Автоматика и телемеханика, № 9, 2019

© 2019 г. **В.М. КУНЦЕВИЧ, д-р техн. наук (vsevolod.kuntsevich@gmail.com)**
(Институт космических исследований
Национальной академии наук Украины, Киев)

ОЦЕНКИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ[1]

Получено решение задачи минимизации воздействия ограниченных возмущений на некоторые классы управляемых нелинейных дискретных систем. Мерой воздействия возмущений принят радиус инвариантного множества — аналог дисперсии при вероятностной природе возмущения. Рассмотрены случаи с двусторонними линейными и нелинейными ограничениями, образующими многозначные отображения, а также случай, когда для нелинейной функции задана оценка по норме.

Ключевые слова: робастное управление, нелинейные дискретные системы, ограниченные возмущения.

DOI: 10.1134/S0005231019090046

1. Введение

Проблема анализа воздействия ограниченных возмущений на динамические системы интенсивно исследуется в последние несколько десятилетий. Для класса линейных, как непрерывных, так и дискретных систем с числовыми матрицами, получены существенные результаты по определению оценок воздействия таких возмущений на эти системы и управлений, минимизирующих меру их воздействия. В [1] подведен определенный итог результатов, полученных при решении этой проблемы.

Иначе обстоит дело с решением задач определения меры воздействия ограниченных возмущений на нелинейные динамические системы и отысканием управлений, минимизирующих в том или ином смысле воздействие этих возмущений. В приложениях достаточно часто неизвестен точный вид нелинейных функций математических моделей объекта управления, а известны лишь те или иные их оценки. Поэтому ниже рассмотрим именно такие случаи. В имеющихся немногочисленных публикациях, посвященных решению этих задач (см. [2–4]), используется представление нелинейных функций в квазилинейной форме, что существенно ограничивает класс рассматриваемых нелинейных систем.

В настоящее время для управления динамическими системами различной природы и различного назначения используется исключительно цифровая техника и измерения и управление осуществляются в дискретные моменты времени, поэтому ниже будут рассмотрены лишь дискретные математические модели динамических систем.

[1] Посвящается 100-летию со дня рождения академика Якова Залмановича Цыпкина.

2. Минимизация воздействия возмущений на системы с нелинейными функциями с двухсторонними линейными ограничениями

Постановка задачи. Задано семейство систем

$$X_{n+1} = AXn + f(X_n)B + SU_n + Z_n. \tag{2.1}$$

Здесь $X_n \in \mathbf{R}^m$, A – матрица $(m\times m)$, $B^{\mathrm{T}} = (0,\ldots,0,1)$, S – матрица $(m \times m)$, $\det S \neq 0$, $Z_n \in \mathbf{R}^m$ – возмущение, для которого задана, как это часто бывает в приложениях, его интервальная оценка

$$Z_n \in \mathbf{Z} = \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 \times \ldots \times \mathbf{z}_m, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{z}_i = \{z_i : |z_i| \leqslant \sigma_i\}$, $i = \overline{1;m}$, $f(X_n)$ – нелинейная знакопеременная функция скалярного аргумента, $f(X_n) = f[\sigma(X_n)]$, $\sigma(\cdot) = C^{\mathrm{T}}X_n$, $\|C\| \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Функция $f[\sigma(X_n)]$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$0 < \underline{k}\sigma(\cdot) \leqslant f(\cdot) \leqslant \overline{k}\sigma(\cdot), \quad \sigma(\cdot) = C^{\mathrm{T}}X_n \geqslant 0, \tag{2.3}$$

$$\overline{k}\sigma(\cdot) \geqslant f(\cdot) \geqslant \underline{k}\sigma(\cdot), \quad \sigma(\cdot) = C^{\mathrm{T}}X_n \leqslant 0. \tag{2.4}$$

Нужно определить управление, минимизирующее в оговоренном ниже смысле воздействие возмущений $Z_n \in \mathbf{Z}$ на семейство систем (2.1)–(2.4).

Многозначное отображение (2.3), (2.4) с линейными границами преобразует величины σ_n в интервалы $\mathbf{f}_n = \{f : \underline{k}\sigma_n \leqslant f_n \leqslant \overline{k}\sigma_n\}$. Размеры (радиусы) интервалов $\mathbf{f}_n$ линейно зависят от σ_n (см. рис. 1). Поэтому система (2.1)–(2.4) является **семейством линейных систем**

$$X_{n+1} = (A + kBC^{\mathrm{T}})X_n + SU_n + Z_n, \quad \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}, \quad Z_n \in \mathbf{Z}. \tag{2.5}$$

Отметим, что класс *автономных* непрерывных систем

$$\dot{X} = AX + f[\sigma(X)]B$$

с нелинейной скалярной функцией, удовлетворяющей ограничениям (2.3), (2.4), начиная с пионерской работы А.И. Лурье и В.Н. Постникова [5], ак-

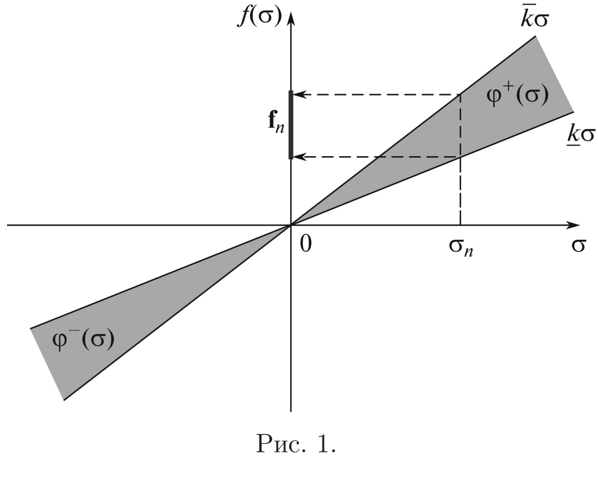

Рис. 1.

тивно исследовался в работах М.А. Айзермана и Ф.Р. Гантмахера, Е. Джури, Р. Калмана, В. Попова, Я.З. Цыпкина, В.А. Якубовича и др. в рамках проблемы, получившей впоследствии название “исследование абсолютной устойчивости”.

Утверждение 1. Исследование нелинейной системы (2.1) *с неопределенностью относительно нелинейной функции, заданной в виде многозначного отображения* (2.3), (2.4) *с* **линейными границами**, *сводится к исследованию* **семейства линейных систем** (2.5).

Из утверждения 1 следует, что для дискретных систем

$$X_{n+1} = AX_n + f[\sigma(X_n)]B$$

с ограничениями на нелинейную функцию $f(\cdot)$ в виде (2.3), (2.4) дискретный аналог гипотезы Айзермана справедлив. Выдвинутая М.А. Айзерманом гипотеза [6] для класса непрерывных систем с нелинейной функцией, удовлетворяющей ограничениям (2.3), (2.4), в общем случае неверна. Введя дополнительное ограничение на величину $\partial f(\sigma)/\partial\sigma$, Р. Калман сузил класс нелинейных функций, для которых гипотеза Айзермана, т.е. уже гипотеза Айзермана–Калмана, верна (подробнее об этом см. в [7]).

Вернемся к рассмотрению системы (2.5) и введем числовую меру воздействия возмущений $Z_n \in \mathbf{Z}$ на семейство динамических систем (2.1)–(2.4).

Если $\|A\|$, $\|C\|$ и радиус (размер) интервала $\mathbf{f}_n$ таковы, что существует непустое множество линейных уравнений

$$U_n = HX_n,$$

где $H-$ матрица $m \times m$, то выбором матрицы H можно обеспечить робастную устойчивость семейства автономных систем

$$X_{n+1} = \left(A + kBC^{\mathrm{T}} + SH\right) X_n, \quad k \in \chi = \{k : \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}\}. \tag{2.6}$$

При этом семейство систем (2.6) имеет *ограниченное инвариантное множество* $\overset{\star}{\mathbf{X}}$, т.е. такое множество, что если $X_n \in \overset{\star}{\mathbf{X}}$, то $X_{n+1} \in \overset{\star}{\mathbf{X}}$ при всех возможных $Z_n \in \mathbf{Z}$.

В качестве меры воздействия возмущений на семейство систем (2.1)–(2.4), (2.6) примем *радиус* $R(\overset{\star}{\mathbf{X}})$ множества $\overset{\star}{\mathbf{X}}$, определяемый как

$$R(\overset{\star}{\mathbf{X}}) = \max_{X \in \overset{\star}{\mathbf{X}}} \|X\|\,. \tag{2.7}$$

Тогда целью управления U_n примем минимизацию радиуса инвариантного множества $\overset{\star}{\mathbf{X}}$. Для этого необходимо, прежде всего, определить величину $R(\overset{\star}{\mathbf{X}})$ как функцию параметров системы (2.1)–(2.4).

Примем, что для вектора X_n имеется его интервальная оценка

$$X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n = \bar{\mathbf{x}}_{1n} \times \bar{\mathbf{x}}_{2n} \times \ldots \times \bar{\mathbf{x}}_{mn}, \quad \bar{\mathbf{x}}_{in} = \{x_i : \underline{x}_{in} \leqslant x_i \leqslant \bar{x}_{in}\}, \quad i = \overline{1;m}.$$

Тогда из (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) следует, что это семейство линейных систем описывается линейным разностным включением

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X'}_{n+1}(\mathbf{X}_n, U_n) + \mathbf{Z}, \tag{2.8}$$

где

$$\mathbf{X'}_{n+1}(\mathbf{X}_n, U_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ k\ \in \chi}} [(A + kBC^{\mathrm{T}})X_n] + SU_n.$$

Множество $\mathbf{X'}_{n+1}(\cdot)$ – неинтервальное множество. Существенные затраты вычислительного характера, связанные с приближенным определением параметрического множества $\mathbf{X'}_{n+1}(\cdot)$ общего вида, и трудности, связанные с его дальнейшим использованием, оправдывают, как было предложено в [8], аппроксимацию этого множества интервальным множеством минимального объема

$$\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}(U_n) = \bar{\mathbf{x}}'_{1,n+1}(u_{1n}) \times \ldots \times \bar{\mathbf{x}}'_{m,n+1}(u_{mn}).$$

Введем обозначения

$$\tilde{U}_n = SU_n \tag{2.9}$$

и через $\tilde{u}_{in}$, $i = \overline{1;m}$, обозначим элементы вектора $\tilde{U}_n$. Тогда с учетом соотношения (2.9) выражение для множества $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}(U_n)$ перепишем в виде

$$\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}(\tilde{U}_n) = \bar{\mathbf{x}}'_{1,n+1}(\tilde{u}_{1n}) \times \ldots \times \bar{\mathbf{x}}'_{m,n+1}(\tilde{u}_{mn}), \tag{2.10}$$

где

$$\bar{\mathbf{x}}'_{i,n+1} = \left\{x_i :\ \underline{x}'_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) \leqslant x_i \leqslant \bar{x}'_{i,n+1}(\tilde{u}_{in})\right\}, \quad i = \overline{1;m},$$

$$\underline{x}'_{i,n+1} = \min_{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n} \left\{\gamma_i(\cdot) = A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{in}\right\}, \quad i = \overline{1;m-1}, \tag{2.11}$$

$$\bar{x}'_{i,n+1} = \max_{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n} \left\{\gamma_i(\cdot) = A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{in}\right\}, \quad i = \overline{1;m-1}, \tag{2.12}$$

$$\underline{x}'_{m,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ k \in \chi}} \left\{\gamma_m(\cdot) = (A_m^{\mathrm{T}} + kC^{\mathrm{T}})X_n + \tilde{u}_{mn}\right\}, \tag{2.13}$$

$$\bar{x}'_{m,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ k \in \chi}} \left\{\gamma_m(\cdot) = (A_m^{\mathrm{T}} + kC^{\mathrm{T}})X_n + \tilde{u}_{mn}\right\}. \tag{2.14}$$

Отметим, что интервальные множества $\bar{\mathbf{x}}'_{i,n+1}$, $i = \overline{1;m}$, – проекции множества $\mathbf{X'}_{n+1}(\cdot)$ на оси $0x_i$, $i = \overline{1;m}$.

Так как функции $\gamma_i(\cdot)$, $i = \overline{1;m}$, билинейные, то решения задач (2.11)–(2.14) принадлежат вершинам X_n^l множества $\bar{\mathbf{X}}_n$. Интервальное множество $\bar{\mathbf{X}}_n$ (2.10) запишем в виде

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \operatorname*{conv}_{s=\overline{1;L}} \{X_n^l\},$$

где X_n^l – l-я вершина многогранника $\bar{\mathbf{X}}_n$, и перепишем задачи (2.11)–(2.14) в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}'_{i,n+1} &= \min_{s=\overline{1;L}} \left\{ A_i^{\mathrm{T}} X_n^l + \tilde{u}_{in} \right\}, \\ \bar{x}'_{i,n+1} &= \max_{s=\overline{1;L}} \left\{ A_i^{\mathrm{T}} X_n^l + \tilde{u}_{in} \right\}, \end{aligned} \qquad i = \overline{1; m-1}. \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \underline{x}'_{1,n+1} &= \min_{\substack{s=\overline{1;L} \\ j=\overline{1;2}}} \Big\{ \left(A_m^{\mathrm{T}} + k_j C^{\mathrm{T}}\right) X_n^l + \tilde{u}_{mn} \Big\}, \\ \underline{x}'_{1,n+1} &= \max_{\substack{s=\overline{1;L} \\ j=\overline{1;2}}} \Big\{ \left(A_m^{\mathrm{T}} + k_j C^{\mathrm{T}}\right) X_n^l + \tilde{u}_{mn} \Big\}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $k_1 = \underline{k}$ и $k_2 = \bar{k}$.

Экстремумы комбинаторных задач (2.15), (2.16), принимая во внимание их невысокую размерность, найдем полным перебором всех вариантов. Полученные величины $\underline{x}'_{i,n+1}$, $\bar{x}'_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m}$, определяют искомое множество

$$\mathbf{X}_{n+1} = \Gamma[\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)].$$

Далее рассмотрим эволюцию интервальных множеств $\bar{\mathbf{X}}_n$,

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \Gamma[\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)] + \mathbf{Z}. \tag{2.17}$$

При выборе нормы X в (2.7) в виде $\|X_n\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|$ радиус интервального множества (2.17) равен

$$R(\bar{\mathbf{X}}_n) = \sum_{i=1}^m r(\bar{\mathbf{x}}_i), \tag{2.18}$$

где $r(\bar{\mathbf{x}}_i)$ – радиус одномерного интервального множества $\bar{\mathbf{x}}_i = \{x_i : \underline{x}_i \leqslant x_i \leqslant \leqslant \bar{x}_i\}$, равный $r(\bar{\mathbf{x}}_i) = |\bar{x}_i - \underline{x}_i|$.

Задача

$$\min_{\tilde{U}_n} R(\bar{\mathbf{X}}_n)$$

в силу (2.18) сводится к решению задач

$$\min_{\tilde{u}_{in}} r_i \left\{ \gamma_i[\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{in})] \right\}, \quad i = \overline{1; m}. \tag{2.19}$$

Так как множество $\bar{\mathbf{X}}_n$ центрально-симметрическое, то справедливы равенства

$$\underline{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) = -\bar{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}), \quad i = \overline{1; m}. \tag{2.20}$$

Из (2.19), (2.20) следует, что

$$r_i(\tilde{u}_{in}) = |\bar{x}_{in}(\tilde{u}_{in}) - \underline{x}_{in}(\tilde{u}_{in})| = 2|\bar{x}_{in}(\tilde{u}_{in})|$$

и, следовательно,

$$r_i\left\{\gamma_i\left[\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{in})\right]\right\} = 2r_i\left[\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in})\right], \quad i = \overline{1;m}.$$

Итак, для получения гарантированного результата управления $\tilde{u}_{in}$, $i = \overline{1;m}$, будем искать как решения задач

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{in} \in \mathbf{Z}_i}} \left|A_i^{\mathrm{T}} X_n + z_{in} + \tilde{u}_{in}\right|, \; i = \overline{1;m-1}, \tag{2.21}$$

$$\min_{\tilde{u}_{mn}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ k \in \chi \\ z_{mn} \in \mathbf{z}_m}} \left|A_m^{\mathrm{T}} + k(C^{\mathrm{T}})X_n) + z_{mn} + \tilde{u}_{mn}\right|. \tag{2.22}$$

В общем случае минимаксные задачи не имеют аналитических решений, и задачи (2.21), (2.22) не являются исключением из этого правила. Использование численных методов решения задач (2.21), (2.22) неприемлемо прежде всего потому, что это не дает возможности провести анализ устойчивости автономной системы (2.6), а именно, проверки необходимого условия существования ограниченного инвариантного множества системы (2.8). Поэтому ограничимся использованием лишь субоптимального управления. В [9] для минимаксных задач

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n} \left|A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{in}\right|, \quad i = \overline{1;m-1},$$

$$\min_{\tilde{u}_{mn}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ \Delta k \in \delta\chi}} \left|\left[A_m^{\mathrm{T}} + (\mathring{k} + \Delta k)C^{\mathrm{T}}\right] X_n + \tilde{u}_{mn}\right|,$$

где $\mathring{k} = 0{,}5(\bar{k} + \underline{k})$, $\Delta k = \underline{k} + 0{,}5(\bar{k} - \underline{k})$, получены их аналитические решения

$$\tilde{u}_{in}^* = -A_i^{\mathrm{T}} X_n, \quad i = \overline{1;m-1}, \quad \tilde{u}_{mn}^* = -(A_m^{\mathrm{T}} + \mathring{k}C^{\mathrm{T}})X_n. \tag{2.23}$$

Если условие $\|Z_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ выполняется для всех $n \in [0, \infty)$, где ε – достаточно малая величина, то полученные управления являются субоптимальными.

По определенному соотношениями (2.23) вектору $\tilde{U}_n^*$ определим искомый вектор субоптимального управления $\overset{*}{U}_n = S^{-1}\tilde{U}_n$.

Подставив найденное управление $\overset{*}{U}_n$ в (2.5), получим уравнение семейства систем

$$X_{n+1} = (\Delta k B C^{\mathrm{T}})X_n + Z_n, \tag{2.24}$$

где $\Delta k \in \delta\chi = \chi - \mathring{k}$, $Z_n \in \mathbf{Z}$.

Для оценки вектора X_n из (2.24) получим

$$X_{n+1} \in \bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ \Delta k \in \delta\chi}} (\Delta k B C^{\mathrm{T}}) X_n + Z. \tag{2.25}$$

Отметим, что множество (2.25) интервальное.

Величины нижних $\underline{x}_{in}^*$ и верхних $\bar{x}_{in}^*$ пределов интервальных множеств $\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}$, $i = \overline{1;m}$, в (2.25) получим из решения задач

$$\underline{x}_{in}^* = \min_{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n} C^{\mathrm{T}} X_n, \quad \bar{x}_{in}^* = \max_{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n} C^{\mathrm{T}} X_n, \ i = \overline{1; m-1}, \tag{2.26}$$

$$\underline{x}_{mn}^* = \min_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ \Delta k \in \delta\chi}} \Delta k C^{\mathrm{T}} X_n, \quad \bar{x}_{mn}^* = \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ \Delta k \in \delta\chi}} \Delta k C^{\mathrm{T}} X_n. \tag{2.27}$$

Решения задач (2.26)–(2.27) с точностью до обозначений совпадают с решениями задач (2.11)–(2.14). Величины $\underline{x}_{in}^*$, $\bar{x}_{in}^*$, $i = \overline{1;m}$, определяют интервальное множество

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1}^* = \overset{*}{\Gamma}(\bar{\mathbf{X}}_n). \tag{2.28}$$

Тогда получим уравнение эволюции интервальных множеств

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \overset{*}{\Gamma}(\bar{\mathbf{X}}_n) + \mathbf{Z}. \tag{2.29}$$

Приняв в (2.29) $\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \bar{\mathbf{X}}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \overset{*}{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z},$$

определяющее искомое интервальное инвариантное множество семейства систем.

Выше было принято, что параметры системы (2.1)–(2.4) таковы, что существует такое множество управлений U_n, которое обеспечивает робастную устойчивость систем (2.6). Но в общем случае класс систем может быть настолько широк (радиус интервала χ настолько велик), что для семейства систем (2.6) не существует управления, обеспечивающего его устойчивость. Поэтому необходима проверка устойчивости системы.

Ограничимся здесь лишь требованием выполнения достаточных условий устойчивости линейных дискретных систем

$$\max \left\| A_i^{\mathrm{T}} \right\| \leqslant q_i < 1, \ i = \overline{1; m-1}, \quad \max_{\underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}} \left\| A_m^{\mathrm{T}} + k C^{\mathrm{T}} \right\| \leqslant q_m < 1. \tag{2.30}$$

В m-мерном пространстве элементов a_{ij}, где $j = \overline{1;m}$, множество $\overset{*}{\mathbf{A}}_i$, удовлетворяющее условиям (2.30), определяет m-мерный центрально-

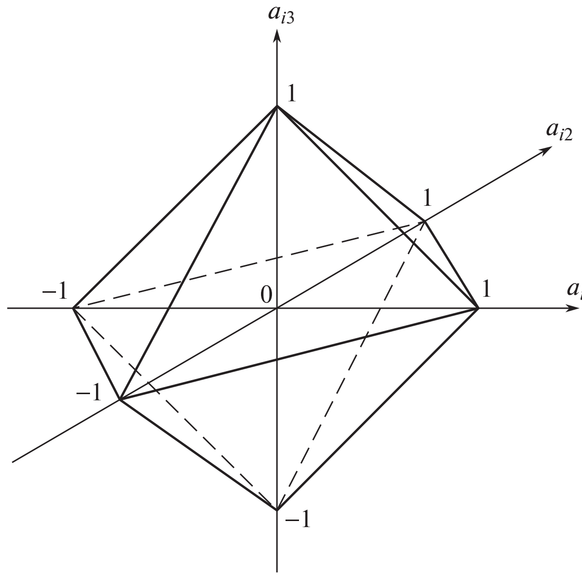

Рис. 2.

симметрический выпуклый многогранник как выпуклую оболочку, натянутую на систему векторов

$$\overset{*}{\mathbf{A}}_i = \operatorname{conv}\left\{ \underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \ldots \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\|}_{2m} \right\} m.$$

На рис. 2 при $m = 3$ показано множество $\overset{*}{\mathbf{A}}_i$.

Семейство систем (2.28) устойчиво, если имеют место условия

$$A_i \in \mathbf{A}_i = \left\{ A_i^{\mathrm{T}} : \| A_i^{\mathrm{T}} \|_1 < 1 \right\}, \quad i = \overline{1; m}, \tag{2.31}$$

и тогда система (2.29) имеет ограниченное инвариантное множество. Я.З. Цыпкин и Б.Т. Поляк в [10] вывели достаточное условие для включения (2.31).

Примем, что эти достаточные условия робастной устойчивости (2.30) выполняются и, следовательно, система (2.29) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Определим радиус инвариантного множества системы (2.29).

Так как множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ интервальное, а радиус суммы по Минковскому двух интервальных множеств равен сумме их радиусов, то

$$R\left[\overset{*}{\Gamma}\left(\overset{*}{\mathbf{X}}\right)+\mathbf{Z}\right]=R\left[\overset{*}{\Gamma}\left(\overset{*}{\mathbf{X}}\right)\right]+R(\mathbf{Z}). \tag{2.32}$$

Поскольку система (2.28) линейная, то справедливо равенство $R[\overset{*}{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}})] = \alpha R(\overset{*}{\mathbf{X}})$.

Так как семейство систем (2.28) асимптотически устойчиво, то $\alpha \leqslant q < 1$. Тогда из (2.32) получаем оценку снизу радиуса инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ в виде

$$R(\overset{*}{\mathbf{X}}) \leqslant \frac{R(\mathbf{Z})}{1-q}.$$

Радиус $R(\overset{*}{\mathbf{X}})$ интервального инвариантного множества — аналог величины дисперсии при стохастической природе возмущения.

3. Минимизация воздействия возмущений на системы с нелинейными функциями с двухсторонними нелинейными ограничениями

Постановка задачи: задано семейство систем (2.1), (2.2), а нелинейная функция $f[\sigma(X_n)]$ задана с точностью до сомножителя k, о пределах изменения которого известно, что $1 > \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}$, т.е.

$$\underline{k}\overset{*}{f}[\sigma(X_n)] \leqslant f[\sigma(X_n)] \leqslant \bar{k}\overset{*}{f}[\sigma(X_n)], \quad \sigma(X_n) = C^{\mathrm{T}}X_n. \tag{3.1}$$

Функция $\overset{*}{f}(\cdot)$ — монотонная знакопеременная, такая что $\overset{*}{f}(0) = 0$ и $\overset{*}{f}[-\sigma(X_n)] = -\overset{*}{f}[\sigma(X_n)]$. Двухсторонние ограничения (3.1) определяют многозначное отображение $\eta(\sigma_n)$, поэтому далее будем говорить о системе (2.1), (2.2) с многозначным отображением

$$\eta(\sigma_n) = \left\{\sigma_n : 0 < \underline{k}\overset{*}{f}(\sigma_n) \leqslant \overset{*}{f}(\sigma_n) \leqslant \bar{k}\overset{*}{f}(\sigma_n)\right\}. \tag{3.2}$$

Многозначное отображение $\eta(X)$ с нелинейными границами преобразует величины σ_n в интервалы $\mathbf{f}_n = \{f : \underline{k}\overset{*}{f}(\sigma_n) \leqslant \overset{*}{f}(\sigma_n) \leqslant \bar{k}\overset{*}{f}(\sigma_n)\}$, размеры (радиусы) которых нелинейно зависят от σ_n (см. рис. 3).

Требуется определить управление для семейства систем (2.1), (2.2), (3.2)

$$U_n = \Gamma(X_n), \tag{3.3}$$

минимизирующее радиус инвариантного множества семейства систем (2.1), (2.2), (3.2), (3.3) при условии, что параметры этого семейства систем таковы,

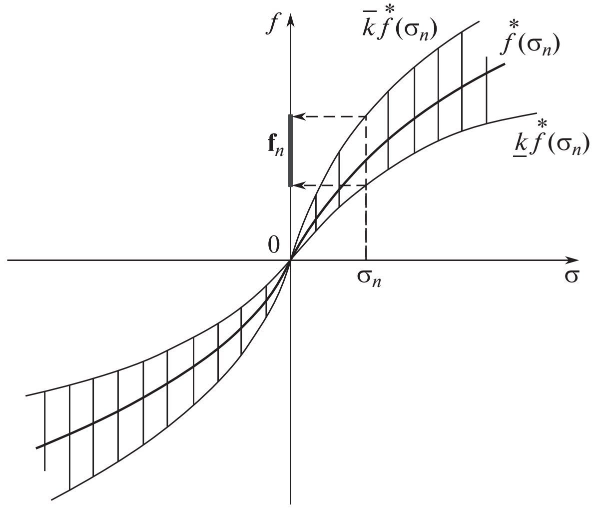

Рис. 3.

что при управлении (3.2) инвариантное множество ограничено. Необходимым условием этого является робастная устойчивость семейства автономных систем

$$X_{n+1} = AX_n + k\eta(X_n)B + S\Gamma(X_n), \quad 1 < \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}.$$

Примем, что требуемое множество управлений (3.2) не пусто. Определим радиус инвариантного множества как функцию параметров семейства систем (2.1), (2.2), (3.2), (3.3). Для этого определим уравнение эволюции множества этого семейства систем. Общая схема решения этой задачи остается такой же, как и выше, но с внесением необходимых изменений, учитывающих наличие нелинейных ограничений на нелинейную функцию. Так как множество

$$\mathbf{X}'_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}}} \left[AX_n + k\overset{*}{f}(\cdot)B + SU_n \right]$$

неинтервальное, то, как и выше, аппроксимируем его интервальным множеством минимального объема (2.20), где величины $\underline{x}''_{m,n+1}$, $\bar{x}''_{m,n+1}$, в отличие от (2.11)–(2.14), определяются в виде

$$\underline{x}''_{m,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_m}} \left\{ \psi_m(\cdot) = A_m^{\mathrm{T}} X_n + \eta(\sigma_n) + \tilde{u}_{mn} \right\}, \tag{3.4}$$

$$\bar{x}''_{m,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_m^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_m}} \left\{ \psi_m(\cdot) = A_m^{\mathrm{T}} X_n + \eta(\sigma_n) + \tilde{u}_{mn} \right\}, \tag{3.5}$$

где $\tilde{U}_n = S^{-1}U_n$, а для величин $\underline{x}''_{i,n+1}$, $\bar{x}''_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m-1}$, в силу оговоренных свойств функции $\overset{*}{f}(\cdot)$ и центрально-симметричности множеств $\bar{\mathbf{X}}_n$ справедливы равенства $\underline{x}''_{i,n+1} = \underline{x}'_{i,n+1}$, $\bar{x}''_{i,n+1} = \bar{x}'_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m-1}$.

Экстремумы монотонной функции $\psi_m(\cdot)$ принадлежат вершинам X_n^l выпуклого центрально-симметрического множества $\bar{\mathbf{X}}_n$ и границам $k_1 = \underline{k}$, $k_2 = \bar{k}$ интервала значений k. Поэтому задачи (3.4), (3.5) заменим комбинаторными задачами

$$\underline{x}''_{m,n+1} = \min_{\substack{l=\overline{1;2^m} \\ j=\overline{1;2}}} \left\{ A_m^{\mathrm{T}} X_n^l + k_j \overset{*}{f}(\sigma_n^l) \right\}, \quad \bar{x}''_{m,n+1} = \max_{\substack{l=\overline{1;2^m} \\ j=\overline{1;2}}} \{ A_m^{\mathrm{T}} X_n^l + k_j \overset{*}{f}(\sigma_n^l) \}.$$

Принимая во внимание невысокую размерность этих задач, их решения найдем полным перебором всех вариантов. Найденные величины $\underline{x}''_{i,n+1}$, $\bar{x}''_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m-1}$, и величины $\underline{x}''_{m,n+1}$, $\bar{x}''_{m,n+1}$ определяют эволюцию семейства интервальных множеств

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = G\Big(\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n) \Big), \quad G(\cdot) = g_m \left[\gamma_m \left(\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{mn}) \right) \right] \times \ldots \times g_m \left[\gamma_m \left(\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{mn}) \right) \right].$$

Радиус множества $G(\bar{\mathbf{X}}_n)$ (2.18) определяется как сумма радиусов $r_i(\cdot) = 2[\bar{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in})]$, $i = \overline{1; m}$.

3.1. Решение задачи синтеза управления

Для получения гарантированного результата управления $\tilde{u}_{in}$, $i = \overline{1; m}$, будем искать из решения задач

(3.6) $$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{in} \in \mathbf{z}_i}} \left| A_i^{\mathrm{T}} X_n + z_{in} + \tilde{u}_{in} \right|, \quad i = \overline{1; m-1},$$

(3.7) $$\min_{\tilde{u}_{mn}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{mn} \in \mathbf{z}_m \\ k \in \chi}} \left| A_m^{\mathrm{T}} X_n + k \overset{*}{f} [\sigma(X_n)] + z_{mn} + \tilde{u}_{mn} \right|.$$

Представим множество χ в центрированной форме

$$\chi = \overset{\circ}{k} + \delta\chi, \quad \overset{\circ}{k} = 0{,}5(\bar{k} + \underline{k}), \quad \Delta k \in \delta\chi = \{ \Delta k : |\Delta k| \leqslant 0{,}5(\bar{k} - \underline{k}) \}$$

и минимаксные задачи (3.6), (3.7) запишем в виде

(3.8) $$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{in} \in \mathbf{z}_i}} \left| A_i^{\mathrm{T}} X_n + z_{in} + \tilde{u}_{in} \right|, \quad i = \overline{1; m-1},$$

(3.9) $$\min_{\tilde{u}_{mn}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{mn} \in \mathbf{z}_m \\ \Delta k \in \delta\chi}} \left| A_m^{\mathrm{T}} X_n + (\overset{\circ}{k} + \Delta k) \overset{*}{f} [\sigma(X_n)] + z_{mn} + \tilde{u}_{mn} \right|.$$

В силу изложенных выше причин, также как и выше, откажемся от численного решения задач (3.8), (3.9) и ограничимся полученными в [9] субоптимальными управлениями

(3.10) $$\tilde{u}_{in}^* = -A_i X_n, \quad i = \overline{1; m-1}, \quad \tilde{u}_{mn}^* = -\left(A_m X_n + \overset{\circ}{k} \overset{*}{f} [\sigma(X_n)] \right).$$

По определенному вектору $\tilde{U}_n^*$ находим искомый вектор управления $\overset{*}{U}_n = B^{-1}\tilde{U}_n^*$. Подставив найденное управление $\overset{*}{U}_n$ в уравнение движения семейства систем (2.1), (2.2), (3.2),

$$X_{n+1} = AX_n + (\overset{\circ}{k} + \Delta k)\overset{*}{f}\left[\sigma(X_n) = C^{\mathrm{T}} X_n\right] B + SU_n + Z_n, \quad Z_n \in \mathbf{Z},\ \Delta k \in \delta\chi,$$

получим

$$X_{n+1} = \Delta k \overset{*}{f}\left[\sigma(X_n)\right] BC^{\mathrm{T}} X_n + Z_n, \quad \Delta k \in \delta\chi,\ Z_n \in \mathbf{Z}. \tag{3.11}$$

Если для X_n задана его оценка (2.10), то из (3.11) получим уравнение эволюции множества $\bar{\mathbf{X}}_n$ в виде

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = G^*(\bar{\mathbf{X}}_n) + \mathbf{Z}, \tag{3.12}$$

где

$$G^*(\bar{\mathbf{X}}) = \bigcup_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ \Delta k \in \delta\chi}} \Delta k \overset{*}{f}(\cdot) BC^{\mathrm{T}} X_n.$$

Множество $G^*(\bar{\mathbf{X}}_n)$ определяется величинами нижних и верхних $\underline{x}_{in}^*$, $\bar{x}_{in}^*$, $i = \overline{1;m}$, пределов интервальных множеств $g_i(\bar{\mathbf{X}}_n)$, $i = \overline{1;m}$. Эти величины получим из решения задач, аналогичных задачам (2.26), (2.27).

Приняв $\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \bar{\mathbf{X}}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$ и подставив эти величины в (3.12), получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = G^*(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}, \tag{3.13}$$

решение которого определяет инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Система (3.13) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ только тогда, когда соответствующая ей автономная система

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = G^*(\bar{\mathbf{X}}_n) \tag{3.14}$$

асимптотически устойчива в целом или в области, содержащей начало координат.

Откажемся от избыточного в приложениях требования сохранения устойчивости в целом и ограничимся требованием устойчивости в области. Для анализа устойчивости семейства автономных систем (3.13) воспользуемся результатом работы [11], в которой принцип сжатых отображений обобщен на класс нелинейных разностных включений.

Теорема 1 [11]. *Введем функцию Ляпунова в форме*

$$\rho(\mathbf{X}_n) = \max_{X \in \mathbf{X}_n} \|X\|.$$

Если ее первая разность, вычисленная вдоль траектории системы (3.14), *отрицательно определенная, т.е.*

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \rho[\mathbf{F}(\mathbf{X}_n)] - \rho(\mathbf{X}_n) < 0 \quad \forall n, \tag{3.15}$$

то тривиальное решение системы (3.14) *асимптотически устойчиво.*

Следствие 1. Если начало координат – центр множества $\mathbf{X}_n$, т.е. центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг $\mathbf{X}_n$, является началом координат, то значение функции $\rho(\mathbf{X}_n)$, вычисленной по уравнению (3.14) *при использовании нормы $\|X\|_1$, совпадает с радиусом описанной сферы, и из выполнения неравенства* (3.15) *следует, что имеет место включение*

$$\mathbf{X}_{n+1} \subset \mathbf{X}_n. \tag{3.16}$$

Нетрудно показать, что для интервальных множеств $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{X}_{n+1}$ с центрами в начале координат строгое включение (3.16) имеет место, если и только если по крайней мере одно из системы нестрогих неравенств $\underline{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) \geqslant \underline{x}_{in}(\tilde{u}_{in})$, $\bar{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) \leqslant \bar{x}_{in}(\tilde{u}_{in})$, $i = \overline{1;m}$, является строгим.

Примем, что многозначное отображение (3.2) таково, что для множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = G^*(\bar{\mathbf{X}}_n)$ имеет место включение $\bar{\mathbf{X}}_{n+1} \subset \bar{\mathbf{X}}_n$, что является достаточным условием устойчивости семейства нелинейной системы (3.14) и необходимым условием существования ограниченного инвариантного множества системы (3.13). В общем случае возможна такая ситуация, когда несмотря на то, что управление $\overset{*}{U}_n$ субоптимально в оговоренном смысле, из этого не следует, что оно гарантирует робастную устойчивость семейства нелинейных систем (3.14), так как это семейство систем в общем случае может быть настолько широким (радиус множества $\delta\chi$ настолько велик), что не существует управления, обеспечивающего робастную устойчивость всего этого семейства систем.

Определить в аналитической форме решение нелинейного уравнения (3.13) относительно искомого множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ невозможно, и оно может быть найдено лишь с помощью какой-либо *итерационной процедуры.* В качестве начального приближения примем $\overset{*}{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{Z}$. Далее на первом шаге определяем $G(\overset{*}{\mathbf{X}}_1)$ и находим величины $r_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,1})$, $i = \overline{1;m}$, и $\Delta r_i = r_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,1}) - r_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,0})$, $i = \overline{1;m}$. Затем действуем по правилу деления отрезков $\Delta r_{i,p}$ пополам, а величины $r_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,p})$, $i = \overline{1;m}$, где p – номер итерации, изменяем по алгоритму

$$r_{i,p+1}(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,p+1}) = r_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,p}) + 0{,}5\Delta r_{i,p}, \quad i = \overline{1;m}.$$

Этот итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не будут выполнены неравенства $|\Delta r_{i,p}| \leqslant \varepsilon$, $i = \overline{1;m}$, где ε – заданная допустимая погрешность.

Предложенный алгоритм обеспечивает сходимость процесса итераций со скоростью геометрической прогрессии.

4. Минимизация воздействия возмущений на системы с ограничениями по норме

Постановка задачи: задано семейство систем (2.1), (2.2), но скалярная нелинейная функция $f(X_n)$ – функция векторного аргумента – имеет вид

$$f(X_n) = k \sum_{i=1}^{m} |x_{in}| \operatorname{sign}(C^{\mathrm{T}} X_n), \quad 1 > \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}. \tag{4.1}$$

Соотношение (4.1) определяет **многозначное отображение** вектора X_n в интервал

$$\mathbf{f}_n = \left\{ f : \underline{k} \|X_n\|_1 \leqslant k \|X_n\|_1 \leqslant \bar{k} \|X_n\|_1 \right\}, \tag{4.2}$$

размеры (радиусы) которого нелинейно зависят от $\|X_n\|_1$, а положение на оси $0x$ определяется значением $\operatorname{sign}(C^{\mathrm{T}} X_n)$. Поэтому исследование системы (2.1), (2.2), (4.1) сводится к исследованию семейства нелинейных систем

$$X_{n+1} = AX_n + kf(X_n)B + SU_n + Z_n, \tag{4.3}$$

где $1 > \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}$, $Z_n \in \mathbf{Z}$.

Требуется определить управление

$$U_n = \Phi(X_n), \tag{4.4}$$

минимизирующее радиус инвариантного множества семейства систем (2.1), (2.2), (4.1)–(4.4) при условии, что параметры системы (2.1), (2.2), (4.1) таковы, что это инвариантное множество ограничено. Необходимым условием этого является робастная устойчивость семейства автономных систем

$$X_{n+1} = AX_n + k \sum_{i=1}^{m} |x_{in}| \operatorname{sign}\left(C^{\mathrm{T}} X_n\right) + S\Phi(X_n). \tag{4.5}$$

Примем, что множество управлений (4.4) непустое.

Определим сначала радиус инвариантного множества как функцию параметров семейства систем (2.1), (2.2), (4.5). Для этого определим уравнение эволюции множеств этого семейства систем. Общая схема решения этой задачи остается такой же, как и выше, но с изменениями, учитывающими особенности рассматриваемой функции $f(X_n)$.

При оценке вектора X_n в виде (2.8) из (2.1) и (4.4)–(4.5) следует, что динамика такой системы описывается нелинейным разностным включением

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ k \in \chi}} AX_n + k \sum_{i=1}^{m} |x_{in}| \operatorname{sign}(C^{\mathrm{T}} X_n) B + SU_n + \mathbf{Z}.$$

Также, как и выше, введем обозначение $\tilde{U}_n = SU_n$ и неинтервальное множество $\mathbf{X}_{n+1}$ аппроксимируем интервальным множеством минимального объема $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$, для которого границы $\underline{x}_{i,n+1}$, $\bar{x}_{i,n+1}$, $i=\overline{1;m-1}$, интервальных множеств $\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}$, $i=\overline{1;m-1}$, определяются соотношениями (2.15), а границы $\underline{x}_{m,n+1}$, $\bar{x}_{m,n+1}$ интервального множества $\bar{\mathbf{x}}_{m,n+1}$ – решения задач

$$\underline{x}_{m,n+1}=\min_{\substack{X_n\in\bar{\mathbf{X}}_n\\ z_{mn}\in\mathbf{z}_m\\ \underline{k}\leqslant k\leqslant\bar{k}}}\left\{\gamma(\cdot)=A_m^{\mathrm{T}}X_n+k\sum_{i=1}^{m}|x_{i,n}|\operatorname{sign}(C^{\mathrm{T}}X_n)+z_{mn}+\tilde{u}_{mn}\right\},\tag{4.6}$$

$$\bar{x}_{m,n+1}=\max_{\substack{X_n\in\bar{\mathbf{X}}_n\\ z_{mn}\in\mathbf{z}_m\\ \underline{k}\leqslant k\leqslant\bar{k}}}\left\{\gamma(\cdot)=A_m^{\mathrm{T}}X_n+k\sum_{i=1}^{m}|x_{i,n}|\operatorname{sign}(C^{\mathrm{T}}X_n)+z_{mn}+\tilde{u}_{mn}\right\}.\tag{4.7}$$

Экстремумы выпуклой функции $\gamma(\cdot)$ принадлежат вершинам X_n^l множества $\bar{\mathbf{X}}_n$ и границам $k_1=\underline{k}$, $k_2=\bar{k}$ интервала значений k. Поэтому задачи (4.6), (4.7) – комбинаторные задачи

$$\underline{x}_{m,n+1}(\tilde{u}_{mn})=\min_{\substack{l=\overline{1;2^m}\\ z_{mn}\in\mathbf{z}_m\\ j=\overline{1;2}}}\left\{A_m^{\mathrm{T}}X_n^l+k_j\sum_{i=1}^{m}\left|x_{i,n}^l\right|\operatorname{sign}(C^{\mathrm{T}}X_n^l)+z_{mn}+\tilde{u}_{mn}\right\},\tag{4.8}$$

$$\bar{x}_{m,n+1}(\tilde{u}_{mn})=\max_{\substack{l=\overline{1;2^m}\\ z_{mn}\in\mathbf{z}_m\\ j=\overline{1;2}}}\left\{A_m^{\mathrm{T}}X_n^l+k_j\sum_{i=1}^{m}\left|x_{i,n}^l\right|\operatorname{sign}(C^{\mathrm{T}}X_n^l)+z_{mn}+\tilde{u}_{mn}\right\}.\tag{4.9}$$

Принимая во внимание невысокую размерность задач (4.8), (4.9), их решения найдем полным перебором всех вариантов. Так как для функции $\overset{*}{f}(X)$ справедливо равенство $\overset{*}{f}(-X)=-\overset{*}{f}(X)$, то размерность задач (4.8), (4.9) можно существенно понизить, определяя их решения только для тех вершин X_n^l, для которых справедливо соотношение $C^{\mathrm{T}}X_n^l\geqslant 0$. При этом справедливо равенство $\underline{x}_{m,n+1}=-\bar{x}_{m,n+1}$. Поэтому определение величин $\underline{x}_{i,n+1}$, $\bar{x}_{i,n+1}$, $i=\overline{1;m}$, требует решения лишь задач

$$\bar{x}_{m,n+1}=\max_{\substack{j=\overline{1;2}\\ l:\ C^{\mathrm{T}}X_n^l\geqslant 0}}\left\{A_m^{\mathrm{T}}X_n^l+k_j\sum_{i=1}^{m}\left|x_{i,n}^l\right|+z_{mn}+\tilde{u}_{mn}\right\},$$

т.е. только для таких индексов l, для которых справедливо нестрогое неравенство $C^{\mathrm{T}}X_n^l\geqslant 0$.

Найденные величины $\underline{x}_{i,n+1}$, $\bar{x}_{i,n+1}$, $i=\overline{1;m}$, определяют семейство интервальных множеств (2.10) и, следовательно, множеств $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}=\Phi[\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]$. Будем далее рассматривать эволюцию интервальных множеств

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1}=\Phi[\bar{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]+\mathbf{Z}.$$

Радиус $R(\cdot)$ множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ в силу (2.18) равен

$$R[\bar{\mathbf{X}}_{n+1}] = \sum_{i=1}^{m} r_i[\phi_i(\cdot)],$$

и задача $\min\limits_{U_n} \bar{\mathbf{X}}_n$ сводится к решению задач $\min\limits_{\tilde{u}_{in}} r_i[\phi_i(\cdot)]$, $i = \overline{1;m}$.

Так как $r_i = 2[\bar{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in})]$, $i = \overline{1;m}$, то для получения гарантированного результата управления $\tilde{u}_{in}$, $i = \overline{1;m}$, будем искать как решения задач

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{in} \in \mathbf{z}_i}} \left| A_i^{\mathrm{T}} X_n + z_{in} + \tilde{u}_{in} \right|, \quad i = \overline{1;m-1}, \tag{4.10}$$

$$\min_{\tilde{u}_{mn}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{mn} \in \mathbf{z}_m \\ k \in \chi}} \left| A_m^{\mathrm{T}} X_n + k \sum_{i=1}^{m} |x_{in}| \mathrm{sign}\left(C^{\mathrm{T}} X_n\right) + z_{mn} + \tilde{u}_{mn} \right|. \tag{4.11}$$

Так же, как и выше, представим множество χ в центрированной форме и перепишем минимаксные задачи (4.10), (4.11) в виде

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{in} \in \mathbf{z}_i}} \left| A_i^{\mathrm{T}} X_n + z_{in} + \tilde{u}_{in} \right|, \quad i = \overline{1;m-1}, \tag{4.12}$$

$$\min_{\tilde{u}_{mn}} \max_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ z_{mn} \in \mathbf{z}_m \\ \Delta k \in \delta\chi}} \left| A_m^{\mathrm{T}} X_n + (\mathring{k} + \Delta k) \sum_{i=1}^{m} |x_{i,n}| \mathrm{sign}(C^{\mathrm{T}} X_n) + z_{mn} + \tilde{u}_{mn} \right|. \tag{4.13}$$

Так как минимаксные задачи (4.12), (4.13) не имеют решений в аналитической форме, то по изложенным выше причинам откажемся от численных методов получения их решений и ограничимся использованием субоптимального управления, полученного с точностью до обозначений в [9] и имеющего вид

$$\tilde{u}_{in}^* = -A_i^{\mathrm{T}} X_n, \quad i = \overline{1;m-1}, \quad \tilde{u}_{1n}^* = -\left[A_m^{\mathrm{T}} X_n + \mathring{k} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_{i,n}| \right) \mathrm{sign}(C^{\mathrm{T}} X_n) \right].$$

По найденному вектору $\tilde{U}_n^*$ определяем искомый вектор управления $\overset{*}{U}_n = B^{-1}\tilde{U}_n^*$. Подставив управление $\overset{*}{U}_n$ в уравнение движения системы (4.3), получим

$$X_{n+1} = \Delta k \sum_{i=1}^{m} |x_{in}| \mathrm{sign}(C^{\mathrm{T}} X_n) B + Z_n, \quad \Delta k \in \delta\chi, \; Z_n \in \mathbf{Z}. \tag{4.14}$$

При оценке вектора X_n из (4.16) получим

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \bar{\mathbf{X}}_n \\ \Delta k \in \delta\chi}} \Delta k \sum_{i=1}^{m} |x_{in}| \mathrm{sign}\left(C^{\mathrm{T}} X_n\right) B + \mathbf{Z}. \tag{4.15}$$

Отметим, что множество $\mathbf{X}_{n+1}$, определяемое соотношением (4.15), интервальное. Воспользовавшись описанной выше методикой, найдем нижние $\underline{x}_{i,n+1}$ и верхние $\bar{x}_{i,n+1}$, $i = \overline{1;m}$, границы множеств $\mathbf{x}_{i,n+1} = \phi_i(\bar{\mathbf{X}}_n)$, $i = \overline{1;m}$, и запишем соотношение (4.15) в виде

$$\mathbf{X}_{n+1} = \Phi^*(\mathbf{X}_n) + \mathbf{Z}. \tag{4.16}$$

Приняв $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$ и подставив эти величины в (4.16), получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \Phi^*(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}, \tag{4.17}$$

определяющее искомое инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Система (4.17) имеет ограниченное инвариантное множество лишь тогда, когда соответствующая ей автономная система

$$\bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \Phi^*(\bar{\mathbf{X}}_n)$$

устойчива в целом или в заданной области.

В разделе 3 показано, что процесс эволюции множеств $\mathbf{X}_n$, определяемый уравнением (4.17), устойчив, если имеет место включение (3.16), и там же была приведена система неравенств, выполнение которых является достаточным условием устойчивости нелинейной системы (4.17). Примем, что эти условия выполняются и, следовательно, система имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Уравнение (4.16) не имеет аналитического решения, и поэтому для определения его решения воспользуемся подробно описанной в разделе 3 итерационной процедурой.

5. Заключение

Решена задача минимизации воздействия ограниченных возмущений на некоторые классы управляемых нелинейных дискретных динамических систем. Мерой оценки воздействия ограниченных возмущений на динамическую систему принят радиус интервальных инвариантных множеств — аналог величины дисперсии при вероятностной природе возмущений. Рассмотрены часто встречающиеся в приложениях случаи, когда для нелинейных функций заданы лишь те или иные их оценки.

Показано, что для случая, когда ограничения, образующие многозначные отображения на нелинейную функцию, линейны, исследование таких систем сводится к исследованию семейств линейных систем, и показано, что дискретный аналог гипотезы Айзермана для дискретных систем справедлив. Если ограничения, образующие многозначные отображения, нелинейны, то исследование таких систем сводится к исследованию семейств нелинейных систем.

Определение управления, обеспечивающего получение гарантированного результата при минимизации радиуса интервального множества, сводится к решению минимаксных задач, не имеющих решений в аналитической форме.

Для нелинейных систем уравнение, определяющее радиус инвариантного множества, не имеет аналитического решения и искомое решение может быть определено лишь с помощью итерационной процедуры. Предложено использование субоптимального управления, определяемого в аналитической форме.

Приведен пример, иллюстрирующий предложенный способ определения инвариантного множества минимального радиуса для семейства нелинейных систем.

Полученные результаты очевидным образом обобщаются как на случай систем со многими нелинейностями рассмотренных видов, так и на тот случай, когда для матрицы линейной части системы задана лишь ее оценка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Иллюстративный пример. Для семейства систем (2.1), (2.2), (3.1) при $m = 2$, имеющего вид

$$X_{n+1} = AX_n + k\overset{*}{f}\left[\sigma(C^{\mathrm{T}}X_n)\right]B + SU_n + Z_n, \tag{П.1}$$

где A – матрица 2×2, $B^{\mathrm{T}} = (0, 1)$, S – единичная матрица, $1 \leqslant \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}$,

$$\overset{*}{f}\left[\sigma(C^{\mathrm{T}}X_n)\right] = \operatorname{arctg}(C^{\mathrm{T}}X_n), \tag{П.2}$$

при значениях параметров $a_{11} = 0{,}5$, $a_{12} = 0{,}7$, $a_{21} = 0{,}7$, $a_{22} = 0{,}5$, $c_1 = c_2 = 1$, $\underline{k} = 0{,}6$, $\bar{k} = 1{,}4$, и заданных априори предельных значениях возмущений $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| \leqslant 1$, требуется определить субоптимальное управление (3.10) и размер соответствующего ему интервального множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Из (3.10) для (П.1), (П.2) имеем

$$u_{1n}^* = -A_1^{\mathrm{T}}X_n, \quad u_{2n}^* = -\left(A_2^{\mathrm{T}}X_n + \overset{\circ}{k}\operatorname{arctg}(C^{\mathrm{T}}X_n)\right), \tag{П.3}$$

где $A_1^{\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{12})$, $A_2^{\mathrm{T}} = (a_{21}, a_{22})$, $\overset{\circ}{k} = 0{,}5(\overline{k} + \bar{k})$.

Подставив (П.3) в (П.1), получим

$$X_{n+1} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \Delta k \operatorname{arctg}(C^{\mathrm{T}}X_n) \end{Vmatrix} + Z_n, \quad Z_n \in \mathbf{Z}, \tag{П.4}$$

$$\Delta k \in \delta\chi = \{k : \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k}\} - \overset{\circ}{k}. \tag{П.5}$$

Ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ семейства систем (П.4), (2.2), (П.5) существует, если автономная система

$$X_{n+1} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \Delta k \operatorname{arctg}(x_{1n} + x_{2n}) \end{Vmatrix}, \quad \Delta k \in \delta\chi, \tag{П.6}$$

устойчива.

Для анализа устойчивости семейства систем (П.6) введем функцию Ляпунова

$$v_n = \|X_n\|_1 = \sum_{i=1}^{2} |x_{in}| \tag{П.7}$$

и определим величину $\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ вдоль траектории движения семейства систем (П.6) как

$$\Delta v_n = |\Delta k \ \mathrm{arctg}(x_{1n} + x_{2n})| - (|x_{1n}| + |x_{2n}|), \ \Delta k \in \delta\chi.$$

Нетрудно убедиться в том, что если $|\Delta k| < 1$, то $\Delta v_n < 0$ и, следовательно, семейство систем (П.6) устойчиво.

Определим интервальное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ из решения уравнения

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = G(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}, \tag{П.8}$$

используя описанную в разделе 3 итерационную процедуру. В качестве нулевого приближения выберем множество

$$\overset{*}{\mathbf{X}}_0 = \mathrm{conv}\left\{\left\|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right\|\right\}.$$

Примем в качестве критерия останова итерационной процедуры величину

$$\varepsilon = \left|\frac{R(\overset{*}{\mathbf{X}}_{p+1}) - R(\overset{*}{\mathbf{X}}_p)}{R(\overset{*}{\mathbf{X}}_{p+1})}\right| \leqslant 0{,}05,$$

где p – номер итерации. После четырех итераций достигнем заданной точности для искомого приближенного решения

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \mathrm{conv}\left\{\left\|\begin{matrix}1\\1{,}47\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}-1\\1.47\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}-1\\-1{,}47\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}1\\-1{,}47\end{matrix}\right\|\right\}.$$

Соответственно, величины радиусов вычисляются как $R(\overset{*}{\mathbf{x}}_1) = 2$ и $R(\overset{*}{\mathbf{x}}_2) = 2{,}94$, а радиус построенного интервального инвариантного множества равен их сумме, $R(\overset{*}{\mathbf{X}}) = 4{,}94$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
2. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств. Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 2016.

3. *Mazko A.G.* Cone inequalities and stability of dynamical systems // Nonlinear Dynam. Syst. Theory. 2011. V. 11. No. 3. P. 303–318.
4. *Vandergraft J.S.* Spectral properties of matrices which have invariant cones // SIAM. J. Appl. Math. 1968. V. 16. P. 1208–1222.
5. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикл. мат. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 246–248.
6. *Айзерман М.А.* Об одной проблеме касающейся устойчивости «в большом» динамических систем // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. Вып. 4. С. 186–188.
7. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.* Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Тр. Шестой Междунар. конф. по дифференц. и функцион.-дифференц. уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2011). Ч. 1, СМФН, 45. М.: РУДН, 2012. С. 105–121.
8. *Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.* Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управление ими // Проблемы управления и информатики. 2010. № 1. С. 5–21.
9. *Кунцевич В.М.* Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 178–186.
10. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техн. кибернетика. 1991. Т. 32. С. 3-31.
11. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 5. С. 11–17.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 13.07.2018

После доработки 04.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018