

© 2019 г. М.М. ЧАЙКОВСКИЙ, д-р техн. наук (mmtchaikovsky@hotmail.com),  
(Научно-производственный центр автоматике и приборостроения  
им. акад. Н.А. Пилюгина;  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
В.Н. ТИМИН, канд. техн. наук (timin.victor@rambler.ru),  
А.П. КУРДЮКОВ, д-р техн. наук  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ АНИЗОТРОПИЙНОГО СУБОПТИМАЛЬНОГО ПИД РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ: ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ<sup>1</sup>

Рассматривается задача синтеза пропорционально-интегрально-дифференциального закона управления (ПИД регулятора) для дискретной линейной стационарной системы с одномерным входом управления и измеряемым выходом, работающей под воздействием стохастических возмущений, неопределенности которых описывается в терминах средней анизотропии. Возможности замкнутой системы по подавлению возмущений количественно характеризуются анизотропийной нормой. Получены достаточные условия существования анизотропийного субоптимального ПИД регулятора, стабилизирующего замкнутую систему и гарантирующего, что ее анизотропийная норма строго ограничена заданным пороговым значением.

*Ключевые слова:* ПИД регулятор, средняя анизотропия, норма, субоптимальное управление, выпуклая оптимизация.

DOI: 10.1134/S0005231019090113

### 1. Введение

Имя Якова Залмановича Цыпкина, академика РАН, выдающегося советского и российского ученого в области автоматического управления, столетнему юбилею которого посвящен этот номер журнала, широко известно в нашей стране и за рубежом. Его классические статьи о системах с запаздывающей обратной связью, об импульсном регулировании и релейных системах управления являются основополагающими в теории автоматического управления. Невозможно переоценить роль Якова Залмановича в теории адаптивных и обучающихся систем управления. Работы В.Л. Харитоновой о робастной устойчивости в свое время вызвали всплеск научной активности в этой области. Я.З. Цыпкин вместе с Б.Т. Поляком, основываясь на результатах А.В. Михайлова, положил начало новому методу в исследованиях по робастному управлению. Один из авторов этой статьи хорошо помнит круглый стол,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы № 15 ОЭММПУ РАН и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-08-00185).

который вел Яков Залманович на 11-м Всемирном конгрессе ИФАК в Таллине в 1990 г., на котором Яков Залманович провозгласил эру робастности в теории управления.

Предлагаемая читателям статья посвящена дальнейшему развитию анизотропийной (стохастической робастной) теории управления, предложенной в 1990-е гг. И.Г. Владимировым, в которой идеи  $\mathcal{H}_\infty$  теории управления сочетались с теоретико-информационными критериями качества (см., например, [1–4]).

Зная живой интерес Якова Залмановича к этой области исследований, авторы первой в российской печати работы по анизотропийной теории [1] пришли к нему и попросили дать отзыв в журнал “Доклады Академии наук”. Яков Залманович просмотрел работу и попросил принести отзывы от специалистов. Авторы статьи [1] показали работу М.С. Пинскеру и А.Ю. Веретенникову и получили достаточно лестные отзывы. Яков Залманович, ознакомившись с отзывами, написал рекомендацию в ДАН. Эта статья вышла в 1995 г. Таким образом он благословил анизотропийную теорию, которой сейчас посвящено около сотни публикаций (книг, статей в ведущих научных журналах у нас в стране и за рубежом) на право занять достойное место в теории управления.

Анизотропийная теория стохастического робастного управления, основы которой были заложены в [1–3], направлена на синтез управления, обладающего большей робастностью по отношению к статистически неопределенным коррелированным возмущениям, чем гауссовское линейно-квадратичное и  $\mathcal{H}_2$  управление, и в то же время меньшей консервативностью, чем  $\mathcal{H}_\infty$  управление. В анизотропийной теории статистическая неопределенность многомерного сигнала — последовательности случайных векторов — описывается в терминах анизотропии (для конечной последовательности) или средней анизотропии (для бесконечной последовательности), представляющих собой меру отклонения данного сигнала от централизованного гауссовского белого шума с единичной ковариационной матрицей, а возможности системы по подавлению неопределенных стохастических возмущений количественно характеризуются ее анизотропийной нормой [1, 2, 4].

Изначально анизотропийный оптимальный регулятор, задача синтеза которого была решена в [3], представлял собой регулятор в форме наблюдателя. Критерий ограниченности анизотропийной нормы заданным значением, сформулированный в [5] в терминах матричных неравенств, позволил применить методы выпуклой оптимизации и технику линейных матричных неравенств (ЛМН) к решению задач анизотропийного субоптимального управления, что привело к дальнейшему развитию анизотропийной теории. Применение новой техники дало возможность строить анизотропийные регуляторы не только в форме наблюдателя, но и в форме динамических компенсаторов заданного или полного порядка, а также в виде статических обратных связей по состоянию и измеряемому выходу. В настоящей статье впервые рассматривается задача анизотропийного субоптимального управления — подавления неопределенных стохастических возмущений с ограниченной средней анизотропией — с помощью регулятора не только заданного порядка, но и заданной структуры.

Пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор относится к наиболее распространенному типу регуляторов. Более 90 % регуляторов, применяющихся в промышленности, используют ПИД алгоритм [6]. Причиной столь высокой популярности является простота построения и промышленного использования, ясность функционирования, пригодность для решения большинства практических задач и низкая стоимость. Усилия многих и многих исследователей на протяжении десятилетий и в настоящее время сосредоточены на создании и разработке новых методов синтеза и настройки параметров ПИД регуляторов на основе новых современных теорий и с применением различных критериев качества. Методам синтеза и настройки ПИД регуляторов посвящено огромное количество публикаций, которое невозможно даже обзорно охватить в рамках этой статьи.

Структура статьи следующая. В разделе 2 излагается постановка задачи. В разделе 3 представлено решение задачи синтеза анизотропийного субоптимального ПИД регулятора. В разделе 4 рассматривается вычислительный пример. Заключительные замечания даны в разделе 5.

В статье используются следующие обозначения:  $\mathbb{R}^n$  – множество вещественных  $n$ -мерных векторов,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  – множество вещественных  $(n \times m)$ -матриц. Для вещественной матрицы  $M = [m_{ij}]$   $M^T$  – транспонированная матрица,  $M^T := [m_{ji}]$ . Для вещественных симметричных матриц  $M = M^T$  и  $N = N^T$   $M \succ N$  (или  $M \succcurlyeq N$ ) означает, что матрица  $M - N$  положительно (или неотрицательно) определена. В блочно-симметричных матрицах символ  $*$  заменяет блоки, вид которых определяется симметрией. Единичная матрица размерности  $n \times n$  обозначается через  $I_n$ , нулевая матрица размерности  $n \times m$  обозначается  $0_{n \times m}$ . Размерности нулевых матриц в тех случаях, когда их нетрудно понять из контекста, указываться не будут. Определитель матрицы  $M = [m_{ij}]$  обозначается через  $\det M$ , след этой матрицы обозначается через  $\text{tr } M$ . Евклидова норма вектора обозначаются через  $|\cdot|$ . Символом  $\mathbf{E}$  обозначено математическое ожидание случайной величины.

## 2. Постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального ПИД регулятора

Рассмотрим объект управления, представленный в пространстве состояний дискретной линейной стационарной моделью  $P(z)$  с  $n_x$ -мерным состоянием  $X = (x_k)$ ,  $m_w$ -мерным входом возмущения  $W = (w_k)$ , одномерным входом управления  $U = (u_k)$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^1$ ,  $p_z$ -мерным регулируемым выходом  $Z = (z_k)$  и одномерным измеряемым выходом  $Y = (y_k)$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^1$ :

$$(2.1) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & 0 \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad x_0 = 0,$$

где размерности всех матриц согласованы,  $p_z \leq m_w$ , пара матриц  $(A, B_u)$  является стабилизируемой, а пара  $(A, C_y)$  – детектируемой.

Предполагается, что средняя анизотропия последовательности возмущения  $W$  не превосходит известного положительного уровня  $a$ , т.е.

$$W \in \mathcal{W}_a := \left\{ W \in \ell_{\mathcal{P}}^{m_w} : \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a, a > 0 \right\},$$

где

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left( \frac{m_w S(\omega)}{\|W\|_{\mathcal{P}}^2} \right) d\omega$$

— функционал средней анизотропии [3, 4];

$$(2.2) \quad \ell_{\mathcal{P}}^{m_w} := \left\{ W = \begin{matrix} (w_k) \\ -\infty < k < +\infty \end{matrix} : w_k \in \mathbb{L}_2^{m_w} \text{ и } \|W\|_{\mathcal{P}} < +\infty \right\}$$

— пространство стационарных в узком смысле последовательностей случайных векторов, интегрируемых с квадратом;

$$(2.3) \quad \|W\|_{\mathcal{P}} := \left( \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M \mathbf{E}|w_k|^2 \right)^{1/2}$$

— мощностная норма последовательности случайных векторов  $W$  [7], которая может быть вычислена через спектральную плотность  $S(\omega)$  этой последовательности:

$$\|W\|_{\mathcal{P}} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr } S(\omega) d\omega \right)^{1/2}.$$

Рассматриваемая в данной статье задача управления заключается в стабилизации замкнутой системы и обеспечении некоторого желаемого качества подавления случайных возмущений. Для решения этой задачи будет использоваться пропорционально-интегрально-дифференциальный закон управления — ПИД регулятор. Известно достаточно много структур ПИД регуляторов [6]. Модель идеального (теоретического) ПИД регулятора как системы с непрерывным временем описывается передаточной функцией

$$(2.4) \quad K(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s,$$

где  $s$  — переменная преобразования Лапласа,  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$  — коэффициенты усиления пропорциональной, интегрирующей и дифференцирующей составляющих регулятора соответственно. При переходе к дискретному времени с постоянным шагом  $\Delta t = T$  с заменой операции дифференцирования взятием левой конечной разности, что в комплексной области соответствует замене

переменной преобразования Лапласа  $s := \frac{z-1}{Tz}$ , передаточная функция идеального ПИД регулятора примет вид

$$(2.5) \quad K(z) = K_p + K_i T \frac{z}{z-1} + \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z}.$$

Передаточная функция идеального ПИД регулятора (2.4) не является правильной (порядок числителя превышает порядок знаменателя), а идеальное дифференцирующее звено невозможно реализовать, поэтому в практических приложениях используется ПИД регулятор с передаточной функцией

$$(2.6) \quad K(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{s}{\alpha s + 1},$$

где  $\alpha$  — заданный малый постоянный параметр фильтра, заменяющего дифференцирующее звено. При переходе к дискретному времени с использованием замены  $s := \frac{z-1}{Tz}$  передаточная функция ПИД регулятора (2.6) примет вид

$$(2.7) \quad K(z) = K_p + K_i T \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{\alpha(z-1) + Tz} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0},$$

где

$$(2.8) \quad \begin{aligned} b_2 &:= K_p(\alpha - T) + K_d, \\ b_1 &:= -K_p(2\alpha + T) - K_i T(\alpha + T) - K_d, \\ b_0 &:= K_p \alpha - K_i T \alpha + K_d, \\ a_2 &:= \alpha + T, \quad a_1 := -2\alpha - T, \quad a_0 = \alpha. \end{aligned}$$

Реализация передаточной функции (2.7) дискретного ПИД регулятора в пространстве состояний в канонической управляемой форме имеет вид

$$(2.9) \quad K(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1}^c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^c \\ y_k \end{bmatrix}, \quad x_0^c = 0,$$

где  $x_k^c \in \mathbb{R}^2$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^1$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^1$ , а матрицы реализации определяются выражениями

$$(2.10) \quad \begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{a_2} \end{bmatrix}, \\ C_c &= \begin{bmatrix} b_0 - \frac{a_0}{a_2} b_2 & b_1 - \frac{a_1}{a_2} b_2 \end{bmatrix}, \quad D_c = \frac{b_2}{a_2}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в силу (2.8) элементы матриц ПИД регулятора  $A_c$  и  $B_c$  не зависят от коэффициентов усиления  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$ , а зависят лишь от известных заданного параметра  $\alpha$  и шага дискретного времени  $T$ .

Пусть  $T_{zw}(z)$  обозначает матричную передаточную функцию от внешнего входа  $W$  к регулируемому выходу  $Z$  замкнутой системы с ПИД регулятором:

$$(2.11) \quad T_{zw}(z) = P_{zw}(z) + P_{zu}(z) \frac{K(z)}{1 - P_{yu}(z)K(z)} P_{yw}(z),$$

где

$$\begin{aligned} P_{zw}(z) &= C_z(zI_{n_x} - A)^{-1}B_w + D_{zw}, & P_{zu}(z) &= C_z(zI_{n_x} - A)^{-1}B_u, \\ P_{yw}(z) &= C_y(zI_{n_x} - A)^{-1}B_w + D_{yw}, & P_{yu}(z) &= C_y(zI_{n_x} - A)^{-1}B_u, \end{aligned}$$

а передаточная функция ПИД регулятора имеет вид (2.7).

Возможности замкнутой системы по подавлению стохастических возмущений  $W$  с уровнем средней анизотропии, не превышающим известного значения  $a$ , количественно характеризуются анизотропийной нормой передаточной функции (2.11), определяемой как наибольшее отношение мощностной нормы выхода этой системы к мощностной норме входа:

$$(2.12) \quad \|T_{zw}\|_a := \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

Постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального ПИД регулятора для стабилизации объекта управления под воздействием стохастических возмущений формулируется следующим образом.

*Задача управления.* Для заданных объекта управления с передаточной функцией

$$(2.13) \quad P(z) = \begin{bmatrix} P_{zw}(z) & P_{zu}(z) \\ P_{yw}(z) & P_{yu}(z) \end{bmatrix}$$

и моделью в пространстве состояний (2.1), уровня средней анизотропии  $a > 0$  стохастического возмущения  $W$  и некоторого желаемого порогового значения  $\gamma > 0$  найти коэффициенты усиления  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$  ПИД регулятора с передаточной функцией (2.7) и моделью в пространстве состояний (2.9), (2.10), такие чтобы замкнутая система (2.11) была асимптотически устойчива, а ее анизотропийная норма была строго ограничена пороговым значением  $\gamma$ , т.е. чтобы выполнялось условие

$$(2.14) \quad \|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

### 3. Решение задачи синтеза анизотропийного субоптимального ПИД регулятора

Для решения поставленной задачи управления воспользуемся тем, что от искомым неизвестных коэффициентов усиления ПИД регулятора  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$  зависят лишь матрицы  $C_c$  и  $D_c$  его реализации в пространстве состояний (2.9). Это позволяет дополнить вектор состояния системы (2.1) состояниями регулятора (2.9) и в дальнейшем рассматривать в качестве объекта

управления расширенную модель с матрицами реализации

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_w & \mathcal{B}_u \\ \mathcal{C}_z & \mathcal{D}_{zw} & 0 \\ \mathcal{C}_y & \mathcal{D}_{yw} & 0 \end{bmatrix} := \left[ \begin{array}{cc|cc} A & 0 & B_w & B_u \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} & 0 \\ \hline 0 & I_2 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} & 0 \end{array} \right],$$

а в качестве синтезируемого закона управления — статическую обратную связь по выходу расширенной системы с коэффициентом усиления

$$(3.2) \quad K := [ C_c \ D_c ] = [ k_0 \ k_1 \ k_2 ],$$

представляющим собой матрицу-строку  $K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ . Нетрудно убедиться, что матрицы реализации замкнутой системы  $T_{zw}$  в этом случае имеют вид

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_w \\ \mathcal{C}_z & \mathcal{D}_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_u \\ 0 \end{bmatrix} K [ \mathcal{C}_y \ \mathcal{D}_{yw} ] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B}_u K \mathcal{C}_y & \mathcal{B}_w + \mathcal{B}_u K \mathcal{D}_{yw} \\ \mathcal{C}_z & \mathcal{D}_{zw} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} \end{array} \right].$$

Далее отметим, что матрица-столбец  $\mathcal{B}_u \in \mathbb{R}^{(n_x+2) \times 1}$ , очевидно, имеет полный ранг по столбцам, и следовательно существует невырожденная матрица преобразования координат состояния расширенной системы  $T_u \in \mathbb{R}^{(n_x+2) \times (n_x+2)}$ , такая что

$$(3.4) \quad \bar{\mathcal{B}}_u := T_u \mathcal{B}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(n_x+1) \times 1} \end{bmatrix}.$$

В частности, эта матрица может быть выбрана в виде

$$(3.5) \quad T_u = \left[ \mathcal{B}_u \ \mathcal{N}_{\mathcal{B}_u^T} \right]^{-1},$$

где столбцы матрицы  $\mathcal{N}_{\mathcal{B}_u^T}$  образуют базис нуль-пространства матрицы  $\mathcal{B}_u^T$ . В новых координатах матрицы реализации расширенного объекта управления (3.1) имеют вид

$$(3.6) \quad \bar{\mathcal{A}} := T_u \mathcal{A} T_u^{-1}, \quad \bar{\mathcal{B}}_w := T_u \mathcal{B}_w, \quad \bar{\mathcal{C}}_z := \mathcal{C}_z T_u^{-1}, \quad \bar{\mathcal{C}}_y := \mathcal{C}_y T_u^{-1}.$$

Решение поставленной задачи управления дано в следующей теореме, устанавливающей достаточные условия существования ПИД регулятора, стабилизирующего замкнутую систему (2.11) и гарантирующего выполнение условия (2.14).

*Теорема.* Для заданных  $a > 0$  и  $\gamma > 0$  ПИД регулятор (2.9), (2.10), стабилизирующий замкнутую систему (2.11) и гарантирующий выполнение условия (2.14), существует, если система неравенств

$$(3.7) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(3.8) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{S}\bar{B}_w + L\mathcal{D}_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * \\ \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} -\bar{\Phi} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{S}\bar{A} + L\bar{C}_y & \bar{S}\bar{B}_w + L\mathcal{D}_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * \\ \bar{C}_z & \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(3.10) \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Phi} \succ 0, \quad \eta > \gamma^2, \quad \eta \leq \frac{\gamma^2}{1 - e^{-2a/m_w}},$$

где  $\bar{A}, \bar{B}_w, \bar{C}_z, \bar{C}_y$  определяются выражениями (3.6), разрешима относительно скалярной переменной  $\eta$ , вещественных симметричных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$ ,  $((n_x + 2) \times (n_x + 2))$ -матрицы  $\bar{\Phi}$  и двух структурированных матричных переменных

$$(3.11) \quad \bar{S} := \begin{bmatrix} \bar{s}_1 & 0_{1 \times (n_x+1)} \\ 0_{(n_x+1) \times 1} & \bar{S}_2 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} L_1 \\ 0_{(n_x+1) \times 3} \end{bmatrix}.$$

Если система неравенств (3.7)–(3.10) разрешима и неизвестные переменные найдены, то матрица

$$(3.12) \quad K = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{s}_1} L_1,$$

а искомые коэффициенты усиления ПИД регулятора  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$  вычисляются как

$$(3.13) \quad \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -T\alpha & 1 \\ -2\alpha - T & -T\alpha - T^2 & -1 \\ \alpha - T & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_0 + k_2\alpha \\ k_1 - k_2(2\alpha + T) \\ k_2(\alpha + T) \end{bmatrix},$$

где  $\alpha$  — заданный малый постоянный параметр передаточной функции ПИД регулятора (2.7),  $T$  — шаг дискретного времени.



Доказательство приводится в Приложении.

*Следствие.* Условия теоремы позволяют минимизировать  $\hat{\gamma} := \gamma^2$  из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ & \text{на множестве } \Psi, \bar{\Phi}, \bar{S}, L, \eta, \hat{\gamma}, \\ & \text{удовлетворяющих ограничениям } \hat{\gamma} > 0 \text{ и (3.7)–(3.10).} \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи синтеза анизотропийного субоптимального ПИД регулятора (задача вычисления его коэффициентов усиления) сводится к задаче выпуклой оптимизации: минимизировать положительную переменную при ограничениях в виде системы неравенств, включающей неравенство относительно среднего геометрического собственных значений положительно определенной матрицы и двух линейных матричных неравенств.

#### 4. Вычислительный пример

Рассмотрим простой вычислительный пример, в котором объектом управления является модель линейного осциллятора — математического маятника

$$(4.1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} w_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$

с частотой собственных колебаний  $\omega = 8$  и коэффициентом демпфирования  $\xi = 0,01$ . Колебания линейного осциллятора (4.1) возбуждаются стохастическим внешним возмущением  $w_1(t)$ . Система (4.1) является устойчивой, но переходные процессы в ней являются сильно колебательными и затухают слишком медленно. Управление  $u(t)$  служит для стабилизации угла отклонения маятника  $x_1(t)$  под воздействием возмущения  $w_1(t)$ .

Для синтеза закона управления (2.6) регулируемый выход непрерывной модели линейного осциллятора (4.1) был выбран в виде  $z(t) = x_2(t)$ , а измеряемый выход — в виде  $y(t) = x_2(t) + 0,5w_2(t)$ , где  $w_2(t)$  — шум измерений. Непрерывная модель (4.1) была дискретизована с шагом дискретного времени  $\Delta t = T = 10^{-3}$  секунды и приведена к виду (2.1), полученные матрицы реализации дискретной модели объекта управления в пространстве состояний имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0,999968 & 0,999979 \cdot 10^{-3} \\ -0,063999 & 0,999948 \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} 0,999988 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0,199996 \cdot 10^{-2} & 0 \end{bmatrix}, \\ B_u &= \begin{bmatrix} 0,499994 \cdot 10^{-5} \\ 0,999979 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, & C_z = C_y &= [ 0 \quad 1 ], \\ D_{zw} &= 0, & D_{yw} &= [ 0 \quad 0,5 ]. \end{aligned}$$

Малый постоянный параметр  $\alpha$  фильтра передаточной функции ПИД регулятора (2.6) был выбран равным 0,005. Передаточная функция  $K(s)$  была

дискретизована с шагом  $\Delta t = T = 10^{-3}$  секунды и приведена к виду (2.7), для нее была получена реализация в пространстве состояний (2.9) с матрицами

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,833333 & 1,833333 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -166,666667 \end{bmatrix}.$$

Модель объекта управления была расширена согласно (3.1), и для нее по формуле (3.5) была построена невырожденная матрица преобразования координат

$$T_u = \begin{bmatrix} 0,500015 \cdot 10^{-1} & 100,002042 & 0 & 0 \\ -0,500004 \cdot 10^{-3} & 0,250004 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы реализации расширенной модели объекта управления в пространстве состояний  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_w$ ,  $\mathcal{C}_z$  и  $\mathcal{C}_y$  были преобразованы по формулам (3.6).

Для ряда значений средней анизотропии возмущения  $a$ , перечисленных в таблице, из решения задачи выпуклой оптимизации (3.14) по формулам (3.12), (3.13) были рассчитаны коэффициенты усиления  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$  анизотропийного субоптимального ПИД регулятора. Расчеты при  $a \rightarrow +\infty$  ( $\mathcal{H}_\infty$  субоптимальный ПИД регулятор) были выполнены из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(4.2) \quad \hat{\gamma} \rightarrow \inf$$

на множестве  $\bar{\Phi}, \bar{S}, L, \hat{\gamma}$ , удовлетворяющих ограничениям

$$(4.3) \quad \begin{bmatrix} -\bar{\Phi} & * & * & * \\ 0 & -\hat{\gamma} I_{m_w} & * & * \\ \bar{S}\bar{A} + L\bar{C}_y & \bar{S}\bar{B}_w + L\mathcal{D}_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * \\ \bar{C}_z & \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0, \quad \bar{\Phi} \succ 0, \quad \hat{\gamma} > 0.$$

Все расчеты выполнялись в системе Matlab с использованием интерфейса YALMIP и программы-решателя SDPT3 [8]. Результаты расчетов коэффициентов усиления ПИД регулятора для различных значений  $a$  и сравнение замкнутых систем с этими регуляторами сведены в таблицу.

Из анализа результатов решений оптимизационных задач для различных значений уровня средней анизотропии возмущения  $a$ , приведенных в таблице, можно заключить, что с ростом параметра  $a$

- минимальное значение  $\gamma_{\min}$ , полученное при решении задачи выпуклой оптимизации, увеличивается;
- вычисленное значение анизотропийной нормы замкнутой системы с соответствующим ПИД регулятором увеличивается и не превышает значения  $\gamma_{\min}$ , полученного для того же уровня средней анизотропии возмущения  $a$ , т.е. все рассчитанные анизотропийные ПИД регуляторы являются субоптимальными;

Сравнение замкнутых систем и параметров ПИД регуляторов, рассчитанных для различных значений  $a$

$a$	0,02	0,05	0,1	0,4	1,6	6,4	$\rightarrow +\infty$
Результаты решения:							
$\gamma_{\min}$	0,0841	0,1223	0,1647	0,2943	0,4496	0,49974	0,6585
$\ T_{zw}\ _a$	0,0838	0,122	0,1643	0,2938	0,4493	0,49968	0,5
$\ T_{zw}\ _\infty$	0,5266	0,5154	0,5098	0,5035	0,5008	0,50001	0,5
Коэффициенты усиления ПИД регулятора:							
$K_p$	-0,55125	-0,72652	-0,90904	-1,49915	-3,01166	-17,1849	-46,3446
$K_i$	-348,171	-458,875	-574,157	-946,886	-1902,03	-10854,1	-29267,6
$K_d$	-0,00493	-0,0065	-0,00813	-0,01341	-0,02695	-0,15376	-0,41463
Результаты моделирования для системы с анизотропийным ПИД регулятором:							
$\max_k  u_k $	4,41	5,88	6,325	8,997	14,318	10,44	22,09
$\max_k  x_{1,k} $	0,339	0,323	0,33	0,326	0,344	1,39	2,17
$\max_k  x_{2,k} $	2,28	1,98	1,66	1,25	1,602	1,49	1,97
Результаты моделирования для системы с $\mathcal{H}_\infty$ ПИД регулятором:							
$\max_k  u_k $	302,63	320,92	290,95	214,993	116,92	34,2	22,09
$\max_k  x_{1,k} $	0,0701	0,0944	0,128	0,0989	0,635	3,68	2,17
$\max_k  x_{2,k} $	2,68	2,72	2,87	2,5	2,48	2,32	1,97

- вычисленное значение  $\mathcal{H}_\infty$  нормы замкнутой системы с соответствующим анизотропийным ПИД регулятором уменьшается и стремится к  $\mathcal{H}_\infty$  норме системы, замкнутой  $\mathcal{H}_\infty$  субоптимальным ПИД регулятором;
- коэффициенты усиления  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$  анизотропийного субоптимального ПИД регулятора увеличиваются и принимают наибольшие значения при  $a \rightarrow +\infty$ , что соответствует  $\mathcal{H}_\infty$  субоптимальному ПИД регулятору.

Некоторые результаты моделирования движения замкнутых систем с ПИД регуляторами, построенными для различных уровней средней анизотропии возмущения  $a$ , также отражены в таблице, где для сравнения приводятся аналогичные величины для системы, замкнутой  $\mathcal{H}_\infty$  субоптимальным ПИД регулятором, на вход которой воздействуют возмущения с теми же уровнями средней анизотропии. Из анализа данных таблицы можно заключить, что

- с ростом параметра  $a$  максимальные абсолютные амплитуды сигналов управления, вырабатываемых соответствующими анизотропийными ПИД регуляторами, также возрастают;
- при этом для всех значений  $a < +\infty$  амплитуды управляющих воздействий анизотропийных регуляторов значительно меньше (для малых значений средней анизотропии — в десятки раз) аналогичных показателей для замкнутой системы с  $\mathcal{H}_\infty$  регулятором при тех же возмущениях;
- максимальные абсолютные значения регулируемой переменной — угловой скорости математического маятника  $x_2$  — в замкнутых системах с анизотропийными ПИД регуляторами для всех значений  $a < +\infty$  меньше аналогичных значений в замкнутой системе с  $\mathcal{H}_\infty$  регулятором при тех же возмущениях;

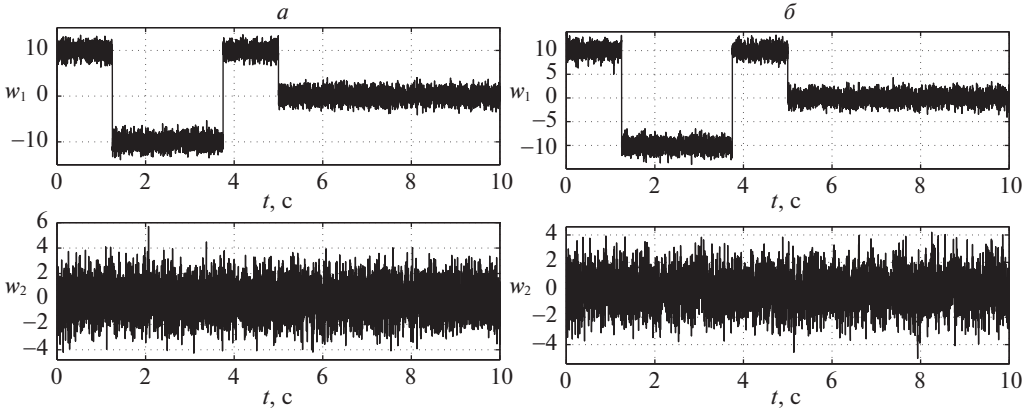


Рис. 1. Стохастические возмущения с различными уровнями средней анизотропии:  $a - \overline{\mathbf{A}}(W) = 0,1$ ;  $b - \overline{\mathbf{A}}(W) = 0,4$ .

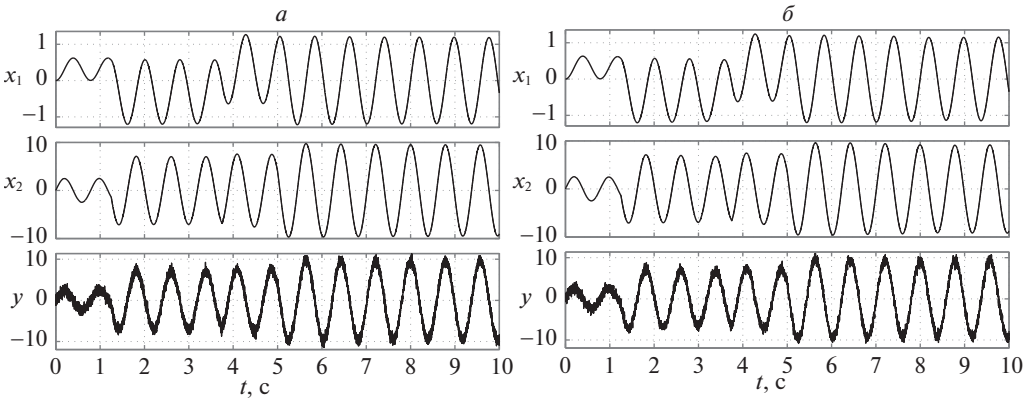


Рис. 2. Реакция разомкнутой системы на возмущения с различными уровнями средней анизотропии:  $a - \overline{\mathbf{A}}(W) = 0,1$ ;  $b - \overline{\mathbf{A}}(W) = 0,4$ .

- несмотря на то что замкнутая система с  $\mathcal{H}_\infty$  регулятором демонстрирует меньшие максимальные абсолютные значения угла отклонения математического маятника — переменной  $x_1$  — для ряда возмущений с невысоким уровнем средней анизотропии  $a$ , это достигается за счет совершенно несопоставимых энергетических затрат на управление по сравнению с анизотропийными субоптимальными ПИД регуляторами.

Результаты моделирования для двух уровней средней анизотропии возмущения ( $a = 0,1$  и  $a = 0,4$ ) проиллюстрированы на рис. 1–4, на которых представлены графики сигналов возмущений с данными уровнями средней анизотропии, временные диаграммы переменных состояния и измеряемого выхода разомкнутой системы при подаче на ее вход данных возмущений (при нулевом входе управления), а также временные диаграммы переменных состояния и сигналов управления в замкнутых системах с соответствующими анизотропийными ПИД регуляторами и с  $\mathcal{H}_\infty$  регулятором.

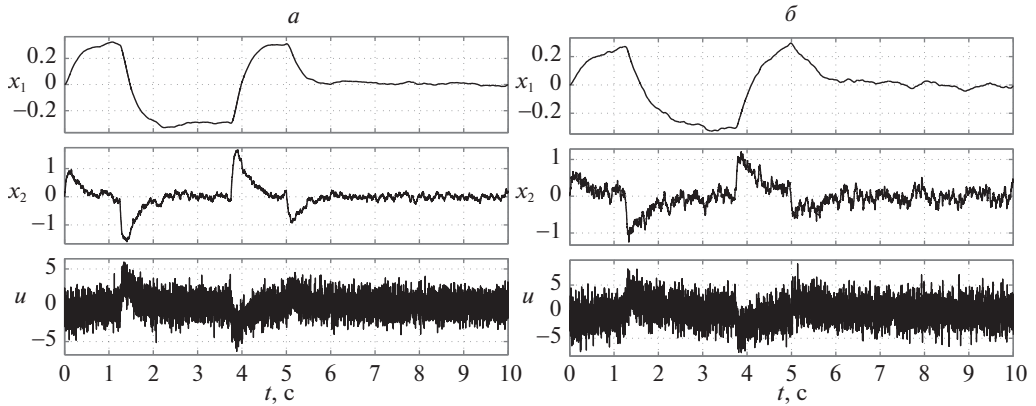


Рис. 3. Реакция замкнутых систем с анизотропийными ПИД регуляторами, построенными для различных  $a$ , на возмущения с соответствующими уровнями средней анизотропии:  $a - \bar{\mathbf{A}}(W) = 0,1$ ;  $б - \bar{\mathbf{A}}(W) = 0,4$ .

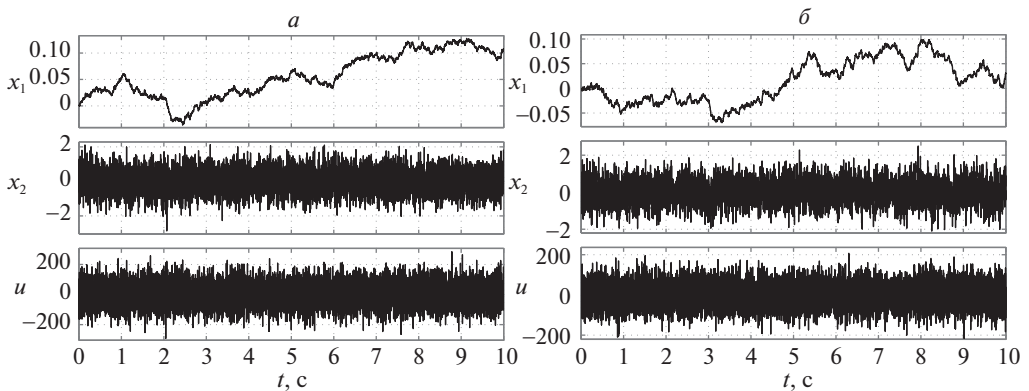


Рис. 4. Реакция замкнутой системы с  $\mathcal{H}_\infty$  ПИД регулятором на возмущения с различными уровнями средней анизотропии:  $a - \bar{\mathbf{A}}(W) = 0,1$ ;  $б - \bar{\mathbf{A}}(W) = 0,4$ .

## 5. Заключение

Поставлена и решена задача синтеза анизотропийного субоптимального пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) закона управления для дискретной линейной стационарной системы с одномерными входом управления и измеряемым выходом, подверженной воздействию неопределенного стохастического возмущения с ограниченной средней анизотропией. Задача заключалась в нахождении трех коэффициентов усиления ПИД регулятора, таких чтобы замкнутая система была асимптотически устойчива и анизотропийная норма ее передаточной функции от входа возмущения к регулируемому выходу была строго ограничена заданным пороговым значением, обеспечивая заданное качество подавление возмущения. При дискретизации передаточной функции непрерывной модели выбранной формы ПИД регуля-

тора и при последующем переходе при его описании к модели в пространстве состояний две матрицы реализации регулятора являются полностью известными и лишь две другие зависят от искомым неизвестных коэффициентов усиления. Этот факт используется для решения поставленной задачи. Исходная модель объекта управления в пространстве состояний дополняется известным вектором состояния ПИД регулятора, известные матрицы реализации регулятора включаются в расширенную модель объекта, и для нее задача нахождения неизвестных коэффициентов усиления становится задачей синтеза закона управления в виде статической обратной связи по измеряемому выходу. Последняя задача решается методами выпуклой оптимизации и линейных матричных неравенств. Получены достаточные условия существования анизотропийного субоптимального ПИД регулятора, а процедура его синтеза сводится к решению системы неравенств, включающей неравенство относительно среднего геометрического собственных значений положительно определенной матрицы и двух линейных матричных неравенств. При этом возможна минимизация порогового значения, ограничивающего анизотропийную норму передаточной функции системы, замкнутой ПИД регулятором.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем лемму, применяемую в доказательстве теоремы.

*Лемма.* Для заданных  $a > 0$  и  $\gamma > 0$  передаточная функция замкнутой системы  $T_{zw}$  с реализацией (3.3) устойчива и удовлетворяет условию (2.14), если система неравенств

$$(П.1) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(П.2) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0,$$

$$(П.3) \quad \Psi \succ 0, \quad \Phi \succ 0, \quad \eta > \gamma^2, \quad \eta \leq \frac{\gamma^2}{1 - e^{-2a/m_w}}$$

разрешима относительно скалярной переменной  $\eta$  и вещественных симметричных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$  и  $(n \times n)$ -матрицы  $\Phi$ , где  $n$  — порядок замкнутой системы.

Доказательство леммы следует из теоремы 4 в [5].

*Доказательство теоремы.* Пусть решение системы неравенств (3.7)–(3.10) существует, найдено и данные неравенства выполняются. Конгруэнтное преобразование неравенств (3.8), (3.9) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, T_u^\Gamma, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(T_u^\Gamma, I_{m_w}, T_u^\Gamma, I_{p_z})$$

соответственно приводит к линейным матричным неравенствам

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^T \bar{S} T_u \mathcal{B}_w + T_u^T L \mathcal{D}_{yw} & T_u^T (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T) T_u & * \\ \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -T_u^T \bar{\Phi} T_u & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^T \bar{S} T_u \mathcal{A} + T_u^T L \mathcal{C}_y & T_u^T \bar{S} T_u \mathcal{B}_w + T_u^T L \mathcal{D}_{yw} & T_u^T (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T) T_u & * \\ \mathcal{C}_z & \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Обозначим  $S := T_u^T \bar{S} T_u$ ,  $\Phi := T_u^T \bar{\Phi} T_u$ . Из выражений (3.4) и (3.12) следует, что  $\mathcal{B}_u = T_u^{-1} \bar{\mathcal{B}}_u$ ,  $L_1 = \bar{s}_1 K$ . С учетом определения блочных матриц (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \text{(П.4)} \quad T_u^T L &= T_u^T \begin{bmatrix} L_1 \\ 0_{(n_x+1) \times 3} \end{bmatrix} = T_u^T \begin{bmatrix} \bar{s}_1 K \\ 0_{(n_x+1) \times 3} \end{bmatrix} = \\ &= T_u^T \begin{bmatrix} \bar{s}_1 & 0_{1 \times (n_x+1)} \\ 0_{(n_x+1) \times 1} & \bar{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(n_x+1) \times 1} \end{bmatrix} K = T_u^T \bar{S} \bar{\mathcal{B}}_u K = S \mathcal{B}_u K, \end{aligned}$$

и предыдущие ЛМН можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S(\mathcal{B}_w + \mathcal{B}_u K \mathcal{D}_{yw}) & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S(\mathcal{A} + \mathcal{B}_u K \mathcal{C}_y) & S(\mathcal{B}_w + \mathcal{B}_u K \mathcal{D}_{yw}) & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{C}_z & \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

или в терминах матриц реализации замкнутой системы (3.3) — в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{A} & S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование этих неравенств с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(I_{n_x}, I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z})$$

соответственно приводит к неравенствам

$$(II.5) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & & * & * \\ \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * & * \\ \mathcal{D} & 0 & & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(II.6) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Поскольку  $\Phi \succ 0$ , то для любой обратимой матрицы  $S$  всегда выполняется неравенство

$$(S^{-1} - \Phi^{-1})(-\Phi)(S^{-1} - \Phi^{-1})^T \preceq 0$$

и

$$(-S^{-1}\Phi + I_{n_x+2})(S^{-1} - \Phi^{-1})^T = -S^{-1}\Phi S^{-T} + S^{-T} + S^{-1} - \Phi^{-1} \preceq 0,$$

откуда следует, что

$$-\Phi^{-1} \preceq S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T},$$

т.е. при выполнении неравенств (3.7), (II.5), (II.6) и (3.10) выполняются неравенства (II.1)–(II.3), и в силу леммы передаточная функция замкнутой системы  $T_{zw}$  с реализацией (3.3) устойчива и удовлетворяет условию (2.14) поставленной задачи управления. Выражения (3.13) для вычисления искомых коэффициентов усиления ПИД регулятора  $K_p$ ,  $K_i$  и  $K_d$  следуют из (2.8), (2.10) и проверяются непосредственной подстановкой. Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // ДАН. 1995. № 3. С. 583–585.  
*Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V. Anisotropy of Signals and Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Math. 1995. V. 82. No. 3. P. 386–390.*
2. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Стохастическая проблема  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации // ДАН. 1995. Т. 343. № 5. С. 607–609.  
*Vladimirov I., Kurdyukov A., Semyonov A. The Stochastic Problem of H-infinity Optimization // Doklady Math. 1995. V. 52. P. 155–157.*
3. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V. State-Space Solution to Anisotropy-Based Stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization Problem // Proc. 13th IFAC World Congr., San-Francisco, USA. 1996. P. 427–432.
4. Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., et al. Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time Invariant Control Systems // Int. J. Contr. 2001. No. 74. P. 28–42.



5. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Критерий строгой ограниченности анизотропной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств // ДАН. 2011. Т. 441. № 3. С. 318–321.  
*Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Matrix Inequalities // Doklady Math. 2011. V. 84. No. 3. P. 895–898.
6. *Aström K.J., Hägglund T.* Advanced PID control. Instrumentation, Systems, and Automation Society: Research Triangle Park, NC, 2006.
7. *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.A., et al.* Mixed  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Performance Objectives I: Robust Performance Analysis, II: Optimal Control // IEEE Trans. AC. 1994. V. 39. P. 1564–1574, 1575–1587.
8. *Löfberg J.* YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in Matlab // Proc. CACSD Conf. Taipei, Taiwan, 2004.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньым.*

Поступила в редакцию 28.06.2018

После доработки 09.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018