^{[2]} = R \circ R = (r_{ij}^{(2)})$ , где  $r_{ij}^{(2)} = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} (\min(r_{ik}, r_{kj}))$ . Нетрудно понять, что  $r_{ij}^{(2)}$  равно максимальной ширине среди ширин всех путей длины 2, соединяющих вершины  $x_i$  и  $x_j$ . В частности, это означает, что существует по крайней мере один максимально “безопасный” путь длины 2 из  $x_i$  в  $x_j$ , ширина которого равна  $r_{ij}^{(2)}$ . Далее индуктивно определяем:  $R^{[3]} = R^{[2]} \circ R = (r_{ij}^{(3)})$ ,  $\dots$ ,  $R^{[n+1]} = R^{[n]} \circ R = (r_{ij}^{(n+1)})$ ,  $\dots$ . Значение  $r_{ij}^{(n)}$  равно максимальной ширине среди ширин всех путей длины  $n$ , соединяющих вершины  $x_i$  и  $x_j$ . Заметим, что для любых  $i$  и  $j$  все пути из  $x_i$  в  $x_j$  распадаются на непересекающиеся классы путей топологической длины 1, 2,  $\dots$ . При этом некоторые из этих классов могут быть пустыми. Поэтому поиск ширины наиболее безопасного пути сводится к выбору наиболее безопасного пути среди наиболее безопасных путей в каждом классе, т.е.  $\max_{k \in \{1, 2, \dots\}} r_{ij}^{(k)}$ .

Важно подчеркнуть, что, учитывая рефлексивность отношения, задаваемого графом  $G$ , для всех возможных  $i$  и  $j$  всегда будут выполняться неравенства  $r_{ij}^{(1)} \leq r_{ij}^{(2)} \leq \dots \leq r_{ij}^{(N-1)}$ . Поэтому если, например,  $x_{\text{ПО}} = x_i$ , а  $x_{\text{Ц}} = x_j$ , то  $\kappa_{x_{\text{ПО}} \rightarrow x_{\text{Ц}}} = \kappa_{ij} = r_{ij}^{(N-1)}$ . Ввиду этого матрица  $K = R^{[N-1]} = (r_{ij}^{(N-1)})_{i,j=1}^N = (\kappa_{ij})_{i,j=1}^N$  содержит ширины наиболее безопасных путей между любой парой вершин на графе  $G$ . Матрицу  $K$  будем называть матрицей проходимостей.

Для удобства записи будем обозначать операцию выбора максимума символом  $\vee$ , т.е.  $a \vee b = \max\{a, b\}$ ; этот же символ будем использовать и для матричной поэлементной операции выбора максимальных элементов, т.е. если  $A_1$  и  $A_2$  – две матрицы одинаковых размеров, то  $A_1 \vee A_2$  обозначает матрицу того же размера, каждый элемент которой равен максимальному элементу среди соответствующих элементов матриц  $A_1$  и  $A_2$ .

Свойства матриц с операциями  $\circ$  и  $\vee$  аналогичны свойствам обычных матричных операций [17], но при этом роль единичной матрицы размеров  $n \times n$  играет матрица  $I_n^{(\infty)} = \text{diag}(\infty, \infty, \dots, \infty)$ . Для двух матриц  $A$  и  $B$  одного размера будем использовать обозначение  $A \dot{\leq} B$ , если элементы в  $A$  не превосходят соответствующих элементов в  $B$ . Другими словами, символ  $\dot{\leq}$  устанавливает поэлементное отношение на матрицах. Аналогично определяется отношение  $A \dot{\geq} B$ .

#### 4. Мера локальной сложности и сложностная мера

Характеристика сцены в терминах проходимости между любыми двумя точками неудобна, поскольку она, с одной стороны, выражается в абсолютных единицах расстояния, т.е. зависит от выбранного масштаба измерений, а с другой – не является нормированной. В [9] предлагается и обосновывается выражение для меры локальной сложности, связанное с вычисляемыми проходимостями  $\kappa_{ij}$  и в то же время лишенное указанных недостатков. *Локальной мерой сложности* прохождения из  $s_i$  в  $s_j$  будем называть функцию  $\delta(s_i, s_j) = e^{-\alpha\kappa_{ij}}$ , где  $\kappa_{ij}$  – проходимость из вершины  $x_i$ , соответствующей треугольнику, содержащему точку  $s_i$ , в вершину  $x_j$ , соответствующую треугольнику, содержащему точку  $s_j$ ,  $\alpha$  – неотрицательный параметр, возможный способ вычисления которого также описан в [9].

Обозначим через  $\Xi = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  множество треугольников Делоне, которые получены в результате триангуляции. Будем обозначать через  $\sigma(T_i)$  меру (площадь) треугольника  $T_i$ , через  $\sigma(B)$  – меру области  $B = T_i \cup T_j \cup \dots$ , составленной из нескольких треугольников. Если треугольникам  $T_1$  и  $T_2$  соответствуют вершины  $x_1$  и  $x_2$  в топологическом графе, то это означает, что локальная мера сложности перемещения из любой точки  $s_1 \in T_1$  в любую точку  $s_2 \in T_2$  будет равна  $\delta(s_1, s_2) = e^{-\alpha\kappa_{12}}$ , т.е. функция постоянна на  $T_1 \times T_2$ . Тогда если  $B_1, B_2 \subseteq \Xi$ , т.е.  $B_1$  и  $B_2$  – некоторые подмножества, составленные из треугольников Делоне, то *сложностная мера* перемещения объекта из  $B_1$  в  $B_2$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta(B_1, B_2) &= \frac{1}{\sigma^2(S)} \int_{B_1} \int_{B_2} \delta(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \\ &= \frac{1}{\sigma^2(S)} \sum_{T_i \in B_1} \sum_{T_j \in B_2} e^{-\alpha\kappa_{ij}} \int_{T_i} \int_{T_j} ds_1 ds_2 = \\ &= \frac{1}{\sigma^2(S)} \sum_{T_i \in B_1} \sum_{T_j \in B_2} e^{-\alpha\kappa_{ij}} \sigma(T_i) \sigma(T_j), \end{aligned}$$

где  $\sigma(S)$  – площадь сцены, а сложность – формулой

$$\Delta(B_1, B_2) = \frac{\sigma^2(S)}{\sigma(B_1)\sigma(B_2)} \delta(B_1, B_2).$$

В частности, если  $B_1 = B_2 = \Xi$ , т.е. рассматривается мера на всей сцене, то

$$\delta(S) = \delta(\Xi) = \delta(\Xi, \Xi) = \frac{1}{\sigma^2(S)} \sum_{T_i \in \Xi} \sum_{T_j \in \Xi} e^{-\alpha\kappa_{ij}} \sigma(T_i) \sigma(T_j).$$

Данное выражение для сложностной меры можно интерпретировать как математическое ожидание локальной меры сложности всей сцены. В этом случае значение сложностной меры совпадает со значением сложности.

Выражение для сложностной меры всей сцены удобно записать в матричной форме. Для этого введем обозначения

$$\sigma = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\sigma(T_1)}{\sigma(S)} & \frac{\sigma(T_2)}{\sigma(S)} & \cdots & \frac{\sigma(T_N)}{\sigma(S)} \end{array} \right)^T,$$

где  $T$  обозначает транспонирование, и  $e^{-\alpha K} = (e^{-\alpha\kappa_{ij}})_{i,j=1}^N$ . Тогда

$$\delta(S) = \sigma^T e^{-\alpha K} \sigma.$$

Сделаем замечание относительно используемых обозначений. Поскольку множество треугольников и множество вершин графа находятся во взаимно однозначном соответствии, то удобно записывать меру множества  $B \subseteq \Xi$  как функцию от множества вершин графа  $G$ , соответствующих подмножествам в  $B$ . Другими словами, если  $B = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  – некоторое подмножество треугольников в разбиении Делоне, а  $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  – соответствующие этим треугольникам вершины топологического графа, то будем считать, что  $\sigma(\tilde{X}) = \sigma(B)$ .

## 5. Оценка сложности сцены по одному наблюдению

Выражение для сложности сцены получено в предположении, что имеется вся необходимая информация о ней, а именно форма и размеры сцены, а также положение и радиусы всех препятствий. Задача состоит в том, чтобы получить оценку сложности по отдельным наблюдениям, осуществляемым группой объектов, когда о самой сцене априори неизвестно ничего, кроме ее размеров и формы.

Рассмотрим сначала случай, когда имеется одно наблюдение. Наблюдаемую область будем называть *зоной обзора* и обозначать  $S_1$ . Предполагаем, что эта область выпуклая. В зону обзора в общем случае попадает некоторое количество препятствий –  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . Предположим, что произведена триангуляция Делоне по центрам этих препятствий. Заметим, что требование выпуклости зоны обзора гарантирует, что триангулированная область полностью лежит внутри нее. Необходимо сделать два замечания.

1. Полученная триангуляция, рассматриваемая как граф, в общем случае не будет совпадать с подграфом триангуляции Делоне всей сцены, порожденным этими же препятствиями  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . Это объясняется тем, что результат триангуляции наблюдаемых препятствий на всей сцене зависит также от расположения близких препятствий, не попавших в зону обзора подвижного объекта (например, подобный случай иллюстрируется на рис. 1).

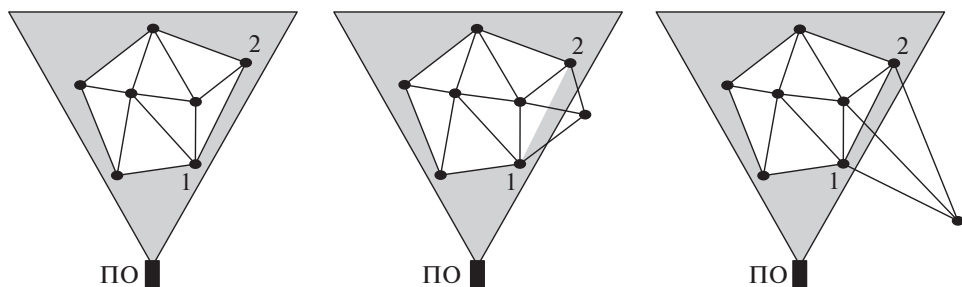


Рис. 1. На среднем рисунке отсутствует ребро (1, 2), а на правом – оно снова есть.

Поскольку информации о расположении препятствий за пределами зоны обзора нет, то учесть это обстоятельство не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что если препятствия вне зоны обзора находятся достаточно далеко от наблюдаемой области, то в этом случае триангуляция наблюдаемых вершин совпадет с соответствующим подграфом на триангуляции всей сцены. По этой причине сложности, вычисленные по графу  $G_1$  триангуляции зоны обзора и подграфу  $\tilde{G}_1$  триангуляции всей сцены, соответствующему зоне обзора, вообще говоря, не будут равны. Учет этого различия и даже обоснование тенденции изменения сложности представляется трудной задачей. Действительно, с одной стороны, появление в графе  $G_1$  дополнительных вершин и ребер увеличивает количество возможных путей, а, следовательно, может приводить к уменьшению сложности, а с другой – дополнительные вершины и ребра увеличивают размер матрицы проходимостей и, значит, могут приводить к увеличению сложностной меры. Тем не менее поскольку различия этих графов выражаются лишь в появлении некоторых граничных вершин, можно предполагать, что отличия в оценке сложности будут относительно невелики. Поэтому, допуская некоторую неточность, будем считать, что графы  $G_1$  и  $\tilde{G}_1$  структурно изоморфны и имеют одинаковые ширины соответствующих ребер.

2. Второе замечание относится к области зоны обзора, лежащей вне выпуклой оболочки триангуляции Делоне. Поскольку в данной постановке решается задача оценки сложности всей сцены по отдельным наблюдениям, а не планирование маршрута подвижного объекта, то будем игнорировать область внутри зоны обзора, лежащую за границами триангуляции.

Если окажется, что количество препятствий, попавших в зону обзора, не превосходит трех, то сложность данной области будет равна нулю. В этом случае треугольников либо нет (одно или два препятствия, либо препятствий нет), либо он один (три препятствия). В последнем случае граф состоит из одной вершины, следовательно, нетривиальных путей на нем нет. Поэтому будем считать, что количество препятствий в зоне обзора больше трех, т.е.  $k \geq 4$ .

Не теряя общности, предполагаем, что на графе всей сцены вершины занумерованы так, что треугольники, попавшие в зону обзора, занумерованы первыми и в одинаковом порядке. Рассмотрим матрицу смежности графа сцены. Учитывая предположение о нумерации, ее можно представить в блочном



виде:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

где  $R_{11}$  – матрица смежности подграфа  $G_1 = (X_1, U_1)$ , соответствующего треугольникам, попавшим в зону обзора.

Будем считать, что число вершин, не попавших в зону обзора, не меньше трех. Это значит, что размеры подматрицы  $R_{22}$  не меньше  $3 \times 3$ . По индукции нетрудно доказать следующее утверждение.

*Утверждение 1. Для любого  $k = 1, 2, \dots$  матрица  $R^{[k]}$  может быть записана в виде*

$$R^{[k]} = \begin{pmatrix} R_{11}^{[k]} \vee Z_{11}^{(k)} & Z_{12}^{(k)} \\ Z_{21}^{(k)} & Z_{22}^{(k)} \end{pmatrix},$$

где  $Z_{ij}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ , – некоторые неотрицательные матрицы.

В соответствии с матричной процедурой построения проходимостей имеем:

$$K = R^{[N-1]} = \begin{pmatrix} R_{11}^{[N-1]} \vee Z_{11}^{(N-1)} & Z_{12}^{(N-1)} \\ Z_{21}^{(N-1)} & Z_{22}^{(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Если  $N_1$  – количество вершин в подграфе  $G_1 = (X_1, U_1)$  из зоны обзора, т.е.  $|X_1| = N_1$ , то  $R_{11}^{[N-1]} = R_{11}^{[N_1-1]} = K_{G_1}$  – матрица проходимости для этого подграфа. Пусть вектор  $\sigma$  также представлен в блочном виде  $\sigma = (\sigma_1 \sigma_2)^T$ , соответствующем разбиению на блоки матрицы  $R$ . Тогда выражение для сложностной меры принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta(S) &= \sigma^T e^{-\alpha K} \sigma = \sigma_1^T e^{-\alpha (K_{G_1} \vee Z_{11}^{(N-1)})} \sigma_1 + \sigma_1^T e^{-\alpha Z_{12}^{(N-1)}} \sigma_2 + \\ &+ \sigma_2^T e^{-\alpha Z_{21}^{(N-1)}} \sigma_1 + \sigma_2^T e^{-\alpha Z_{22}^{(N-1)}} \sigma_2. \end{aligned}$$

Поскольку  $K_{G_1} \vee Z_{11}^{(N-1)} \stackrel{\bullet}{\geq} K_{G_1}$ , то  $e^{-\alpha (K_{G_1} \vee Z_{11}^{(N-1)})} \stackrel{\bullet}{\leq} e^{-\alpha K_{G_1}}$  и, следовательно, получается неравенство

$$\Delta(S) \leq \sigma_1^T e^{-\alpha K_{G_1}} \sigma_1 + \sigma_1^T e^{-\alpha Z_{12}^{(N-1)}} \sigma_2 + \sigma_2^T e^{-\alpha Z_{21}^{(N-1)}} \sigma_1 + \sigma_2^T e^{-\alpha Z_{22}^{(N-1)}} \sigma_2.$$

Здесь и иногда далее будем обозначать через  $J_{mn}$  матрицу размеров  $m \times n$ , состоящую из единиц. В частности,  $J_{1n}$  и  $J_{m1}$  – матрица-строка и матрица-столбец соответственно. В тех случаях, когда размеры матрицы  $J$  понятны из контекста, будем опускать индексы.

Поскольку сумма компонент вектора  $\sigma$  равна единице, то  $J_{1N} \sigma \sigma^T J_{N1} = \sigma^T J_{N1} J_{1N} \sigma = \sigma^T J_{NN} \sigma = 1$ . Представим  $J_{NN}$  в блочном виде:

$$J_{NN} = \begin{pmatrix} J_{N_1 N_1} & J_{N_1, N-N_1} \\ J_{N-N_1, N_1} & J_{N-N_1, N-N_1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sigma^T J_{NN} \sigma = \sigma_1^T J_{N_1 N_1} \sigma_1 + \sigma_1^T J_{N_1, N-N_1} \sigma_2 + \sigma_2^T J_{N-N_1, N_1} \sigma_1 + \sigma_2^T J_{N-N_1, N-N_1} \sigma_2 = 1.$$

Заметим теперь, что

$$\sigma_1^T J_{N_1 N_1} \sigma_1 = \sigma^2(X_1) - \text{мера зоны обзора,}$$

$\sigma_1^T J_{N_1, N-N_1} \sigma_2 = \sigma_2^T J_{N-N_1, N_1} \sigma_1 = \sigma(X_1) \sigma(X_2)$  – мера области  $X_1 \times X_2$ , наконец,

$\sigma_2^T J_{N-N_1, N-N_1} \sigma_2 = \sigma^2(X_2)$  – мера внешней области сцены по отношению к зоне обзора.

Обозначим для удобства  $\sigma^2(X_1) / \sigma^2(X) = \lambda$ . Тогда

$$\Delta(S) = \lambda \frac{\sigma_1^T e^{-\alpha K_{G_1}} \sigma_1}{\lambda} + (1 - \lambda) \frac{\sigma_1^T e^{-\alpha Z_{12}^{(N-1)}} \sigma_2 + \sigma_2^T e^{-\alpha Z_{21}^{(N-1)}} \sigma_1 + \sigma_2^T e^{-\alpha Z_{22}^{(N-1)}} \sigma_2}{1 - \lambda}.$$

Но  $\frac{\sigma_1^T e^{-\alpha K_{G_1}} \sigma_1}{\lambda}$  – это по определению сложность  $\Delta(S_1)$  области, наблюдаемой в зоне обзора. Таким образом,

$$(1) \quad \Delta(S) \leq \lambda \Delta(S_1) + (1 - \lambda) \eta(S \setminus S_1).$$

Здесь  $\eta(S \setminus S_1)$  – выражение сложностной меры остальных возможных путей перемещения объекта на сцене  $S$  за пределами наблюдаемой области  $S_1$ . С содержательной точки зрения возникновение неравенства в последнем выражении связано с необходимостью отбросить все возможные пути, ведущие из  $S_1$  в  $S_1$ , но частично или полностью проходящие за пределами зоны обзора, так как информация о таких путях полностью отсутствует. Из-за этого значение  $\eta(S \setminus S_1)$ , в принципе, может быть любым. Теоретически это позволяет рассмотреть предельные случаи заполнения внешней области  $S \setminus S_1$  препятствиями и на основании этого получить верхние и нижние границы возможных значений сложности сцены.

Оценим сверху  $\eta(S \setminus S_1)$ . Для этого предположим, что препятствий за пределами зоны обзора много и они расположены настолько близко, что проходимость между ними равна нулю. Тогда, как непосредственно следует из формулы, задающей значения функции  $w_{ij}$  на ребрах топологического графа, граф, построенный по триангуляции в области  $S \setminus S_1$ , имеет матрицу смежности  $I^{(\infty)}$  соответствующего размера. Далее потребуется следующее утверждение.

*Утверждение 2. Пусть матрица смежности графа  $G$  сцены  $S$  с числом вершин  $N$  имеет вид  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & I^{(\infty)} \end{pmatrix}$ , где  $R_{11}$  – матрица смежности графа  $G_1$  с числом вершин  $N_1$ , при этом  $N \geq N_1 + 2$ . Тогда матрица проходимостей графа  $G$  удовлетворяет неравенству*

$$K \stackrel{\bullet}{\geq} \begin{pmatrix} K_{G_1} & K_{G_1} \circ R_{12} \\ R_{21} \circ K_{G_1} & R_{21} \circ K_{G_1} \circ R_{12} \end{pmatrix},$$

где  $K_{G_1}$  – матрица проходимостей графа  $G_1$ .

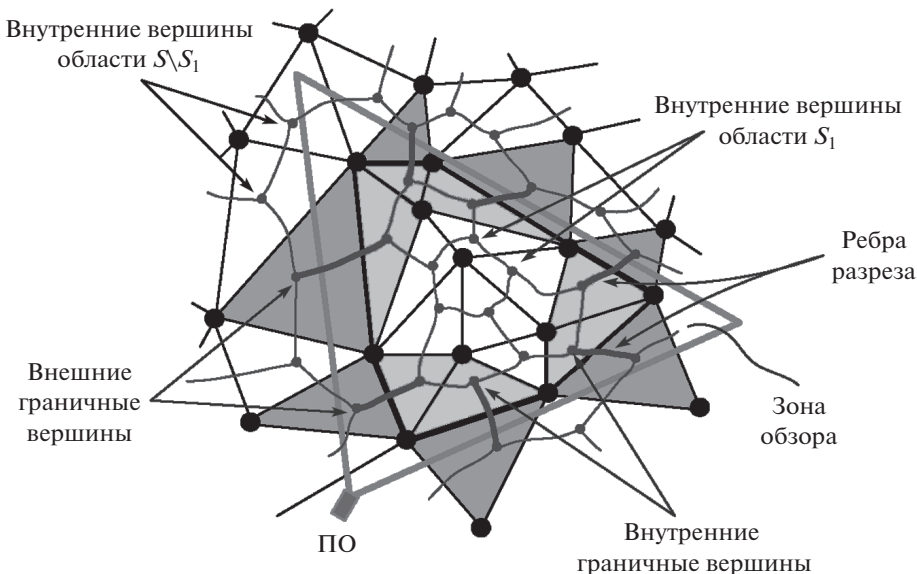


Рис. 2. Внутренние и граничные вершины и ребра разреза.

Вершины, соответствующие треугольникам из зоны обзора, которые не имеют ненулевой границы с внешними треугольниками, будем называть *внутренними*, а вершины, которые соответствуют треугольникам, имеющим общее ребро, – *внутренними граничными*. Обозначим эти множества  $X_1^{int}$  и  $X_1^\Gamma$  соответственно. Треугольники и соответствующие вершины графа из внешней области, не имеющие общего ребра с треугольниками из зоны обзора, тоже будем называть *внутренними*, а имеющие такие ребра – *внешними граничными* (рис. 2). Таким образом, вершины распадаются на непересекающиеся классы:  $X_1 = X_1^{int} \cup X_1^\Gamma$  и  $X \setminus X_1 = (X \setminus X_1)^{int} \cup (X \setminus X_1)^\Gamma$ . Ребра топологического графа, соединяющие внешние и внутренние граничные вершины, образуют *разрез* графа  $G$  [18].

*Утверждение 3. При одном наблюдении справедлива следующая верхняя оценка сложности сцены:*

$$\Delta(S) \leq \lambda \Delta(S_1) + \left[ e^{-\alpha \mu} \left( \bar{\sigma}^2 \left( (X \setminus X_1)^{int} \right) - \sigma^2(X_1) \right) + 1 - \bar{\sigma}^2 \left( (X \setminus X_1)^{int} \right) \right],$$

где  $\bar{\sigma} = 1 - \sigma$  и  $\mu = \min \{ \min K_{G_1}^1, \min R_{12}^1 \}$ ,  $K_{G_1}^1$  – матрица смежности внутренних граничных вершин графа  $G_1$ ,  $R_{12}^1$  – подматрица смежности внутренних и внешних граничных вершин.

Следующее утверждение дает нижнюю оценку сложности.

*Утверждение 4. При одном наблюдении справедлива нижняя оценка сложности сцены:  $\Delta(S) \geq \sigma_1^T e^{-\alpha(K_{G_1} \vee \nu J)} \sigma_1 + 2e^{-\alpha \nu} \sigma(X_1) \sigma(X \setminus X_1)$ , где  $\nu = \max \{ \text{Ширины ребер разреза} \}$ .*

## 6. Оценка сложности сцены по двум наблюдениям

Рассмотрим снова задачу оценки сложности всей сцены, но при условии, что имеются два наблюдения, т.е. две зоны обзора  $S_1, S_2 \subseteq S$ . Для общности будем предполагать, что они пересекаются. Предполагаем также, что известны границы области пересечения двух зон обзора, следовательно, известны и препятствия, лежащие в этой области, т.е. “видимые” одновременно двумя подвижными объектами.

Заметим, что если два наблюдения получены разными объектами, то вычисляемые ими сложности зон обзора нельзя использовать в общих вычислениях без предварительного преобразования. Это связано с тем, что в определении топологического графа весовая функция  $w(u)$  зависит от размеров объекта. Это значит, что сложность одной и той же зоны обзора для разных объектов будет разной. Для простоты ограничимся предположением, что все подвижные объекты имеют близкие размеры и их можно считать равными.

Пусть в графе, описывающем триангуляцию всей сцены, сначала занумерованы вершины, попавшие в первую зону обзора и не попавшие во вторую, затем – вершины, попавшие в пересечение зон обзора, далее оставшиеся вершины из второй зоны обзора и, наконец, остальные вершины графа. Тогда матрица смежности графа  $G = (X, U, w)$  сцены  $S$  может быть представлена в блочном виде:

$$R = \left( \begin{array}{ccc|c} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ \hline R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{array} \right).$$

Здесь подматрицы  $\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$  будем считать матрицами смежности подграфов  $G_1 = (X_1, U_1, w)$  и  $G_2 = (X_2, U_2, w)$ , построенных внутри соответственно первой  $S_1$  и второй  $S_2$  зон обзора. Для определенности обозначим  $|X_1| = N_1$ ,  $|X_2| = N_2$ ,  $|X_1 \cap X_2| = N_{12}$ . Числа  $N_1$ ,  $N_{12}$ ,  $N_2$  определяют размеры квадратных подматриц  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  и  $R_{33}$  соответственно.

Предположим, что первая и вторая зоны объединены в одну  $S_1 \cup S_2$ , которая описывается графом  $G_1 \cup G_2$ . В этом случае матрицу смежности графа всей сцены можно рассматривать как матрицу из четырех блоков, показанную в предыдущем абзаце с помощью разделительных линий. Применяя результаты, полученные для одного наблюдения, можем записать, что

$$\Delta(S) \leq \lambda \Delta(S_1 \cup S_2) + (1 - \lambda) \eta(S \setminus (S_1 \cup S_2)).$$

Для оценки второго слагаемого  $\eta(S \setminus (S_1 \cup S_2))$  можно воспользоваться результатами, полученными для случая одного наблюдения.

Следующее утверждение дает оценку сложности  $\Delta(S_1 \cup S_2)$  объединенной зоны обзора через сложности  $\Delta(S_1)$  и  $\Delta(S_2)$  соответственно первой и второй зон.

Утверждение 5.

$$\Delta(S_1 \cup S_2) \leq 1 - \frac{\lambda_1(1 - \Delta(S_1)) + \lambda_2(1 - \Delta(S_2))}{2},$$

где  $\lambda_1 = \frac{\sigma^2(X_1)}{\sigma^2(X_1 \cup X_2)}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\sigma^2(X_2)}{\sigma^2(X_1 \cup X_2)}$ .

Следует отметить, что доказанная оценка достигается при  $S_1 = S_2$ , т.е. когда обе зоны обзора совпадают. Если ввести меру “простоты”  $\pi(S) = 1 - \Delta(S)$ , противоположную мере сложности, то из последнего утверждения следует хорошо интерпретируемое выражение:

$$\pi(S_1 \cup S_2) \geq \frac{\lambda_1\pi(S_1) + \lambda_2\pi(S_2)}{2}.$$

### 7. Моделирование

Приведем результаты вычисления интегральной сложности сцены, зоны обзора, а также верхние и нижние оценки сложности сцены, полученные на основе утверждений 3, 4 и 5. Сцена представляла собой прямоугольник с размерами  $300 \times 200$  с центром в начале системы координат. Внутри сцены генерировались препятствия, центры которых распределялись по равномерному закону. При этом радиусы препятствий тоже определялись равномерно случайным образом в пределах от трех до пяти. Диаметр подвижных объектов равен пяти.

На рис. 3 показана сцена с 60 круговыми препятствиями и одним подвижным объектом, зона обзора которого ограничена изображенным на рисунке

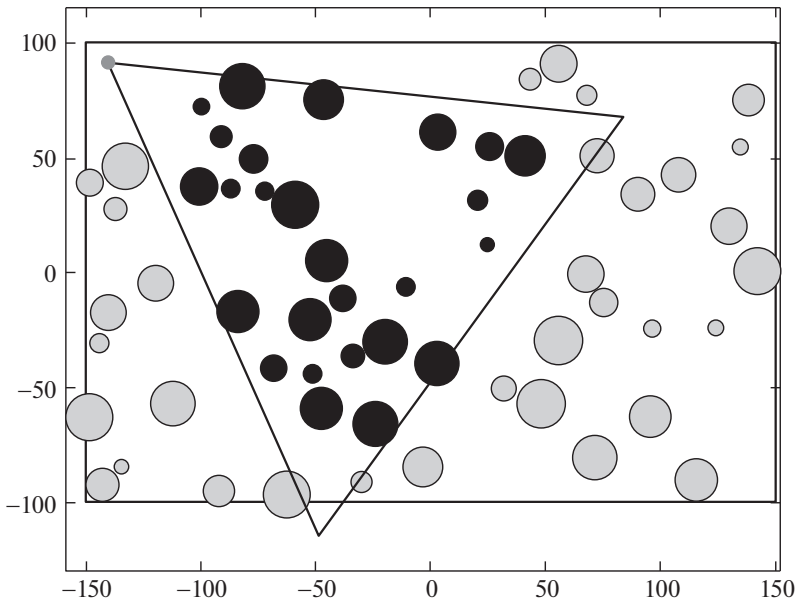


Рис. 3. Моделирование сцены с одной зоной обзора.

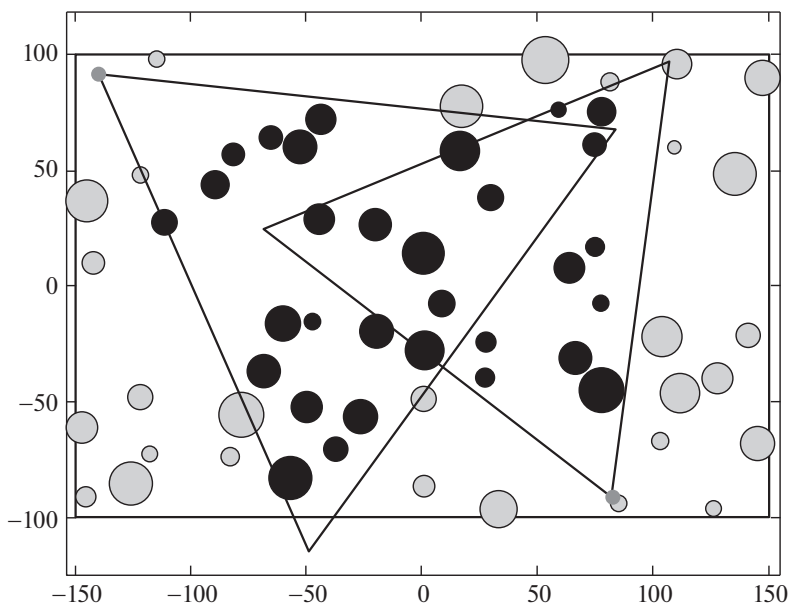


Рис. 4. Моделирование сцены с двумя зонами обзора.

треугольником. Реальная интегральная сложность всей сцены с препятствиями равна 0,861, сложность зоны обзора – 0,832. При этом вычисленные в соответствии с утверждениями 3 и 4 нижняя и верхняя оценки равны соответственно 0,389 и 0,927.

Как следует из полученных формул, “точность” оценки пропорциональна отношению (а точнее, квадрату отношения) площади зоны обзора к площади всей сцены. По этой причине если зона обзора мала относительно всей сцены, то данные оценки становятся малоинформативными, быстро приближаясь к своим предельным значениям. Однако современные системы видео и лазерного сканирования позволяют обозревать достаточно большие участки, что способствует получению достаточно реалистичных оценок сложности.

На рис. 4 приведен случай двух объектов и соответственно двух несколько отличающихся по размерам зон обзора на сцене тоже с 60 препятствиями. Реальная сложность сцены равна 0,536, сложность первой зоны обзора – 0,569, второй – 0,568, при этом для этих зон были получены соответственно следующие нижние и верхние оценки сложности сцены: для первой зоны – 0,296 и 0,936, для второй – 0,207 и 0,946.

Верхняя оценка интегральной сложности объединения двух зон обзора, вычисленная в соответствии с утверждением 5, оказалась равной 0,706. При этом за счет объединения двух зон обзора, как и следовало ожидать, заметно снизилась верхняя оценка, которая оказалась равной 0,781.

## 8. Заключение

В статье поставлена задача получения количественных оценок для сложности среды функционирования нескольких подвижных объектов. Показа-

но, как на основе метрических характеристик триангуляции строится граф, адекватно в рамках рассматриваемых задач описывающий структуру, порождаемую на сцене препятствиями. Введение топологического графа позволяет ввести локальную меру сложности, которая лежит в основе определения интегральной меры. Приведена также конструктивная процедура для вычисления локальных проходимостей и локальных сложностей.

Во второй части статьи приводятся и доказываются верхние и нижние оценки сложности сцены по одному и двум наблюдениям, осуществляемым подвижными объектами в тех локальных областях сцены, в которых они находятся.

Следует отметить, что полученные оценки дают гарантированные границы сложности сцены по известным наблюдениям, поскольку они получены при рассмотрении предельных, но, тем не менее, возможных случаев. По этой причине они могут восприниматься как гарантированные, но чрезмерно “осторожные”. В реальности, конечно, маловероятно, что такие предельные случаи расположения препятствий в “невидимой” зоне могут наблюдаться. Для получения оценок более точных в физическом измерении, но менее точных в вероятностном смысле следует сделать некоторые реалистичные предположения о распределении препятствий за пределами зон обзора. Поэтому данная модель для вычисления интегральной сложности сцены может быть естественным образом развита в данном направлении. Но это требует отдельного исследования.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 2.* По индукции легко доказать неравенство  $R^{[k]} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & I^{(\infty)} \end{pmatrix} \stackrel{[k]}{\geq} \begin{pmatrix} R_{11}^{[k]} & R_{11}^{[k-1]} \circ R_{12} \\ R_{21} \circ R_{11}^{[k-1]} & R_{21} \circ R_{11}^{[k-2]} \circ R_{12} \end{pmatrix}$ , с учетом которого можем записать, что

$$K = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & I^{(\infty)} \end{pmatrix}^{[N-1]} \stackrel{\bullet}{\geq} \begin{pmatrix} R_{11}^{[N-1]} & R_{11}^{[N-2]} \circ R_{12} \\ R_{21} \circ R_{11}^{[N-2]} & R_{21} \circ R_{11}^{[N-3]} \circ R_{12} \end{pmatrix}.$$

Но для  $N \geq N_1 + 2$  справедливо  $R_{11}^{[N-1]} = R_{11}^{[N-2]} = R_{11}^{[N-3]} = K_{G_1}$ , откуда следует утверждение.

*Доказательство утверждения 3.* Рассмотрим неравенство (1) и уточним выражение для второго слагаемого  $\eta$ . Ввиду утверждения 2 выражение для  $\eta(S \setminus S_1)$  принимает вид:

$$\eta(S \setminus S_1) \leq \frac{1}{1-\lambda} \left( \sigma_1^T e^{-\alpha K_{G_1} \circ R_{12}} \sigma_2 + \sigma_2^T e^{-\alpha R_{21} \circ K_{G_1}} \sigma_1 + \sigma_2^T e^{-\alpha R_{21} \circ K_{G_1} \circ R_{12}} \sigma_2 \right).$$

Рассмотрим более подробно первое слагаемое в скобках. Для этого проанализируем структуру подматрицы  $R_{12}$ . Подматрица  $R_{12}$  – это матрица, отражающая смежность вершин из зоны обзора и вершин во внешней области  $S \setminus S_1$ , при этом строки в  $R_{12}$  соответствуют вершинам в зоне обзора, а столбцы – вершинам во внешней области.

Строки, соответствующие внутренним вершинам из  $X_1^{int}$ , будут нулевыми; столбцы, соответствующие внутренним вершинам из внешней области, т.е. из  $(X \setminus X_1)^{int}$ , тоже будут нулевыми. Ненулевые элементы будут на пересечении строки, соответствующей вершине из  $X_1^\Gamma$ , и столбца, соответствующего вершине из  $(X \setminus X_1)^\Gamma$ . При этом значение этого ненулевого элемента равно ширине соответствующего ребра. Каждый ненулевой столбец содержит в точности один ненулевой элемент, в то время как ненулевая строка может содержать либо один, либо два ненулевых элемента.

Предположим, что граничные вершины в наблюдаемой области занумерованы первыми, а смежные с ними треугольники во внешней области – с них начинается нумерация вершин внешней области. Тогда матрицы  $K_{G_1}$  и  $R_{12}$  можно представить в следующем блочном виде:  $K_{G_1} = \begin{pmatrix} K_{G_1}^1 & K_{G_1}^2 \end{pmatrix}$ ,  $R_{12} = \begin{pmatrix} R_{12}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Здесь  $R_{12}^1$ , вообще говоря, прямоугольная матрица размера  $|X^\Gamma| \times |(X \setminus X_1)^\Gamma|$ . Следовательно,  $K_{G_1} \circ R_{12} = (K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1 \quad 0)$  и  $e^{-\alpha K_{G_1} \circ R_{12}} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} & J \end{pmatrix}$ . Представим вектор  $\sigma_2$  в блочном виде:  $\sigma_2 = (\sigma_2^1 \quad \sigma_2^2)^\top$ , размеры которого согласованы с разбиением матрицы  $R_{12}$ . Тогда

$$\sigma_1^\top e^{-\alpha K_{G_1} \circ R_{12}} \sigma_2 = \sigma_1^\top e^{-\alpha K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} \sigma_2^1 + \sigma_1^\top J \sigma_2^2.$$

Нетрудно видеть, что второе слагаемое равно  $\sigma_1^\top J \sigma_2^2 = \sigma(X_1) \sigma((X \setminus X_1)^{int})$ .

Рассмотрим теперь  $\sigma_1^\top e^{-\alpha K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} \sigma_2^1$ . Матрица  $K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1$  содержит ширины всех путей из каждой вершины в зоне обзора до каждой внешней граничной вершины. Тогда, очевидно,  $K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1 \geq \min \{ \min K_{G_1}^1, \min R_{12}^1 \} J$ , где матрица  $J$ , очевидно, соразмерна с  $R_{12}$ . Обозначим для удобства  $\mu = \min \{ \min K_{G_1}^1, \min R_{12}^1 \}$ . Следовательно,  $e^{-\alpha K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} \leq e^{-\alpha \mu J} = e^{-\alpha \mu} J$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_1^\top e^{-\alpha K_{G_1} \circ R_{12}} \sigma_2 &\leq e^{-\alpha \mu} \sigma_1^\top J \sigma_2^1 + \sigma(X_1) \sigma((X \setminus X_1)^{int}) = \\ &= e^{-\alpha \mu} \sigma(X_1) \sigma((X \setminus X_1)^\Gamma) + \sigma(X_1) \sigma((X \setminus X_1)^{int}). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что второе слагаемое в скобках удовлетворяет неравенству

$$\sigma_2^\top e^{-\alpha R_{21} \circ K_{G_1}} \sigma_1 \leq e^{-\alpha \mu} \sigma((X \setminus X_1)^\Gamma) \sigma(X_1) + \sigma((X \setminus X_1)^{int}) \sigma(X_1).$$

Рассмотрим третье слагаемое в скобках. Точно так же представим  $K_{G_1} = \begin{pmatrix} K_{G_1}^1 & K_{G_1}^2 \\ (K_{G_1}^2)^\top & K_{G_1}^3 \end{pmatrix}$ , где  $K_{G_1}^1$  – подматрица проходимостей для внутренних граничных вершин. Тогда  $R_{21} \circ K_{G_1} \circ R_{12} = \begin{pmatrix} (R_{12}^1)^\top \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



и  $e^{-\alpha R_{21} \circ K_{G_1} \circ R_{12}} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha (R_{12}^1)^T \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} & J \\ J & J \end{pmatrix}$ . Используя введенные блочные представления для вектора  $\sigma_2$ , получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_2^T e^{-\alpha R_{12}^T \circ K_{G_1} \circ R_{12}} \sigma_2 &= \left( (\sigma_2^1)^T \quad (\sigma_2^2)^T \right) \begin{pmatrix} e^{-\alpha (R_{12}^1)^T \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} & J \\ J & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2^1 \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \\ &= (\sigma_2^1)^T e^{-\alpha (R_{12}^1)^T \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} \sigma_2^1 + \underbrace{(\sigma_2^1)^T J \sigma_2^2}_{\sigma((X \setminus X_1)^\Gamma) \sigma((X \setminus X_1)^{int})} + \\ &+ \underbrace{(\sigma_2^2)^T J \sigma_2^1}_{\sigma((X \setminus X_1)^{int}) \sigma((X \setminus X_1)^\Gamma)} + \underbrace{(\sigma_2^2)^T J \sigma_2^2}_{\sigma((X \setminus X_1)^{int}) \sigma((X \setminus X_1)^{int})} = \\ &= (\sigma_2^1)^T e^{-\alpha (R_{12}^1)^T \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} \sigma_2^1 + 2\sigma \left( (X \setminus X_1)^\Gamma \right) \sigma \left( (X \setminus X_1)^{int} \right) + \\ &+ \sigma \left( (X \setminus X_1)^{int} \right) \sigma \left( (X \setminus X_1)^{int} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что для композиции справедлива аналогичная оценка:  $(R_{12}^1)^T \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1 \geq \mu J$  и, значит,  $e^{-\alpha (R_{12}^1)^T \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} \leq e^{-\alpha \mu J} = e^{-\alpha \mu} J$ . С учетом этого  $(\sigma_2^1)^T e^{-\alpha (R_{12}^1)^T \circ K_{G_1}^1 \circ R_{12}^1} \sigma_2^1 \leq e^{-\alpha \mu} \sigma \left( (X \setminus X_1)^\Gamma \right) \sigma \left( (X \setminus X_1)^\Gamma \right)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_2^T e^{-\alpha R_{12}^T \circ K_{G_1} \circ R_{12}} \sigma_2 &\leq e^{-\alpha \mu} \sigma^2 \left( (X \setminus X_1)^\Gamma \right) + \\ &+ 2\sigma \left( (X \setminus X_1)^\Gamma \right) \sigma \left( (X \setminus X_1)^{int} \right) + \sigma^2 \left( (X \setminus X_1)^{int} \right). \end{aligned}$$

Собирая вместе полученные неравенства, после преобразований и упрощений получаем доказываемую в утверждении 3 верхнюю оценку.

*Доказательство утверждения 4.* Предположим, что за пределами зоны обзора либо нет препятствий, либо их небольшое количество и расстояния между ними настолько велики, что их можно считать условно равными бесконечности. Пусть, как и раньше,  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$  – матрица смежности топологического графа всей сцены, где  $R_{11}$  – матрица смежности графа  $G_1 = (X_1, U_1)$ . Тогда в соответствии с процедурой построения проходимостей можем записать:

$$K = R^{[N-1]} = \begin{pmatrix} K_{G_1} \vee Z_{11}^{(N-1)} & Z_{12}^{(N-1)} \\ Z_{21}^{(N-1)} & Z_{22}^{(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Проанализируем подматрицы данной блочной матрицы.  $Z_{22}^{(N-1)}$  содержит ширину всех возможных путей из внешних вершин во внешние вершины, следовательно, все элементы будут равны  $\infty$ , т.е.  $Z_{22}^{(N-1)} = (\infty)$ .  $Z_{12}^{(N-1)}$  содержит

ширины путей, ведущих из зоны обзора  $S_1$  во внешнюю часть сцены  $S \setminus S_1$ . Каждый путь состоит из частей, находящихся в  $S_1$ , частей, находящихся в  $S \setminus S_1$ , и, возможно, несколько раз проходящий через ребра разреза. Ширина ребер в  $S \setminus S_1$  по условию равна  $\infty$ , поэтому ширина пути будет определяться ширинами путей, находящихся в  $G_1$ , и ширинами ребер разреза. Ширина каждого такого пути не превосходит  $\nu = \max \{\text{Ширины ребер разреза}\}$ . Таким образом,  $Z_{12}^{(N-1)} \stackrel{\bullet}{\leq} \nu J$ . Аналогично  $Z_{21}^{(N-1)} \stackrel{\bullet}{\leq} \nu J^T$ .

Рассмотрим  $K_{G_1} \vee Z_{11}^{(N-1)}$ . Эта подматрица содержит ширины всех путей из  $X_1$  в  $X_1$ , возможно, проходящих через некоторые ребра в  $G \setminus G_1$  и проходящих через некоторые ребра разреза. Части путей, лежащие в  $G \setminus G_1$ , имеют по условию бесконечную ширину, поэтому ширина любого полного пути не будет превосходить ширины частей пути, лежащих в  $G_1$ , и ширины проходимых ребер разреза. Понятно, что ширина любого такого пути не может быть больше ширины любой его части. Поэтому  $K_{G_1} \vee Z_{11}^{(N-1)} \stackrel{\bullet}{\leq} K_{G_1} \vee \nu J$ .

Таким образом,  $K \stackrel{\bullet}{\leq} \begin{pmatrix} K_{G_1} \vee \nu J & \nu J \\ (\nu J)^T & \infty \end{pmatrix}$  и  $e^{-\alpha K} \stackrel{\bullet}{\geq} \begin{pmatrix} e^{-\alpha(K_{G_1} \vee \nu J)} & e^{-\alpha \nu J} \\ e^{-\alpha \nu J^T} & 0 \end{pmatrix}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta(S) &= \sigma^T e^{-\alpha K} \sigma \stackrel{\bullet}{\geq} (\sigma_1^T \sigma_2^T) \begin{pmatrix} e^{-\alpha(K_{G_1} \vee \nu J)} & e^{-\alpha \nu J} \\ e^{-\alpha \nu J^T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \\ &= \sigma_1^T e^{-\alpha(K_{G_1} \vee \nu J)} \sigma_1 + 2e^{-\alpha \nu J} \sigma_1^T \sigma_2. \end{aligned}$$

Но  $\sigma_1^T J \sigma_2 = \sigma(X_1) \sigma(X \setminus X_1)$ , что и доказывает утверждение 4.

*Доказательство утверждения 5.* Рассмотрим матрицу смежности подграфа  $\langle X_1, X_2 \rangle$  графа  $G$ , порожденного вершинами графов  $G_1$  и  $G_2$  из двух зон наблюдения:

$$R_{\langle X_1, X_2 \rangle} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}.$$

Подграф  $\langle X_1, X_2 \rangle$ , вообще говоря, неизоморфен графу  $G_1 \cup G_2$ , поскольку в отличие от графа  $G_1 \cup G_2$  он может содержать ребра, соединяющие вершины из множеств  $X_1 \setminus X_2$  и  $X_2 \setminus X_1$ . Наличие таких ребер отражено в подматрице  $R_{13}$ , информации о которой нет, поскольку эти ребра лежат в “ненаблюдаемой” для обоих подвижных объектов области.

Применим к матрице  $R_{\langle X_1, X_2 \rangle}$  утверждение 2, считая внедиагональные блоки  $R_{13}$  и  $R_{23}$  нулевыми:  $K_{\langle X_1, X_2 \rangle} \stackrel{\bullet}{\geq} \begin{pmatrix} K_{G_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . С учетом этого для сложностной меры получаем неравенство:

$$\delta(S_1 \cup S_2) = \sigma^T e^{-\alpha K_{\langle X_1, X_2 \rangle}} \sigma \leq \sigma^T \begin{pmatrix} e^{-\alpha K_{G_1}} & J_{N_1, N_2 - N_{12}} \\ J_{N_2 - N_{12}, N_1} & J_{N_2 - N_{12}, N_2 - N_{12}} \end{pmatrix} \sigma.$$

Представим теперь вектор  $\sigma$  в блочном виде  $\sigma = (\sigma_1^T \sigma_2^T)^T$ , где  $\sigma_1, \sigma_2$  имеют размеры, согласованные с размерами матриц  $e^{-\alpha K_{G_1}}$  и  $J_{N_2-N_{12}, N_2-N_{12}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \delta(S_1 \cup S_2) &\leq \underbrace{\sigma_1^T e^{-\alpha K_{G_1}} \sigma_1}_{\delta(S_1)} + \sigma_2^T J_{N_2-N_{12}, N_1} \sigma_1 + \\ &+ \sigma_1^T J_{N_1, N_2-N_{12}} \sigma_2 + \sigma_2^T J_{N_2-N_{12}, N_2-N_{12}} \sigma_2. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\sigma(X_1) = J_{1, N_1} \sigma_1$  меру области, задаваемой множеством  $X_1$  вершин графа  $G_1$ ; через  $\sigma(X_2 \setminus X_1) = J_{1, N_2-N_{12}} \sigma_2$  – меру области, задаваемой вершинами  $X_2 \setminus X_1$  графа  $G_2 \setminus G_1$ . Тогда

$$\delta(S_1 \cup S_2) \leq \delta(S_1) + 2\sigma(X_2 \setminus X_1) \sigma(X_1) + \sigma^2(X_2 \setminus X_1).$$

Аналогично, получая неравенство  $K_{\langle X_1, X_2 \rangle} \stackrel{\bullet}{\geq} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{G_2} \end{pmatrix}$ , находим:

$$\delta(S_1 \cup S_2) \leq \delta(S_1) + 2\sigma(X_1 \setminus X_2) \sigma(X_2) + \sigma^2(X_1 \setminus X_2).$$

Складывая оба неравенства и выражая из них  $\delta(S_1 \cup S_2)$ , после эквивалентных преобразований в правой части получаем:

$$\delta(S_1 \cup S_2) \leq \frac{1}{2}(\delta(S_1) + \delta(S_2)) + \sigma^2(X_1 \cup X_2) - \frac{1}{2}(\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2)).$$

Чтобы перейти к сложностям, необходимо нормировать последнее выражение на меру  $\sigma^2(X_1 \cup X_2)$  области, являющейся объединением обеих зон обзора. Введем обозначения  $\lambda_1 = \frac{\sigma^2(X_1)}{\sigma^2(X_1 \cup X_2)}$  и  $\lambda_2 = \frac{\sigma^2(X_2)}{\sigma^2(X_1 \cup X_2)}$ , которые имеют смысл отношений мер первой и второй зон обзора к мере объединенной области соответственно. В результате получаем:

$$\Delta(S_1 \cup S_2) \leq \frac{\lambda_1 \Delta(S_1) + \lambda_2 \Delta(S_2)}{2} + 1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

откуда и следует доказательство утверждения 5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интеллектуальное планирование траекторий подвижных объектов в средах с препятствиями / Под ред. В.Х. Пшихопова. М.: Физматлит, 2014.
2. Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments / Ed. V. Pshikhopov. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2017.
3. Интеллектуальные технологии планирования перемещений подвижных объектов в трехмерных недетерминированных средах / Под ред. В.Х. Пшихопова. М.: Наука, 2017.
4. Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю. Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. М.: Наука, 2011.
5. Feixas M., del Acebo E., Bekaert Ph., Sbert M. An information Theory Framework for the Analysis of Scene Complexity // EUROGRAPHICS '99. 1999. V. 18. No. 3.

6. *Niepel L., Martinka J., Ferko A., Elias P.* On Scene Complexity Definition for Rendering // WSCG'95, Plzen. 1995. P. 209–217.
7. *Plemenos D., Sbert M., Feixas M.* On Viewpoint Complexity of 3D Scenes // Int. Conf. Graphicon. 2004. Moscow, Russia, <http://www.graphicon.ru/>
8. *Rigau J., Feixas M., Sbert M.* Visibility Complexity of a Region in Flatland // EUROGRAPHICS. 2000.
9. *Каржищенко А.Н., Пилихонков В.Х.* К определению сложности среды функционирования подвижного объекта на плоскости // АИТ. 2019. № 5. С. 136–154.
10. *Скворцов А.В.* Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.
11. *Qu Yaohong, Zhang Yintao, Zhang Youmin.* A Global Path Planning Algorithm for Fixed-wing UAVs // Intell. Robot Syst. Springer Science+Business Media. 2018. V. 91. P. 691–707.
12. *Kim D., Sugihara K.* Voronoi Diagram of a Circle Set from Voronoi Diagram of a Point Set: I. Topology // Comput. Aided Geom. Des. 2001. V. 18. No. 6. P. 541–562.
13. *Choset H., Burdick J.* Sensor-based Exploration: The Hierarchical Generalized Voronoi Graph // Int. J. Robot. Res. 2000. V. 19. No. 2. P. 96–125.
14. *Merino L., Wiklund J., Caballero F.* Vision-based Multi-UAV Position Estimation // IEEE Robot. Autom. Mag. 2006. V. 13. No. 3. P. 53–62.
15. *Yu X., Zhang Y.M.* Sense and Avoid Technologies with Application to Unmanned Aircraft Systems: Review and Prospects // Progress Aeros. Sci. 2015. V. 74. P. 152–166.
16. *Borouchaki H., Lo S.* Fast Delaunay Triangulation in Three Dimensions // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1995. V. 128. P. 153–167.
17. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1986.
18. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничинным.*

Поступила в редакцию 24.11.2018

После доработки 12.01.2019

Принята к публикации 25.04.2019