Автоматика и телемеханика, № 9, 2019

© 2019 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Г.В. СМИРНОВ (smirnov@math.uminho.pt)
(University of Minho, Braga, Portugal)

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАТРИЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ[1]

Рассматривается поведение траекторий многомерных линейных дискретных систем при ненулевых начальных условиях для двух случаев. Первый – системы с бесконечной степенью устойчивости (процессы конечной длительности), второй – устойчивые системы со спектральным радиусом, близким к единице. Показано, что в обоих случаях возможны большие уклонения траекторий от положения равновесия. Применение этих результатов к ускоренным методам безусловной оптимизации (типа метода тяжелого шарика) поясняет наблюдавшееся в экспериментах немонотонное поведение этих методов.

Ключевые слова: дискретные системы, переходные процессы, устойчивость, большие уклонения, бесконечная степень устойчивости, многомерные системы, метод тяжелого шарика.

DOI: 10.1134/S0005231019090083

1. Введение

Свойства переходных процессов в линейных системах были одной из важных тем в исследованиях Я.З.Цыпкина; достаточно вспомнить название его первой монографии — *“Переходные и установившиеся процессы в импульсных сетях”* [1] и работу [2]. Данная статья касается одного из аспектов этой темы — возможности больших уклонений траекторий линейных устойчивых систем от положения равновесия при ненулевых начальных условиях. Эта линия исследований была начата пионерской статьей А.А.Фельдбаума [3]. Однако затем эта тематика не получила должного развития; под переходными процессами в основном понимались реакции системы на единичный скачок при нулевых начальных условиях (впрочем, эти задачи тесно связаны). Существенным прорывом стала статья Р.Н. Измайлова [4], где показана неизбежность больших уклонений траектории от нуля, если полюса замкнутой системы сильно сдвинуты в левую полуплоскость комплексной плоскости. В [5–7] это направление исследований было продолжено и получены оценки возможных уклонений сверху и снизу. Все упомянутые выше работы относились к непрерывным системам. Ситуация с дискретными системами представлялась значительно более сложной. Здесь в основном получены оценки на верхние границы уклонений, см., например, [8–12], где можно найти

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-11-10015).

ссылки и на другие работы. Первые результаты (для скалярных разностных уравнений) по нижним границам были получены в [13], где показано, что при корнях характеристического полинома, близких к единице (т.е. к границе устойчивости), существуют начальные условия, приводящие к большим уклонениям траектории от нуля, и даны оценки таких уклонений. Однако эти результаты отличаются от ситуации для непрерывных систем — там наиболее важным эффектом было наличие больших уклонений при большой степени устойчивости (т.е. при сдвиге корней характеристического полинома в левую часть комплексной плоскости). В настоящей работе исследуется аналог подобного эффекта для дискретных систем. Именно, показывается, что для систем *с бесконечной степенью устойчивости* (на русском языке говорят также о *процессах с конечной длительностью*, в англоязычной литературе применяется термин *dead-beat control*) также возможны большие уклонения. По-видимому, такого типа результаты ранее не были известны. Заметим, что сама возможность конечного окончания процесса с помощью линейной обратной связи была обнаружена Я.З. Цыпкиным еще в 1950 г. [2], а явный вид такого регулятора получен Калманом и Бертрамом [14, 15]. Во второй части статьи исследуются линейные дискретные *матричные* системы и получены обобщения результатов [13] (относившихся к *скалярным* системам) на этот случай. В качестве важного примера рассматриваются системы второго порядка, описывающие поведение *метода тяжелого шарика* для безусловной минимизации гладких функций. Показано, что такому методу присуще немонотонное поведение итераций.

Далее $||x||$ всюду обозначает *эвклидову* норму вектора x, соответственно скалярное произведение векторов записывается как (x, y), $||A||$ означает спектральную норму матрицы A, e_k — k-й орт пространства R^n :$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$, запись $A \geqslant B$ означает, что матрица $A - B$ неотрицательно определена, I — единичная матрица.

2. Бесконечная степень устойчивости

Рассмотрим линейные дискретные системы со скалярным управлением вида

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $x_k \in R^n$ – вектор состояния, A – матрица $n \times n$, u_k – скалярное управление, $b \in R^n$. Предполагается, что система управляема, т.е. матрица управляемости

$$W = [b\, Ab \ldots A^{n-1}b] \tag{2}$$

невырождена. Известно [15], что в этом случае, выбирая линейную обратную связь по состоянию

$$u_k = K^{\mathrm{T}} x_k, \quad K \in R^n, \tag{3}$$

можно добиться любого расположения собственных значений матрицы F замкнутой системы

$$x_{k+1} = Fx_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad F = A + bK^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

В частности, можно сделать матрицу замкнутой системы *нильпотентной*, тогда все собственные значения F будут равны нулю и $F^n = 0$. Напомним, что такого рода управление в западной литературе называется *dead-beat control*, а в отечественной литературе говорят о *системах с бесконечной степенью устойчивости* или о *процессах с конечной длительностью*. В этом случае для любого начального условия x_0 будет $x_n = 0$. Такой эффект невозможен в непрерывных системах (с помощью линейной обратной связи нельзя попасть в точку равновесия за конечное время). Впервые, по-видимому, явный вид регулятора, обеспечивающего конечность переходного процесса, получен Калманом и Бертрамом в 1959 г. [14]:

$$K^{\mathrm{T}} = -e_n^{\mathrm{T}} W^{-1} A^n, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Эту формулу легко получить и из известной формулы Аккермана [15], учитывая, что желаемый характеристический полином замкнутой системы имеет вид $s^n = 0$. Естественно было бы думать, что такое управление с бесконечной степенью устойчивости приводит и к малым отклонениям траектории от нуля за первые n шагов. Как увидим, это, вообще говоря, не так, и процессы с конечной длительностью могут приводить к большим перерегулированиям — совершенно аналогично тому, что происходит для непрерывных систем с большой степенью устойчивости [3–7]. Простое объяснение этому видно непосредственно из выражения (5): если система плохо управляема (т.е. матрица управляемости близка к вырожденной), то матрица W^{-1} велика и поэтому матрица $F = A + bK^{\mathrm{T}}$ тоже может быть велика (по норме), поэтому найдется x_0 такое что для $x_1 = Fx_0$ будет $||x_1|| \gg ||x_0||$. Этим наводящим соображениям ниже будет придана точная форма.

Начнем с простого утверждения, позволяющего вычислять отклонения траектории для замкнутых систем с нильпотентной матрицей.

Утверждение 1. *Пусть $F^n = 0$, $x_{k+1} = Fx_k$, P — решение уравнения Ляпунова $F^{\mathrm{T}}PF - P = -I$. Тогда при $x_0 = e$, $Pe = ||P||e$, $||e|| = 1$ будет*

$$\sum_{k=1}^{n-1} ||x_k||^2 = ||P|| - 1, \quad \frac{||P|| - 1}{n-1} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} ||x_k||^2 \leqslant ||P|| - 1. \tag{6}$$

Доказательство совсем просто. Введем $V(x) = (Px, x)$, $V_k = V(x_k)$. Тогда $V_{k+1} = (F^{\mathrm{T}}PFx_k, x_k) = ((P - I)x_k, x_k) = V_k - ||x_k||^2$, $0 = V_n = V_0 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} ||x_k||^2 =$ $= ||P|| - 1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} ||x_k||^2$. Явное решение уравнения Ляпунова имеет вид $P =$ $= I + F^{\mathrm{T}}F + \cdots + (F^{\mathrm{T}})^{n-1}F^{n-1}$, так что заведомо $P > I$, $||P|| > 1$. Таким образом, если $||P||$ достаточно велика, то и отклонение траектории от нуля за первые шаги может быть велико. Заметим еще, что для произвольного начального условия $x_0, ||x_0|| = 1$ в вышеприведенных формулах следует заменить $||P||$ на (Px_0, x_0).

Тривиальный пример:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}, \quad ||P|| = 1 + a^2, \quad x_0 = (0,1)^{\mathrm{T}}, \quad ||x_1||^2 = a^2.$$

Таким образом, при больших a будет также велико и x_1.

Теперь приведем основной результат этого раздела об уклонениях решения системы (1), замкнутой обратной связью (5).

Теорема 1. Если система (1) *приведена к виду $x_{k+1} = Fx_k$, $F = A + bK^{\mathrm{T}}$, $F^n = 0$, то*

1. *для $x_0 = b/||b||$, $||x_0|| = 1$ будет*

(7) $$\max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} ||x_k|| \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} ||m_k||,$$

где m_k — k-й столбец матрицы M^{-1}, M — матрица со строками $l^{\mathrm{T}}A^{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, $l^{\mathrm{T}} = e_n^{\mathrm{T}} W^{-1}$;

2. *при любом $x_0, ||x_0|| = 1$*

(8) $$\max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} ||x_k|| \leqslant \frac{\sigma_n}{\sigma_1},$$

где σ_1 — наименьшее, а σ_n — наибольшее сингулярные числа матрицы M.

Доказательство теоремы приведено в Приложении. Если матрица W плохо обусловлена, то и матрица M^{-1} может быть велика, и уклонения траектории замкнутой системы от нуля за первые итерации могут быть велики.

Вот простейший пример (аналогичный см. в [8]), показывающий что уклонения решения от нуля могут быть действительно большими:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -\varepsilon - 1/\varepsilon \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -1/\varepsilon & -1 \end{pmatrix},$$
$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при ε малых x_1 будет велико. Заметим, что при этом исходные данные A, b, x_0 не содержат больших чисел.

Другой пример иллюстрирует зависимость от размерности n. Пусть матрица задана в "квазифробениусовой" форме

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $a > 1$, а c_k — произвольные числа. Выбирая $K = -(c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ получаем матрицу $F = A + bK^{\mathrm{T}}$ с элементами a над диагональю и всеми остальными элементами, равными нулю. Взяв $x_0 = b = e_n$, последовательно получаем

$x_1 = ae_{n-1}, \ldots, x_{n-1} = a^{n-1}e_1$, $x_n = 0$. Таким образом, при $a > 1$ точки будут экспоненциально расти по норме и лишь на последней итерации обратятся в нуль.

Выше предполагалось, что все собственные значения матрицы замкнутой системы обращаются точно в нуль. Можно было бы получить оценки и для ситуации, когда они близки к нулю; не будем на этом останавливаться.

3. Разностные матричные уравнения

В этом разделе будем рассматривать линейные дискретные системы без управления, описываемые разностными уравнениями вида

$$x_{k+1} = A_1 x_k + A_2 x_{k-1} + \cdots + A_m x_{k-m+1}, \qquad k = m-1, m, \ldots, \tag{9}$$

где $x_k \in R^n$ представляют состояния системы, A_i — матрицы $n \times n$, $x_0, x_1, \ldots x_{m-1}$ — начальные состояния. Интересует вопрос об устойчивости системы (когда $x_k \to 0$) и о возможных уклонениях траекторий от нуля. Проблема устойчивости для одномерного случая ($n = 1$) хорошо изучена — необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения были меньше единицы по модулю [16]. В [13] показано, что при вещественных корнях, достаточно близких к единице, для устойчивых разностных уравнений возможен эффект больших уклонений решений, и дана оценка возможных *всплесков*.

Вопрос об устойчивости решений (9) при матрицах A_i общего вида достаточно сложен. В [17] приведены условия устойчивости для случая, когда матрицы A_i попарно коммутируют. Здесь рассмотрим наиболее простой случай, когда матрицы диагонализируемы, т.е. когда существует преобразование, одновременно переводящее матрицы A_i в диагональные:

$$T^{-1} A_i T = \Lambda_i = \mathrm{diag}\,(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда для переменных $y_k = Tx_k$ система (9) распадается на n скалярных систем

$$y_{k+1}^i = \lambda_1^i y_k^i + \lambda_2^i y_{k-1}^i + \ldots \lambda_m^i y_{k-m+1}^i, \quad i = 1, \ldots m,$$

и для устойчивости (9) необходимо и достаточно, чтобы все эти скалярные системы были устойчивы. Таким образом приходим к следующему утверждению:

Утверждение 2. *Для устойчивости системы* (9) *при одновременной диагонализуемости матриц A_i необходимо и достаточно, чтобы все корни n характеристических полиномов*

$$s^{m+1} = \lambda_1^i s^m + \lambda_2^i s^{m-1} + \cdots + \lambda_m^i, \quad i = 1, \ldots n \tag{10}$$

были по модулю меньше единицы.

С другой стороны, для скалярных разностных уравнений оценки величин возможных уклонений получены в [13]. В частности, там показано (теорема 2.2), что если корни характеристического полинома вещественны и лежат в интервале $[\rho, 1]$, $0 < \rho < 1$, то существуют эффективные оценки снизу для решений. Поскольку для вектора $y = (y^1, \dots, y^n)$ очевидно $||y|| \geqslant |y^i|$ для любого i, то, используя эти оценки и тот факт, что $x_k = T^{-1} y_k$, получаем:

Теорема 2. *Пусть в системе* (9) *матрицы* A_i *одновременно диагонализируемы* $T^{-1} A_i T = \Lambda_i$ *и хотя бы одно из уравнений* (10) *имеет все корни вещественными и лежащими в интервале* $[\rho, 1]$, $0 < \rho < 1$, *тогда найдутся такие* $x_0, x_1, \dots x_{m-1}$, $||x_i|| \leqslant 1$, *что*

$$
\begin{gathered}
||x_k|| \geqslant \sigma \beta_{k,m}, \quad \beta_{k,m} = C_k^{m-1} \rho^{k-m+1}, \\
\max_{k \geqslant m} ||x_k|| \geqslant \sigma \beta_m, \quad \beta_m = \max_{k \geqslant m} \beta_{k,m}.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Здесь σ *— наименьшее сингулярное число матрицы* T, *а* C_k^i *обозначают биномиальные коэффициенты.*

В следующем разделе будут даны примеры использования этой теоремы для анализа двухшаговых методов безусловной минимизации. Предварительно приведем более точные результаты для случая $n = 2$ из [13].

Рассматривается скалярная рекуррентная последовательность

$$x_{k+1} = a_1 x_k + a_2 x_{k-1},$$

ее характеристическое уравнение $s^2 = a_1 s + a_2$. Остановимся сначала на случае, когда оба его корня равны $\rho > 0$,что имеет место при $a_1 = 2\rho$, $a_2 = -\rho^2$. Тогда общее решение имеет вид

$$x_k = x_1 k \rho^{k-1} - x_0 (k-1) \rho^k, \tag{12}$$

при этом для различных начальных условий получаем следующие оценки:

1) $x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_k = k\rho^{k-1} = \beta_{k,2}, \quad \max_k x_k = \beta_2 \approx \dfrac{1}{e(1-\rho)};$

2) $x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_k = k\rho^{k-1} + (k-1)\rho^k;$

3) $x_0 = x_1 = 1, \quad x_k = k\rho^{k-1} - (k-1)\rho^k.$

Нетрудно проверить из формулы (12), что наибольшее уклонение x_k от нуля по всем $|x_0| \leqslant 1$, $|x_1| \leqslant 1$ будет в случае 2), оно приближенно (для ρ, близких к единице) равно $\frac{2}{e(1-\rho)}$ (т.е. приблизительно вдвое больше, чем в случае 1)). В случае 3) последовательность x_k остается меньше единицы для всех k. Таким образом, наибольшее уклонение достигается при начальном условии $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, а при начальном условии $x_0 = x_1 = 1$ всплеска нет вообще.

Для другого случая, когда корни характеристического уравнения равны s_1, s_2, $0 < \rho \leqslant s_1 < s_2 < 1$, то при выборе $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ будет $\max_k x_k \geqslant k\rho^{k-1} \approx \dfrac{1}{e(1-\rho)}$. Легко видеть также, что при выборе $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ решения монотонно убывают.

Таким образом, для случая вещественных (равных или неравных) корней характеристического полинома имеем оценки снизу для максимальных уклонений решения разностного уравнения от нуля при специальных начальных условиях, при равных начальных условиях этого эффекта нет.

4. Матричные уравнения второго порядка

В этом разделе конкретизируем общие оценки для случая уравнений второго порядка и применим их к анализу поведения известного метода безусловной минимизации — метода тяжелого шарика [17, 18]. Этот двухшаговый метод минимизации дифференцируемой функции $f(x)$, $x \in R^n$ имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}),$$

чтобы его определить полностью, надо задать начальные точки x_0, x_1. Стандартный выбор этих условий $x_0 = x_1$, т.е. первый шаг делается по градиентному методу из точки x_0. Для простейшего случая квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$ с симметричной положительно определенной матрицей A метод приобретает вид

$$x_{k+1} = A_1 x_k + A_2 x_{k-1}, A_1 = (1+\beta)I - \alpha A, \quad A_2 = -\beta I, \tag{13}$$

т.е. совпадает с (9) при $m = 2$. Более того, матрицы A_1, A_2 одновременно диагонализируемы, в качестве вещественной матрицы T можно взять систему собственных векторов симметричной матрицы A, т.е. матрицу со столбцами t_i, $At_i = \lambda_i t_i$, $i = 1, \dots, n$. Характеристические полиномы (10) принимают вид

$$s^2 = (1 + \beta - \alpha\lambda_i)s - \beta.$$

Предполагаем матрицу A положительно определенной: $0 < l = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \dots$ $\dots \leqslant \lambda_n = L$; чтобы все указанные квадратные уравнения имели корни, по модулю меньшие единицы, необходимо и достаточно выполнение условий [17, 18]

$$0 \leqslant \beta < 1, \quad 0 < \alpha < \frac{2(1+\beta)}{L}. \tag{14}$$

Более того, максимальный по модулю корень этих уравнений $q = \max|s_i|$ будет минимален при

$$\beta^* = q^2, \quad \alpha^* = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{l})^2}, \quad q = \frac{\sqrt{L} - \sqrt{l}}{\sqrt{L} + \sqrt{l}}. \tag{15}$$

Из этих формул следует, что асимптотическая скорость сходимости метода тяжелого шарика при оптимальном выборе параметров дается оценкой

$$||x_k|| = O(q^k), \quad q = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}, \quad \kappa = L/l,$$

причем $q \approx 1 - 2/\sqrt{\kappa}$ для больших чисел обусловленности κ. В то же время для градиентного метода $x_{k+1} = x_k - \gamma f'(x_k)$ при оптимальном выборе $\gamma = \frac{2}{L+l}$ будет сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q_1 = \frac{L-l}{L+l} = \frac{\kappa-l}{\kappa+l} \approx 1 - 2/\kappa$. Таким образом, для плохо обусловленных задач метод тяжелого шарика сходится значительно быстрее градиентного метода, будучи лишь немногим сложнее с вычислительной точки зрения. Этот эффект обеспечил необычайную популярность метода тяжелого шарика в современных приложениях, таких как машинное обучение.

Однако, интересует не асимптотическая характеристика метода, а его поведение на начальных итерациях. Оказывается, здесь картина более сложная. Градиентный метод всегда монотонно сходится к решению, а метод тяжелого шарика в принципе может давать большие уклонения.

Теорема 3. *Для метода тяжелого шарика* (13), *примененного к квадратичной функции с положительно определенной матрицей A, $0 < lI \leqslant A \leqslant LI$ и с оптимальными значениями параметров* (15) *найдутся такие значения начальных условий x_0, x_1, $||x_0|| = ||x_1|| = 1$ что уклонения будут*

$$||x_k|| = kq^{k-1} + (k-1)q^k, \quad \max_k ||x_k|| \approx \sqrt{\kappa}/e. \tag{16}$$

В то же время существуют начальные условия вида $x_0 = x_1$, $||x_0|| = ||x_1|| = 1$, когда эффекта всплеска нет:

$$||x_k|| \leqslant 1, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{17}$$

Для доказательства (16) достаточно взять $x_0 = -t_1$, $x_1 = t_1$, тогда нетрудно проверить, что итерации сведутся к скалярным для $y_k = (x_k, t_1)$ и при этом $y_{k+1} = 2qy_k - q^2 y_{k-1}$, $y_0 = -1$, $y_1 = 1$. Из оценки (12) получаем $y_k = kq^{k-1} + (k-1)q^k$, $\max_k ||x_k|| \approx 2\sqrt{\kappa}/e$, а поскольку $||x_k|| = y_k$, то отсюда следует (16). Чтобы доказать (17), можно взять $x_0 = x_1 = t_1$.

Как было отмечено, стандартный выбор начальных условий подразумевает $x_0 = x_1$. Однако не обязательно при этом величина $||x_k||$ убывает монотонно. Примером может служить $x_0 = x_1 = t_n$, здесь, как можно показать, заведомо получается осциллирующее решение. Практические рекомендации по настройке параметров в методе тяжелого шарика и результаты численных экспериментов можно найти в [19].

5. Заключение

В статье рассматриваются вопросы немонотонного поведения траекторий дискретных матричных устойчивых систем. Показано, что в линейных системах с бесконечной степенью устойчивости значения отклонений траекторий от нуля могут быть весьма большими; это плата за придание процессу свойства конечной длительности. С другой стороны, большие уклонения возможны, если замкнутая система находится вблизи границы устойчивости. Эти результаты имеют приложение к анализу ускоренных алгоритмов безусловной минимизации, таких как метод тяжелого шарика. Исследования указанных проблем целесообразно продолжить для более общих классов систем и разнообразных приложений.

Авторы признательны П.С. Щербакову, М. Даниловой и А. Кулаковой за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Обозначим $l^{\mathrm{T}} = e_n^{\mathrm{T}} W^{-1}$, тогда $W^{\mathrm{T}} l = e_n$, $(b, l) = 0, \ldots, (A^{n-1}b, l) = 1$, т.е. l^{T} — последняя строка матрицы W^{-1}. Тогда матрица замкнутой системы будет $F = A - bl^{\mathrm{T}}A^n$, $x_{k+1} = Fx_k$. Введем еще матрицу M со строками $l^{\mathrm{T}}A^{i-1}$, $j = 1, \ldots, n$:

$$M^{\mathrm{T}} = \left[l\, A^{\mathrm{T}}l \ldots (A^{\mathrm{T}})^{n-1}l\right]$$

и векторы $y_k = Mx_k$. Тогда для $x_0 = b$ будет $y_0 = e_n$, и, используя свойства матриц M, W и вектора l, последовательно получаем $y_k = e_{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots n-1$. Таким образом, $x_k = M^{-1}e_{n-k}$ и окончательно

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} ||x_k||/||x_0|| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} ||m_k||/||b||,$$

где m_k — k-й столбец матрицы M^{-1}.

Для получения верхней оценки (8) заметим, что $V(x) = ||Mx||^2$ является функцией Ляпунова для итераций $x_k : V(x_{k+1}) \leqslant V(x_k)$ и поэтому $\sigma_1||x_k|| \leqslant ||Mx_k|| \leqslant ||Mx_0|| \leqslant \sigma_n||x_0||$, где σ_1 — наименьшее, а σ_n — наибольшее сингулярное число матрицы M. Отметим еще, что $\sigma_1 > 0$, так как матрица M невырождена в силу предположения об управляемости системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. М.: Госэнергоиздат, 1951.
2. *Цыпкин Я.З.* Теория прерывистого регулирования. III // АиТ. 1950. № 5. С. 300–319.
3. *Фельдбаум А.А.* О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования // АиТ. 1948. № 4. С. 253–279.
4. *Измайлов Р.Н.* Эффект “всплеска” в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // АиТ. 1987. № 8. С. 56–62.

   Izmailov R.N. The “Peak” Effect in Stationary Linear Systems with Scalar Inputs and Outputs // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 8. P. 1018–1024.
5. *Smirnov G., Bushenkov V., Miranda F.* Advances on the transient growth quantification in linear control systems // Int. J. Appl. Math. Statist. 2009. V. 14. P. 82–92.
6. *Polyak B., Smirnov G.* Large Deviations for Non-Zero Initial Conditions in Linear Systems // Automatica. 2016. V. 74. No. 12. P. 297–307.

7. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // АиТ. 2015. № 6. С. 18–41.

   Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 957–976.

8. *Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Pokrovskii A.V.* Transients in Quasi-Controllable Systems. Overshooting, Stability and Instability // IFAC Proc. 1993. V. 26. No. 2. Part 4. P. 871–874.

9. *Коган М.М., Кривдина Л.Н.* Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // АиТ. 2011. № 7. С. 83–95.

   Kogan M.M., Krivdina L.N. Synthesis of Multipurpose Linear Control Laws of Discrete Objects under Integral and Phase Constraints // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 7. P. 1427–1439.

10. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

11. *Hinrichsen D., Plischke E., Wurth F.* State feedback stabilization with guaranteed transient bounds // Proc. 15 Int. Symp. Math. Theory Networks Syst. August, 2002. CDROM – paper 2132.

12. *Shcherbakov P.* On peak effects in discrete time linear systems // Proc. 25 Mediterranean Conf. Control Automat. (MED 2017), 2017, Valletta, Malta. P. 376–381.

13. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V.* Peak Effects in Stable Linear Difference Equations // J. Differ. Equat. Appl. 2018. V. 27. No. 9. P. 1488–1502.

14. *Kalman R., Bertram J.* General synthesis procedure for computer control of single-loop and multiloop linear systems (An optimal sampling system) // Trans. Amer. Inst. Electr. Eng., P. II: Appl. Industry. 1959. V. 77. No. 6. P. 602–609.

15. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1977.

16. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. New York: Springer, 2005.

17. *Поляк Б.Т.* О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. 1964. Т. 4. № 5. С. 791–803.

18. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

19. *Danilova M., Kulakova A., Polyak B.* Non-asymptotic Behaviour of Multi-Step Iterative Methods // 24 Int. Conf. Difference Equat. Appl. ICDEA 2018, Dresden, Germany, July 2018.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 22.06.2018

После доработки 06.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018