Автоматика и телемеханика, № 9, 2019

© 2019 г. **В.И. УТКИН, д-р техн. наук (utkin.2@osu.edu)**
(The Ohio State University, Коламбус, США),
Ю.В. ОРЛОВ, д-р физ.-мат. наук (yorlov@cicese.mx)
(CICESE, Энсенада, Мексика,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ВЕКТОРНЫМИ РЕЛЕ

Статья посвящена вопросам эволюции разрывных систем управления начиная от реле с двумя постоянными выходными значениями. Методы анализа и синтеза управления для них были развиты Я.З. Цыпкиным и обсуждены в его монографии “Теория релейных систем автоматического регулирования”, опубликованной в 1955 г. Было показано, как модифицируется релейная функция в так называемых системах с переменной структурой, в которых релейный выход может быть равен одной из двух непрерывных функций состояния. Следующий шаг был сделан в рамках систем с переменной структурой с векторным управлением. Процедура синтеза для систем с векторным релейным управлением основывается на выборе разрывной поверхности для каждой компоненты управления. Высокая эффективность так сконструированных систем объясняется возникновением скользящих режимов. Наконец, было предложено векторное релейное единичное управление. Этот метод не связан с покомпонентным синтезом и применим для бесконечномерных систем.

Ключевые слова: скользящий режим, поверхность разрыва, регуляризация, выпуклое множество.

DOI: 10.1134/S0005231019090101

1. Введение

Системы с разрывным, в частности релейным, управлением издавна широко используются в практике автоматического управления. Тому есть две причины: легкость реализации и использование всего ресурса управления. Так называемое вибрационное управление [1], предложенное В.С. Кулебакиным в 1932 г., является примером одной из первых релейных систем (см. рис. 1).

Обмотка возбуждения включалась или выключалась в зависимости от несоответствия между задающим воздействием и выходным напряжением генератора. Как результат, разность между ними есть высокочастотная функция с малой амплитудой, зависящей от несовершенства реле (запаздывание, зона нечувствительности, гистерезис и т.д.).

Интересно заметить, что две монографии по теории релейных систем управления — И. Флюгге-Лотц [2] и Я.З. Цыпкина [3] — были опубликованы ранее первых учебников по теории управления.

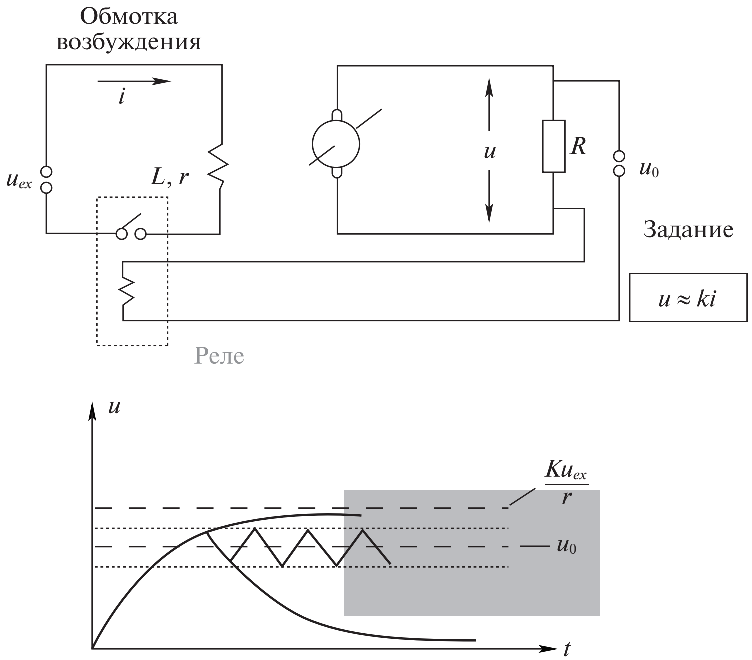

Рис. 1. Вибрационное управление генератором постоянного тока (В.С. Кулебакин, 1932 г.).

2. Историческая перспектива

Системы со скалярным управлением изучались авторами множества публикаций по релейным системам. Выходы регулятора и объекта скалярны, а управление представляет собой функцию

$$u = -M\mathrm{sgn}(s), \tag{1}$$

где M — константа, а s — скалярная функция всех имеющихся переменных (фазовые состояния объекта и динамического регулятора, внешние входы).

Монография [3] охватывает вопросы устойчивости релейных систем, методы синтеза управления, анализ различных типов поведения: предельные циклы, скользящие режимы, бифуркации. В силу разрывности управления скользящий режим является одним из типов поведения релейных систем. Он не может иметь места в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с липшицевой правой частью. Это поведение также изучалось в ранних публикациях; термин "скользящий режим" (см. рис. 2) может быть найден в монографии [4], опубликованной в 1934 г.

Заметим, что скользящий режим исследовался методом фазовой плоскости за много лет то того, как метод пространства состояний стал основным. Вибрационное управление (рис. 1) есть ни что иное, как управление со скользящим режимом в современной терминологии.

Формально уравнения релейных систем не удовлетворяют теореме существования и единственности из классической теории дифференциальных

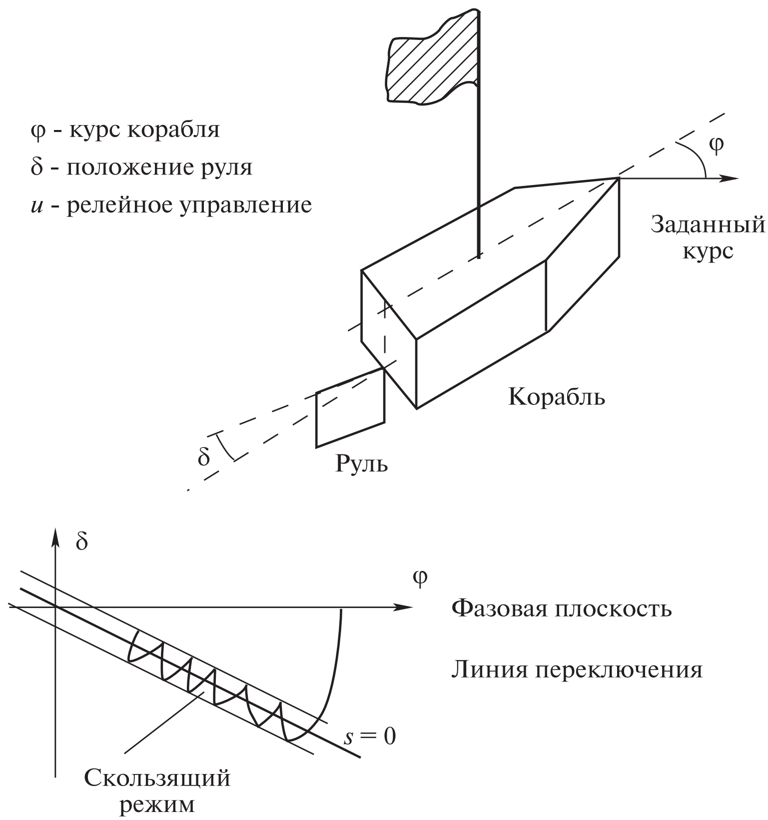

Рис. 2. Об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе (Г.Н. Никольский, 1934 г.).

уравнений. Что представляют собой уравнения, описывающие скользящий режим? Это вопрос был предметом дискуссии в течение многих лет, см. труды Второй всесоюзной конференции 1953 г. [5] и труды Первого конгресса ИФАК 1960 г. [6]. Я.З. Цыпкин ответил на этот вопрос для аффинных систем в [3]. Уравнения скользящего режима совпадают с уравнениями медленного движения, если элемент реле заменить на линейный усилитель с коэффициентом усиления, стремящимся к бесконечности. Это выглядит разумно, так как вход релейного элемента равен нулю в скользящем режиме, в то время как средняя величина выхода принимает конечные значения. Цель публикаций до 1960-х гг. была в обнаружении скользящих режимов и в анализе поведения систем при их возникновении. Один из участников вышеупомянутой дискуссии в 1953 г. рекомендовал избегать скользящих режимов, так как контакты электромеханических реле подгорали при таком поведении системы. Достижения силовой электроники в течение последних двух десятилетий позволили реализовать релейные функции на бесконтактных устройствах с частотой и мощностью многих кГц и кВт.

Позже исследователи обратили внимание на важное свойство скользящего режима: понижение размерности и низкую чувствительность по отношению к неопределенностям. Эти свойства являются общими для систем с большим коэффициентом усиления, но они присущи и релейным системам со скользящим режимом, использующим конечные управляющие воздействия. Первые попытки их использования относятся к так называемым системам с переменной структурой [7, 8]. Дальнейшее развитие этого подхода приводит к системам с разрывным векторным управлением. В настоящей работе концепция "реле" обобщается на векторный случай и обсуждаются методы синтеза управления.

3. Конечномерные системы с векторным управлением

Авторы упомянутых выше монографий [2, 3] изучали лишь системы со скалярным управлением (1). Подобным образом модифицированное скалярное управление

$$u = -M(x)\mathrm{sgn}(s), \tag{2}$$

где $M(x) > 0$ — функция, зависящая от состояния, изучалось в рамках теории систем с переменной структурой ранее 1970-х гг. Формально управление в системах с переменной структурой выбиралось в форме

$$u = \begin{cases} F^+, & s(x) > 0, \\ F^-, & s(x) < 0, \end{cases}$$

но оно легко сводится к форме (2):

$$u = \frac{F^+ + F^-}{2} + \frac{F^+ - F^-}{2}\mathrm{sgn}(s).$$

Множество современных технологических процессов описываются аффинными дифференциальными уравнениями и управляются несколькими входами, т.е. векторным управлением

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, а f и B — дифференцируемые функции состояния и времени, $\operatorname{rank} B = m$.

Каждая компонента вектора управления имеет разрывную поверхность $s_i(x)=0$, $i = 1, \ldots, m$:

$$u_i = M_i(x,t)\mathrm{sgn}[s_i(x)], \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Управление может быть представлено в виде

$$u = M(x,t)\mathrm{sgn}[s(x)],$$

где

$$M(x) = \mathrm{diag}\,[M_i(x)],$$

$$s^{\mathrm{T}} = [s_1, \ldots, s_m],$$

$$\mathrm{sgn}[s(x)] = \big[\mathrm{sgn}[s_1(x)], \ldots, \mathrm{sgn}[s_m(x)]\big]^{\mathrm{T}},$$

и будет называться *векторным релейным управлением.*

Скользящий режим на многообразии $s(x) = 0$ становится типичным. Вышеупомянутые свойства, редукция размерности и низкая чувствительность к неопределенностям (включая подавление возмущений) могут быть легко продемонстрированы для систем в регулярной форме [9]. Регулярная форма влечет декомпозицию исходной системы на две подсистемы меньших порядков. Первая из них не содержит управления, а размерность второй совпадает с размерностью управления:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t), \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, \\ &\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u, \quad x_2 \in \mathbb{R}^m, \quad |\det B_2| > d_0 > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Синтез скользящего режима состоит из двух шагов. На первом шаге фазовая переменная x_2 рассматривается как фиктивное управление и выбирается как функция состояния первой подсистемы $x_2 = -s_0(x_1)$ так, что синтезированная система

$$x_1 = f_1[x_1, -s_0(x_1), t] \tag{6}$$

$(n - m)$-го порядка будет обладать желаемыми свойствами. Управление u должно быть выбрано на втором шаге так, чтобы скользящий режим реализовался на многообразии $s(x_1, x_2) = x_2 + s_0(x_1) = 0$. Это эквивалентно задаче сходимости в начало координат за конечное время в пространстве s для системы m-го порядка

$$\dot{s} = f_2(x_1, x_2, t) + \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial x_1} \right\} f_1(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u, \tag{7}$$

где $\partial s_0 / \partial x_1$ — матрица размера $m \times (n - m)$.

Условия сходимости вектора состояния в начало координат, или устойчивость системы (7) с управлением (2), зависят от матрицы B_2. Исследователи этого вопроса старались найти необходимые и достаточные условия устойчивости в течение последних 20 лет для простейшего случая (2), (7), $M = \text{const}$, $B_2 = \text{const}$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, но без особого успеха. Поэтому интересно постараться найти достаточные условия; они легко находятся, если B_2 — диагональная матрица с диагональными элементами $|b_i| > b_{i0} > 0$. Тогда для $\operatorname{sgn}(s_i) = \operatorname{sgn}(b_i)$ вычислим производную по времени функции Ляпунова $V = (s^{\mathrm{T}} s)/2 = \|s\|^2/2$:

$$\dot{V} \leqslant |s| \left| f_2(x_1, x_2, t) + \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial x_1} \right\} f_1(x_1, x_2, t) \right| - |M(x) B_2(x) s|, \tag{8}$$

где для произвольного вектора a полагаем $|a| = \sum |a_i|$.

Очевидно, что существует функция $M(x, t)$, такая что $\dot{V} < 0$, это и означает асимптотическую устойчивость. Неравенство (8) может быть записано в форме $\dot{V} \leqslant -r\|s\|$, где r — положительное число, или $\dot{V} \leqslant -r\sqrt{V}$. Сходимость за конечное время следует из решения этого уравнения:

$$V(t) \leqslant \left(-\frac{r}{2} t + \sqrt{V_0} \right)^2, \quad V(t) = s(t) \equiv 0 \ \text{ для } t \geqslant \frac{2}{r} \sqrt{V_0}. \tag{9}$$

Заметим, что время сходимости убывает с ростом M и, как результат, с ростом r.

Этот результат может быть легко обобщен, если B_2 — матрица с доминирующей диагональю. Сходимость за конечное время может быть достигнута для системы (2), (7) для положительно определенной матрицы $B_2 + B_2^{\mathrm{T}} > 0$ [8].

Если условия устойчивости для системы (2), (7) неизвестны, управление должно быть модифицировано. Например, если $u = B_2^{-1}[-M(x)\mathrm{sgn}(s)]$, то релейное управление умножается на единичную матрицу. Это случай, когда решение известно; этот метод не применим в приложениях, связанных с силовыми преобразователями, где каждая компонента управления может принимать только два значения.

Теперь продемонстрируем еще один метод, когда сходимость за конечное время может быть достигнута для произвольной матрицы B_2 и управление может принимать только два значения. Вновь вычислим производную функции Ляпунова $V = (s^{\mathrm{T}}s)/2 = \|s\|^2/2$ вдоль траекторий системы (7):

$$\dot{V} \leqslant s^{\mathrm{T}} \left[f_2(x_1, x_2, t) + \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial x_1} \right\} f_1(x_1, x_2, t) \right] + s^{\mathrm{T}} B_2(x_1, x_2, t) u. \tag{10}$$

Введем новые разрывные поверхности $s^* = 0$, $(s^*)^{\mathrm{T}} = s^{\mathrm{T}} B_2(x_1, x_2, t)$. Скользящий режим на $s^* = 0$ означает скользящий режим на $s = 0$. Для управления $u = -M(x)\mathrm{sgn}(s^*)$

$$\dot{V} \leqslant |B_2^{-1} s^*| \left| f_2(x_1, x_2, t) + \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial x_1} \right\} f_1(x_1, x_2, t) \right| - |M(x) B_2 s^*|,$$

где функция $M(x)$ может быть найдена так, что сходимость за конечное время в начало координат пространства s будет иметь место.

Во всех методах задача синтеза управления распадается на две независимые подзадачи меньшей размерности ($n - m$ и m) и уравнения скользящего режима не зависят от функций $f_2(x_1, x_2, t)$ и $B_2(x_1, x_2, t)$.

4. Конечномерные системы с векторным релейным единичным управлением

Каждая компонента векторного управления в (3) есть скалярная релейная функция (4). Установление условий устойчивости системы (7) является непростой задачей ввиду многочисленных переключений релейных функций и того факта, что в ходе движения к началу координат может возникать скользящий режим. Анализ устойчивости может быть существенно упрощен, если уравнения движения всюду непрерывны за исключением многообразия $s = 0$, как это имеет место в системах со скалярным управлением.

Представление скалярной функции переключения $\mathrm{sgn}(s)$ в виде $\mathrm{sgn}(s) = s/\|s\|$ дает указание на то, как может быть записана аналогичная функция векторного аргумента:

$$u = M \frac{s}{\|s\|}, \tag{11}$$

где M — скалярная постоянная или функция, зависящая от состояния. В отличие от управления (4) управление (11) становится непрерывной функцией состояния, даже если произвольный компонент вектора s поменяет знак. Поскольку норма $s/\|s\|$ равна единице, такое управление назовем *векторным релейным единичным управлением* или, короче, *единичным управлением*. Управление в форме (11) было предложено в 1970-х гг. С. Гутманом [10] и Г. Лейтманом [11]. Аффинная система (3) с "согласованным" с управлением [12] ограниченным возмущением $\|h(x,t)\| \leqslant h_0$

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)[u + h(x,t)] \tag{12}$$

была изучена в предположении, что номинальная система $\dot{x} = f(x,t)$ асимптотически устойчива с известной функцией Ляпунова $V(x) > 0$, $\dot{V} = (\operatorname{grad} V)^{\mathrm{T}} f(x,t) = -W < 0$. Управление выбирается аналогично (11):

$$u = -M\frac{B^{\mathrm{T}}\operatorname{grad} V}{\|B^{\mathrm{T}}\operatorname{grad} V\|}. \tag{13}$$

Тогда производная функции Ляпунова вдоль траекторий системы (12)

$$\dot{V} = -W - M\|B^{\mathrm{T}}\operatorname{grad} V\| + (\operatorname{grad} V)^{\mathrm{T}} Bh(x,t) \leqslant \\ \leqslant -W - M\|B^{\mathrm{T}}\operatorname{grad} V\| + \|B^{\mathrm{T}}\operatorname{grad} V\| h_0$$

отрицательно определена для $M > h_0$. Это означает, что точка равновесия глобально асимптотически устойчива, если функция W радиально не ограничена [13]. Норма функции (11), (13) при $M = 1$ равна единице. Правая часть (12) должна быть равна нулю для $x \equiv 0$, следовательно, $u = -(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}f - h$. Если $B^{\mathrm{T}}\operatorname{grad} V \neq 0$, то норма управления (13) равна M. Вообще говоря, норма $-(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}f - h$ отличается от M. Единственно возможное поведение системы — это скользящий режим на многообразии $B^{\mathrm{T}}\operatorname{grad} V = 0$, где управление становится разрывным.

Единичное управление — это эффективное средство обеспечения скользящего режима в системе (12) на заранее выбранном многообразии $s(x) = 0$, $s(x) \in \mathbb{R}^m$.

$$\dot{s} = \left\{\frac{\partial s_0}{\partial x_1}\right\}(f + h) + Du, \quad D = \left\{\frac{\partial s_0}{\partial x_1}\right\}B. \tag{14}$$

Выберем единичное управление аналогично (13):

$$u = -M(x,t)\frac{D^{\mathrm{T}}s(x)}{\|D^{\mathrm{T}}s(x)\|} \tag{15}$$

и вычислим производную функции Ляпунова $V = (s^{\mathrm{T}}s)/2 = \|s\|^2/2$ вдоль траекторий (14) при управлении (15):

$$\dot{V} = s^{\mathrm{T}}\left\{\frac{\partial s_0}{\partial x_1}\right\}(f + h) - Ms^{\mathrm{T}}\frac{D^{\mathrm{T}}s(x)}{\|D^{\mathrm{T}}s(x)\|} < \\ < \|D^{\mathrm{T}}s(x)\|\left[\left\|D^{-1}\left\{\frac{\partial s_0}{\partial x_1}\right\}(f + h)\right\| - M(x,t)\right].$$

Она отрицательна при

$$M(x,t) > \left\| D^{-1} \left\{ \frac{\partial s_0}{\partial x_1} \right\} (f+h) \right\|.$$

С учетом неравенства $\|D^{\mathrm{T}} s(x)\| \leqslant \sqrt{\lambda_{\max}} \|s(x)\|$ (где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение DD^{T}) $M(x,t)$ может быть выбрана так, что

$$\text{(16)} \quad \dot V \leqslant -q\|s(x)\|, \quad q>0 \ \text{ или } \ \dot V \leqslant -q\sqrt{2V} \ \text{ и } \ V(t) \leqslant \left(-\frac{q}{\sqrt{2}} t + \sqrt{V(0)} \right)^2.$$

Это означает, что многообразие $s=0$ достигается за конечный интервал времени $t_r \leqslant \sqrt{2V(0)}/q$. В отличие от покомпонентного синтеза управление непрерывно, и, следовательно, в течение этого временного интервала переключения отсутствуют.

Как показано в предыдущем разделе, условия достижимости эквивалентны устойчивости в подпространстве s со сходимостью за конечное время и достаточные условия были получены лишь в некоторых случаях. Докажем применимость предназначенного для линейных стационарных систем критерия Гурвица для анализа устойчивости систем с единичным управлением. Начнем со случая, когда B — константа, многообразие $s=0$ линейно, $s=Cx$, C — константа, а $D=CB$ — гурвицева матрица. Пусть $V = s^{\mathrm{T}} P s$ — функция Ляпунова, где $P>0$ является решением уравнения Ляпунова $D^{\mathrm{T}}P + PD = -Q$, $Q>0$. Вычислим ее производную для системы с управлением $u = -M(x,t)s/\|s\|$:

$$\text{(17)} \qquad \dot V = 2(Cf+Dh)^{\mathrm{T}} P s - M \frac{s^{\mathrm{T}} Q s}{\|s\|} \leqslant 2(Cf+Dh)^{\mathrm{T}} P s - M \lambda_{\min} \|s\|,$$

где $\lambda_{\min}$ — минимальное собственное значение Q. Как и ранее, функция $M(x,t)$ может быть найдена так, чтобы имела место сходимость за конечное время к многообразию s.

Критерий Гурвица не применим для линейных нестационарных систем, но единичное управление может быть применено для нахождения области притяжения нелинейных нестационарных систем. Предположим, что матрица $D(x,t)$ удовлетворяет условию Гурвица для всех x и t. Тогда решение уравнения Ляпунова $P(x,t)>0$ есть также функция от x и t, и правая часть неравенства (16) должна быть дополнена еще одним членом:

$$\dot V \leqslant 2(Cf+Dh)^{\mathrm{T}} P s - M\lambda_{\min}\|s\| + s^{\mathrm{T}} \dot P s$$

или аналогично (16)

$$\dot V \leqslant -q\|s(x)\| + s^{\mathrm{T}} \dot P s.$$

Последний член есть квадратичная форма, следовательно, знак производной по времени определяется первым членом для малых значений $\|s(x)\|$ в предположении, что $\dot P$ ограничена. Это означает, что скользящий режим существует в любой точке многообразия $s=0$ и потому существует область притяжения.

5. Релейное управление в бесконечномерной постановке

С начала 1980-х гг. релейные алгоритмы управления и, в частности, алгоритмы на скользящих режимах в значительной степени обобщены на бесконечномерную постановку. Впервые бесконечномерные обобщения подобных алгоритмов были получены в [14, 15] для некоторых параболических и гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, что не только подтвердило их полезность, но и обозначило проблемы для дальнейшего исследования.

Существенные моменты, возникающие в бесконечномерной постановке, можно проиллюстрировать тестовым примером, связанным с распространением тепла вдоль однородного одномерного стержня с изолированными концами. Этот процесс описывается линейным параболическим дифференциальным уравнением в частных производных

$$x_t(r,t) = x_{rr}(r,t) + f(r,t) + u(r,t) \tag{18}$$

с краевыми условиями Неймана

$$x_r(0,t) = 0, \quad x_r(1,t) = 0, \tag{19}$$

где $x(\cdot,t)$ — распределение температуры вдоль стержня в момент $t > 0$, а управление u и внешнее возмущение f воздействуют на температуру стержня в каждой точке $r \in (0,1)$. В дальнейшем $x_t(r,t) = \frac{\partial x(r,t)}{\partial t}$, $x_{rr}(r,t) = \frac{\partial^2 x(r,t)}{\partial r^2}$ обозначают соответствующие частные производные по времени и пространству, символ $\|x(\cdot,t)\|_2$ означает L_2-норму $\sqrt{\int_0^1 x^2(r,t)\,dr}$.

Рассмотрим распределенный единичный сигнал

$$u(r,t) = -M\frac{x(r,t)}{\|x(\cdot,t)\|_2} \tag{20}$$

с коэффициентом усиления $M > 0$, который, возможно, генерирует скользящий режим в системе вдоль множества разрыва $x = 0$. Заметим, что L_2-норма единичного сигнала $x(r,t)\|x(\cdot,t)\|_2^{-1}$ равна единице всюду, кроме начала координат $x \equiv 0$. При этом возникает ряд фундаментальных вопросов:

- при каких условиях возникает скользящий режим на множестве разрыва?
- какая эквивалентная величина единичного сигнала $x(r,t)\|x(\cdot,t)\|_2^{-1}$ должна быть использована в замкнутой системе (18)–(20), чтобы корректно описать скользящий режим на множестве разрыва $x = 0$?

По аналогии с конечномерным случаем условия

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\uparrow 0} x_t(r,t) = \lim_{x\uparrow 0}[x_{rr}(r,t) + f(r,t) + u(r,t)] > 0,\\
&\lim_{x\downarrow 0} x_t(r,t) = \lim_{x\downarrow 0}[x_{rr}(r,t) + f(r,t) + u(r,t)] < 0
\end{aligned} \tag{21}$$

локального существования скользящего режима на множестве разрыва $x(\cdot,t) = 0$ потребовали бы, чтобы величина регулятора M локально превышала не только равномерную норму $\|f(\cdot,t)\|_{C(0,1)}$ внешних возмущений, но также и равномерную норму $\|x_{rr}(\cdot,t)\|_{C(0,1)}$ пространственной частной производной второго порядка x_{rr}. Последнее требование, однако, невозможно удовлетворить ввиду того, что оператор двойного дифференцирования $A = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ неограничен (для этого достаточно заметить, что $\|A \sin \pi n r\|_{C(0,1)} \to \infty$ при $n \to \infty$). Таким образом, условия (21) существования скользящего режима должны быть пересмотрены в бесконечномерной постановке.

Подход Ляпунова – Красовского в настоящее время широко применим для изучения скользящих режимов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных [16]. В случае замкнутой системы (18)–(20) функционал Ляпунова – Красовского может быть выбран в виде

$$V(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(r,t)dr. \tag{22}$$

В самом деле, дифференцируя (22) вдоль решений (18)–(20), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} = \int_0^1 [x_{rr} + u + f]x dr \leqslant -(M - \|f(\cdot,t)\|_{L_2})\|x(\cdot,t)\|_{L_2} = \\ = -(M - \|f(\cdot,t)\|_{L_2})\sqrt{2V(t)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, при условии $M > \|f(\cdot,t)\|_{L_2}$ попадание замкнутой системы (18)–(20) в начало координат за конечное время устанавливается так же, как и в (9), и существование скользящих режимов на множестве разрыва $x = 0$ гарантируется за конечное время $T = \sqrt{2}(M - \|f(\cdot,t)\|_{L_2})^{-1}\sqrt{V(0)}$.

Следует отметить, что распространение методов анализа скользящих режимов на бесконечномерную постановку весьма нетривиально. Хотя сходимость за конечное время в бесконечномерном случае была изучена для эволюционных уравнений (в частности, для линейных), см. [17] и ссылки там, анализ скользящих режимов остается открытой проблемой для бесконечномерных систем. Функционал Ляпунова (22), обеспечивающий попадание за конечное время в начало координат для замкнутой системы (18), (19), порожденный единичным распределенным управлением (20), пока что остается единственным в рамках систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Обобщение синтеза единичного управления для произвольных систем в гильбертовом пространстве может быть осуществлено следующим образом. Для бесконечномерной динамики

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t,x)$$

в гильбертовом пространстве при воздействии неизвестных возмущений типичной целью управления является асимптотическая стабилизация. Пусть состояния и управления являются элементами гильбертова пространства: $x \in X$, $u \in U$; $f : \mathbb{R} \times X \to X$ — возмущение; $A : D(A) \subset X \to X$ — замкнутый линейный оператор с $D(A)$ в X; $B : U \to X$ — линейный ограниченный оператор. Неизвестное возмущение $f(t,x)$ предполагается ограниченным в некоторой заранее заданной норме. Конечно, эта проблема может быть решена при выполнении условия принадлежности возмущений пространству управления:

$$f(t,x) = B\gamma(t,x), \quad \|\gamma(t,x)\| \leqslant \gamma_0, \quad \gamma : \mathbb{R} \times X \to U.$$

Не углубляясь в детали (интересующегося читателя отошлем, например, к [16, 18]), выберем процедуру синтеза, следуя методологии раздела 4. Такая процедура применима, если номинальная система $\dot{x} = Ax$ экспоненциально устойчива с непрерывным положительно определенным функционалом Ляпунова

$$v : X \to \mathbb{R}, \quad v(0) = 0, \quad v(x) > 0 \ \text{ для } x \neq 0. \tag{24}$$

Иными словами, пусть существует непрерывный функционал (24) такой что $\dot{v} = \nabla_x\{v\}Ax < 0$ для всех $x \in D(A)$, где $\nabla_x\{v\} : X \to \mathbb{R}$ — линейный функционал (он может быть интерпретирован как аналог конечномерного оператора $\nabla^{\mathrm{T}}V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), обладающий свойством

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x) - \nabla_x\{v\}(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0, \quad \Delta x \in X.$$

Вычисляя производную $v(x)$ вдоль траекторий исходной системы, получаем

$$\dot{v} = \nabla_x\{v\}Ax + \nabla_x\{v\}B(u+\gamma).$$

Пусть $(\nabla_x\{v\}B)^* \in U$ — сопряженный оператор к $\nabla_x\{v\}B$ [19]. По свойству сопряженного оператора [20] $\nabla_x\{v\}B(\nabla_x\{v\}B)^* = \|\nabla_x\{v\}B\|^2$, поэтому единичный закон управления

$$u = -\rho\frac{(\nabla_x\{v\}B)^*}{\|\nabla_x\{v\}B\|}, \quad \rho > \gamma_0 \tag{25}$$

приводит к тому, что

$$\dot{v} \leqslant \nabla_x\{v\}Ax + \|\nabla_x\{v\}B\|(-\rho + \gamma_0) < 0.$$

Следовательно, состояние $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Как показано ранее, подход, основанный на единичном управлении, успешно проиллюстрирован в бесконечномерной постановке для параболической краевой задачи (18), (19). Заметим, что вместе с единичным управлением (20) распределенное релейное управление

$$u = -\rho \operatorname{sgn} x(r,t) \tag{26}$$

диффузионным процессом также приводит к асимптотической стабилизации, но верхняя оценка скорости убывания $x(r,t)$ до сих пор не получена.

Еще одним препятствием для распределенного релейного управления (26) является разрывность во всех точках r, где $x(r,t) = 0$. В этом состоит отличие от единичного управления (25), которое остается непрерывным на протяжении переходного процесса и становится разрывным, только когда процесс завершен и $x(r,t)$ становится равным нулю при любом значении пространственной переменной r.

6. Заключение

Широко используемые системы с разрывным управлением восходят к первым исследованиям релейных систем второй половины прошлого века. Статья демонстрирует развитие этой области исследований, модификацию термина "релейное управление", причины, почему эти модификации необходимы, а также новые проблемы и их решения. Применения релейного управления обсуждаются в контексте одномерных, многомерных и бесконечномерных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кулебакин В.С.* К теории автоматических вибрационных регуляторов для электрических машин // Теоретическая и экспериментальная электроника. 1932. № 4. С. 3–21.
2. *Flugge-Lotz I.* Discontinuous Automatic Control. N.J.: Princeton Univers. Press, 1953.
3. *Цыпкин Я.З.* Теория релейных систем автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1955.
4. *Никольский Г.Н.* К вопросу об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе // Тр. центр. лаб. проводной связи. 1934. № 1. С. 34–75.
5. Труды второго всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. 1955. Дискуссия. С. 460–462.
6. *Neymark Yu.I.* Note on A. Filippov's Paper // Proc. 1st IFAC Congr. London: Butterworth, 1961.
7. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970.
8. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
9. *Лукьянов А.Г., Уткин В.И.* Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // АиТ. 1981. № 3. С. 5–13.

   Luk'yanov A.G., Utkin V.I. Methods for Reduction of Equations of Dynamic Systems to a Regular Form // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 4. P. 413–420.
10. *Gutman S.* Uncertain Dynamic Systems — a Lyapunov Min-Max Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. AC-24. P. 437–449.
11. *Gutman S., Leitmann G.* Stabilizing feedback control for dynamic systems with bounded uncertainties // Proc. 1976 IEEE Conf. Decision Control. P. 94–99.
12. *Drazenovic B.* The Invariance Conditions in Variable Structure Systems // Automatica. 1969. V. 5. No. 3. P. 287–295.
13. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
14. *Орлов Ю.В., Уткин В.И.* Применение скользящих режимов в задачах управления распределенными системами // АиТ. 1982. № 9. С. 36–46.

    Orlov Y.V., Utkin V.I. Use of Sliding Modes in Distributed System Control Problems // Autom. Remote Control. 1982. V. 43. No. 9. P. 1127–1135.
15. *Орлов Ю.В.* Применение метода Ляпунова в распределенных системах // АиТ. 1983. № 4. С. 22–28.

    Orlov Y.V. Application of Lyapunov Method in Distributed Systems // Autom. Remote Control. 1983. No. 4. V. 44. P. 426–430.

16. *Orlov Y. V.* Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions. Communications and Control Engineering Series. Berlin: Springer Verlag, 2009.
17. *Perrollaz V., Rosier L.* Finite-Time Stabilization of 2x2 Hyperbolic Systems on Tree-Shaped Networks // SIAM J. Control Optim. 2014. V. 52. No. 1. P. 143–163.
18. *Curtain R., Zwart H.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. Texts in applied mathematics. Springer, 1995.
19. *Orlov Y., Utkin V.* Unit sliding mode control in infinite-dimensional systems // J. Appl. Math. Comput. Sci. 1998. V. 8. P. 7–20.
20. *Rudin W.* Functional Analysis (2nd ed.). N.Y.: McGraw-Hill, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 20.07.2018

После доработки 01.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018