

© 2020 г. В.Н. ОВЧАРЕНКО, д-р техн. наук (owcharenko.v@yandex.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается задача структурно-параметрической идентификации стационарных линейных динамических систем. Предложен новый метод структурно-параметрической идентификации динамической системы, основанный на построении множества слабоэквивалентных систем возрастающей сложности. Под структурно-параметрической идентификацией понимается оценка порядка дифференциальных уравнений, всех коэффициентов, удовлетворяющих некоторым ограничениям, неизвестных начальных условий и смещения измерителя. Решение задачи структурно-параметрической идентификации получается за конечное число шагов. На тестовом примере показано, что предложенный метод имеет высокую чувствительность в условиях интенсивных измерительных ошибок.

Ключевые слова: структурная идентификация, параметрическая идентификация, линейные динамические системы.

DOI: 10.31857/S0005231020010018

1. Введение

Большое количество работ по структурной идентификации математических моделей, появившихся в трудах различных конференций, семинаров, монографиях и журналах указывает на значительный интерес специалистов к этой проблеме и актуальность самой проблемы. Необходимость решения проблемы структурной идентификации обусловлена различными причинами, которые встречаются в процессе создания сложных технических систем [1]. Одной из таких причин является повышение точности вычисления оценок неизвестных параметров по результатам ограниченного числа экспериментов. Вычисленные оценки параметров сравниваются с их априорными значениями, полученными либо расчетным путем, либо в полунатурных экспериментах в полностью контролируемых условиях их проведения. Неприемлемые ошибки оценок неизвестных параметров, существенное отличие оценок от их априорных значений указывают на несоответствие экспериментальных данных структуре математической модели, принятой на этапе обработки результатов эксперимента. Причиной несоответствия экспериментальных данных структуре математической модели могут быть скрытые, ненаблюдаемые переменные, влияющие на отклик динамической системы. Ненаблюдаемые переменные могут быть обусловлены изменением условий эксперимента

и их присутствие в каждом эксперименте не обязательно. Таким образом, возникает проблема совместного определения параметров и структуры математической модели по результатам натурального эксперимента, т.е. проблема структурно-параметрической идентификации.

Л. Заде [2] связывает структурную идентификацию с понятием эквивалентности систем из выбранного класса систем. Одной из первых монографий, посвященных структурной идентификации линейных динамических систем, была, по-видимому, [3], в которой был разработан метод типовой табличной идентификации устойчивых динамических систем. Основой метода является анализ оценок корреляционных функций пары вход — выход. Этот метод давал решение задачи структурной идентификации для динамических систем до третьего порядка включительно. Эквивалентность структур динамических систем рассматривалась в терминах корреляционных функций пары вход — выход. В [4, 5] с общих позиций рассматривается анализ проблемы структурной идентификации и установлено, что ее успешное решение сводится к разработке и обоснованию соответствующих критериев и алгоритмов. В монографии [6] предлагается метод оценки порядка линейной динамической системы, основанный на расширении входного пространства системы введением вспомогательных переменных. В [7] анализируется структура модели в целях дальнейшего решения задачи параметрической идентификации.

Решение задачи параметрической идентификации динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями, традиционно проводится во временной области и связано с необходимостью численного интегрирования дифференциальных уравнений. Это может привести к дополнительным трудностям решения задачи параметрической идентификации, обусловленным динамическими характеристиками объекта и информационно-измерительной системы. Поэтому иногда задачу параметрической идентификации целесообразно решать частотными методами [8]. Частотные методы идентификации были одними из первых методов идентификации математических моделей динамических систем. Свойства стационарной линейной динамической системы можно описать в терминах отношения амплитуд и сдвига фаз гармонических сигналов на входе и выходе изучаемого объекта. К особенностям частотных методов относятся: а) простота вычислений частотных характеристик наблюдаемых переменных в присутствии измерительных шумов; б) возможность непараметрической идентификации структуры математической модели в виде частотных характеристик; в) возможность независимого выбора точек частотного диапазона для каждой пары входного и выходного сигналов; г) возможность идентификации временных запаздываний в экспериментальных данных; д) возможность обобщения вычислительных алгоритмов идентификации на многоканальные системы вход — выход и на нелинейные динамические системы; е) возможность применения к идентификации неустойчивых динамических систем.

В [9–11] предложен частотно-временной метод параметрической идентификации, сочетающий в себе вычисления в частотной и во временной области и позволяющий применить его к решению задачи структурно-параметрической идентификации линейных систем с постоянными коэффициентами. Новый метод структурно-параметрической идентификации основан на сквозном

применении частотно-временного метода как для решения задачи параметрической идентификации, так и для решения проблемы структурной идентификации. В данной статье предложен новый метод структурной идентификации, основанный на анализе свойств слабой эквивалентности линейных систем [12] различной структуры. Проведенный анализ позволил предложить алгоритм определения порядка системы дифференциальных уравнений на множестве слабозэквивалентных динамических систем по наблюдаемой паре вход — выход на ограниченном интервале времени в присутствии измерительных помех. Порядок динамической системы определяется за конечное число шагов.

На иллюстративном примере показано, что предложенный метод имеет высокую чувствительность и позволяет выявить скрытые ненаблюдаемые входные сигналы в условиях интенсивных инструментальных помех.

2. Постановка задачи структурно-параметрической идентификации

Рассмотрим устойчивую линейную стационарную непрерывную систему, заданную дифференциальным уравнением n -го порядка на интервале времени $t \in [0, T]$

$$(1) \quad \begin{aligned} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1x^{(1)} + a_0x &= \\ &= b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \end{aligned}$$

где x — скалярный выходной сигнал; u — скалярный входной сигнал, такой что $u(t) \neq \text{const}$; $x^{(k)}, u^{(k)}$ — k -е производные; начальные условия $x_0^{(k)}$; $k = 0, 1, \dots, n - 1$ известны полностью или частично.

Наблюдается скалярная функция времени $y(t)$, линейно связанная с процессом $x(t)$:

$$(2) \quad y(t) = x(t) + b_y + \eta(t),$$

где $\eta(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним, описывает измерительный шум; b_y — неизвестное смещение измерителя на интервале $[0, T]$, обусловленное смещением нуля измерителя и/или конечным временным интервалом измерений (на этом интервале измеритель “шумит” несимметрично).

Обозначим через $\alpha = (a_{n-1}, \dots, a_0)$, $\beta = (b_{n-1}, \dots, b_0)$, $\chi = (x_0^{(n-1)}, \dots, x_0)$ — n -мерные векторы параметров и начальных условий уравнения (1). На входном сигнале $u(t)$ наблюдается выход $y(t) = y(t; \alpha, \beta, \chi)$, зависящий от векторов параметров, начальных условий и смещения, т.е. наблюдаемый выход $y(t)$ является траекторией в $(3n + 1)$ -мерном параметрическом пространстве. В общем случае на входной сигнал и параметры наложены ограничения $u \in U$, $(\alpha, \beta) \in \Theta$.

Под структурно-параметрической идентификацией будем понимать решение следующей задачи.

Задача 1. На интервале $[0, T]$ выполняется одиночный эксперимент. Требуется по наблюдениям пары вход — выход $(u(t), y(t))$, $t \in [0, T]$ определить порядок n ; все коэффициенты $(\alpha, \beta) \in \Theta$; неизвестные начальные условия χ системы (1) и смещение b_y в (2).

Дальнейший анализ ограничен системами конечного порядка.

3. Принцип оценки порядка динамической системы

Рассмотрим уравнения (1) и (2) при условиях $b_y = 0$, $\eta(t) \equiv 0$, а в качестве пары вход — выход — (u, x) . Принцип оценки порядка динамической системы (1) по результатам единственного эксперимента на интервале $[0, T]$ основан на фундаментальных свойствах линейных систем, к которым относится свойство эквивалентности двух и более систем [12]. Обозначим через \mathbb{S}_n линейную динамическую систему (1) порядка n ; векторы α , β , χ имеют размерности, согласованные с порядком системы.

Определение 1. Система \mathbb{S}_n является следствием системы \mathbb{S}_m на интервале $[0, T]$ (вложением в систему \mathbb{S}_m), или $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}_m$, если каждая пара вход — выход (u, x) системы \mathbb{S}_n является также парой вход — выход (u, x) системы \mathbb{S}_m .

Определение 2. Если система \mathbb{S}_n является следствием системы \mathbb{S}_m на интервале $[0, T]$, а система \mathbb{S}_m является следствием системы \mathbb{S}_n на том же интервале, то системы \mathbb{S}_n и \mathbb{S}_m слабоэквивалентны $\mathbb{S}_n \equiv \mathbb{S}_m$ (в условиях одиночного эксперимента) на интервале $[0, T]$.

Определение 3. Системы слабоэквивалентны $\mathbb{S}_n \equiv \mathbb{S}_m$ (в условиях одиночного эксперимента) на интервале $[0, T]$ тогда и только тогда, когда для каждого входа $u(t)$ и $(3n + 1)$ -мерного параметрического состояния $\gamma_n = (\alpha, \beta, \chi)_n$ системы \mathbb{S}_n найдется $(3m + 1)$ -мерное параметрическое состояние $\gamma_m = (\alpha, \beta, \chi)_m$ (зависящее от $u(t)$ и γ_n) системы \mathbb{S}_m такое, что реакция на $u(t)$ системы \mathbb{S}_n , находящейся в состоянии γ_n , совпадает с реакцией на $u(t)$ системы \mathbb{S}_m , находящейся в состоянии γ_m , и наоборот.

В символической записи

$$\{\mathbb{S}_n \equiv \mathbb{S}_m\} \Leftrightarrow \{\forall \gamma_n \forall u \exists \gamma_m [\bar{S}_n(\gamma_n; u) = \bar{S}_m(\gamma_m; u)]\};$$

$$\{\mathbb{S}_m \equiv \mathbb{S}_n\} \Leftrightarrow \{\forall \gamma_m \forall u \exists \gamma_n [\bar{S}_m(\gamma_m; u) = \bar{S}_n(\gamma_n; u)]\}.$$

Здесь порядок кванторов указывает на зависимость начального состояния одной системы от начального состояния другой системы; $\bar{S}_n(\gamma_n; u)$, $\bar{S}_m(\gamma_m; u)$ — реакции систем $\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_m$ на входной сигнал $u(t)$ и параметры γ_n, γ_m (различной размерности) соответственно.

Теорема 1. Пусть наблюдаемая на интервале $[0, T]$ пара вход — выход (u, x) порождена динамической системой \mathbb{S}_n порядка n . Тогда не существует динамической системы $(\mathbb{S}_k, k < n)$ меньшего порядка, слабоэквивалентной системе \mathbb{S}_n .

Доказательство теоремы 1. Действительно, выход $x(t)$ системы \mathbb{S}_n порядка n определяется $(3n + 1)$ -мерным вектором параметров γ_n , тогда как реакция системы $(\mathbb{S}_k, k < n)$ порядка k для всех входных сигналов $u(t)$ определяется $(3k + 1)$ -мерным вектором параметров γ_k меньшей размерности. Поэтому любой отклик системы \mathbb{S}_k порядка k является проекцией выхода $x(t)$ на пространство параметров меньшей размерности. Следовательно, система \mathbb{S}_k не может быть вложением в систему \mathbb{S}_n . \square

Пусть на интервале $[0, T]$ в единичном эксперименте с динамической системой \mathbb{S}_{n_0} порядка n_0 получена пара вход — выход (u, x) . Предположим, что для $\forall k, t$ таких, что $n_0 < k < t$, можно построить слабоэквивалентные системы

$\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}_k$ и $\mathbb{S}_k \subset \mathbb{S}_m$ и выполняется свойство транзитивности $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}_m$. Тогда существует последовательность вложений $\mathbb{S}_{n_0} \subset \mathbb{S}_{n_0+1} \subset \dots \subset \mathbb{S}_m \subset \dots$. Отсюда следует, что для данной пары вход — выход (u, x) в условиях единичного эксперимента n_0 — наименьший порядок, начиная с которого существуют слабоэквивалентные системы большего порядка.

Порядок n динамической системы (1) определяется размерностью векторов параметров α и β и не зависит от вектора начальных условий χ . Поэтому необходимо рассмотреть некоторые общие свойства вложенных систем $\mathbb{S}_{n_0} \subset \mathbb{S}_{n_0+1} \subset \dots \subset \mathbb{S}_m \subset \dots$ на наборах эквивалентных начальных условий.

Определение 4. Динамические системы \mathbb{S}_n и \mathbb{S}_m слабоэквивалентны на интервале $[0, T]$ при нулевых начальных условиях (в единичном эксперименте), если каждому нулевому начальному состоянию системы \mathbb{S}_n соответствует эквивалентное нулевое начальное состояние системы \mathbb{S}_m .

Теорема 2. Пусть слабоэквивалентные системы $\mathbb{S}_n \equiv \mathbb{S}_m, n \neq m$ также слабоэквивалентные при нулевом входном сигнале $u(t) \equiv 0$ на интервале $[0, T]$

$$x(t, \gamma_n; u = 0) = x(t, \gamma_m; u = 0).$$

Тогда динамические системы \mathbb{S}_n и \mathbb{S}_m слабоэквивалентны при нулевых начальных условиях

$$x(t; \alpha_n, \beta_n, \chi_n = 0; u) = x(t; \alpha_m, \beta_m, \chi_m = 0; u),$$

а их передаточные функции равны $W_n(p) = W_m(p)$.

Доказательство теоремы 2 следует из свойства разложения реакции линейной динамической системы на сумму свободного и вынужденного движений. \square

Таким образом, анализ вложений динамической системы сводится к анализу передаточных функций и их частотных характеристик в условиях единичного эксперимента.

Следствие 1. Пусть n_0 — наименьший порядок, начиная с которого существуют слабоэквивалентные системы большего порядка при нулевых начальных условиях. Тогда для вложений $\mathbb{S}_{n_0} \subset \mathbb{S}_{n_0+1} \subset \dots \subset \mathbb{S}_m \subset \dots$ последовательные отношения частотных характеристик слабоэквивалентных динамических систем возрастающего порядка не зависят от частоты

$$(3) \quad \frac{W_{n_0+1}(j\omega)}{W_{n_0}(j\omega)} = \frac{W_{n_0+2}(j\omega)}{W_{n_0+1}(j\omega)} = \dots = \frac{W_{n_0+k}(j\omega)}{W_{n_0+k-1}(j\omega)} = \dots = 1.$$

Доказательство следствия вытекает из теоремы 2 путем очевидных последовательных подстановок частотных характеристик динамических систем возрастающего порядка. Амплитудно-фазовые частотные характеристики (3) имеют значения $(1, \pm 2\pi k, k = 0, 1, \dots)$ для всех частот, согласованных с интервалом $[0, T]$ (см. далее раздел 4). \square

Полученные результаты приводят к следующему принципу оценки порядка динамической системы: по наблюдениям на интервале $[0, T]$ пары вход — выход (u, x) вычисляются последовательность оценок передаточных функций возрастающего порядка и отношение их частотных характеристик (3); наименьшее значение n_0 , для которого выполняются условия (3), принимается за

оценку порядка динамической системы (1); оценка порядка n_0 динамической системы выполняется за $(n_0 + 1)$ шагов.

Рассмотрим условия слабой эквивалентности динамических систем в присутствии измерительного шума $\eta(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. Этот случай сводится к предыдущему, если принять

$$y(t) = \hat{x}(t),$$

где $\hat{x}(t) = x(t) + \eta(t)$ — оценка выходного сигнала системы (1). Вычисляя математическое ожидание оценки $\hat{x}(t)$, получим

$$M[\hat{x}(t)] = x(t),$$

т.е. необходимо потребовать выполнение условия несмещенности $\hat{x}(t)$. Если условие несмещенности оценки $\hat{x}(t)$ выполняется, то свойства слабой эквивалентности динамических систем следует записать относительно математического ожидания оценки выходного сигнала $M[\hat{x}(t)]$. Кроме того, из свойства несмещенности оценки выхода $\hat{x}(t)$ следует несмещенность оценки частотной характеристики

$$M[\widehat{W}(j\omega)] = W(j\omega)$$

и выражение (3) принимает вид

$$\frac{M[\widehat{W}_{n_0+1}(j\omega)]}{M[\widehat{W}_{n_0}(j\omega)]} = \frac{M[\widehat{W}_{n_0+2}(j\omega)]}{M[\widehat{W}_{n_0+1}(j\omega)]} = \dots = \frac{M[\widehat{W}_{n_0+k}(j\omega)]}{M[\widehat{W}_{n_0+k-1}(j\omega)]} = \dots = 1.$$

Необходимо отметить следующие особенности применения принципа оценки порядка к данным натурального эксперимента:

- 1) амплитудно-фазовые частотные характеристики отношений (3) имеют значения $(1, \pm 2\pi k)$, $k = 0, 1, \dots$ для всех $n > n_0$ и на всех частотах;
- 2) если условия (3) выполняются начиная с некоторого $(n_0 + 1)$ для всех практически важных частот, то это указывает на линейную динамическую систему;
- 3) если условия (3) выполняются в ограниченном частотном диапазоне, то это указывает на исходную нелинейную систему, но которая проявляет себя как линейная система в этом частотном интервале;
- 4) частотный диапазон для проверки условий (3) должен быть согласован с частотным спектром входного сигнала и не пересекаться с частотным спектром измерительного шума.

4. Параметрическая идентификация динамической системы

Идентификация частотных характеристик пары вход — выход (u, x) для систем возрастающего порядка по наблюдениям системы (1), (2) на интервале $[0, T]$ является нетривиальной задачей. Трудности ее решения обусловлены

влиянием на оценки частотных характеристик измерительного шума, неизвестного смещения и неизвестных начальных условий как функций неизвестного порядка динамической системы. Поэтому в настоящей работе предлагается сначала определить все неизвестные параметры $(\alpha, \beta) \in \Theta$, χ , b_y динамической системы (1), (2) для различных возрастающих порядков, а затем на оценках параметров при нулевых начальных условиях $\chi = 0$ вычислить частотные характеристики. Для решения этой задачи запишем динамическую систему (1), (2) в форме Фробениуса:

$$(4) \quad \dot{z} = A(\alpha)z + B(\beta)u,$$

где

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -a_1 & 0 & \cdots & 1 & \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 & \end{bmatrix}; \quad B(\beta) = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix};$$

$(z_1, \dots, z_{n-1})^T$ — вектор ненаблюдаемых вспомогательных переменных.

Наблюдаемая скалярная функция (2) примет вид

$$(5) \quad y(t) = Hz + b_y + \eta(t),$$

где $H = [1, 0, \dots, 0]$ — матрица размера $1 \times n$.

Математические модели динамической системы, записанные уравнениями (1), (2) и в форме Фробениуса (4), (5), эквивалентны по параметрам (α, β) на паре вход — выход (u, x) и не эквивалентны по вектору начальных условий $(x_0^{(n-1)}, \dots, x_0) \neq (x_0, z_{10}, \dots, z_{(n-1)0})$. Неэквивалентность по вектору начальных условий не оказывает влияния на оценку частотных характеристик, которые вычисляются на оценках параметров (α, β) .

Задача 2. Пусть задан порядок n динамической системы (4), (5). Требуется по наблюдениям пары вход — выход (u, y) на интервале $[0, T]$ вычислить оценки неизвестных параметров $(\alpha, \beta) \in \Theta$, начальных условий $\chi = (x_0, z_{10}, \dots, z_{(n-1)0})$ и смещения b_y .

Для решения этой задачи применим частотно-временной метод идентификации [9–11], который имеет ряд следующих достоинств: 1) переход в частотную область выполняется с помощью финитного преобразования Фурье, которое вычисляется только один раз; 2) общая задача идентификации разделяется на задачу оценки параметров $(\alpha, \beta) \in \Theta$ (решается в частотной области) и задачу оценки начальных условий (решается во временной области на оценках параметров); 3) если ограничиться только вычислением частотных характеристик системы (1), то необходимость решения второй задачи отсутствует.

Определим дискретное множество частот

$$(6) \quad \Omega = \left\{ \omega_k : \omega_k = \frac{2\pi}{T}k, k = 1, \dots, K \right\},$$

где $K \leq T f_N$; $f_N = 1/h$ — частота Найквиста; h — шаг измерений, и вычислим на Ω финитные преобразования Фурье уравнений (4), (5):

$$\begin{aligned} j\omega_k Z_T(j\omega_k) - z(0) + z(T) &= A(\alpha)Z_T(j\omega_k) + B(\beta)U_T(j\omega_k); \\ Y_T(j\omega_k) &= HZ_T(j\omega_k) + \eta_T(j\omega_k). \end{aligned}$$

Здесь $(U_T(j\omega_k), Z_T(j\omega_k), Y_T(j\omega_k), \eta_T(j\omega_k))$ — финитные преобразования Фурье функций $(u(t), z(t), y(t), \eta(t))$:

$$\begin{aligned} (U_T(j\omega_k), Z_T(j\omega_k), Y_T(j\omega_k), \eta_T(j\omega_k), 0) &= \\ &= \int_0^T (u(t), z(t), y(t), \eta(t), b_y) e^{-j\omega_k t} dt; \quad j = \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Выполняя элементарные алгебраические преобразования, получим

$$(7) \quad Y_T(j\omega_k) = H[j\omega_k E_n - A(\alpha)]^{-1}[\Delta z + B(\beta)U_T(j\omega_k)] + \eta_T(j\omega_k),$$

где E_n — единичная матрица порядка n ; $\Delta z = z(0) - z(T)$. Отсюда видно, что $Y_T(j\omega_k)$ зависит от параметров (α, β) и от разности граничных условий Δz , которые не наблюдаются и нуждаются в оценке.

Запишем критерий метода наименьших квадратов на дискретном множестве частот (6) в виде

$$(8) \quad J(\alpha, \beta, \Delta z) = \sum_{k=1}^K \varepsilon(-j\omega_k) \varepsilon(j\omega_k),$$

где $\varepsilon(j\omega_k) = Y_T(j\omega_k) - H[j\omega_k E_n - A(\alpha)]^{-1}[\Delta z + B(\beta)U_T(j\omega_k)]$.

Оценки параметров $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \Theta$ и разности граничных условий $\Delta \hat{z}$ вычисляются минимизацией критерия (8) численными методами нелинейного программирования:

$$(9) \quad (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \Delta \hat{z}) = \arg \min_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \Theta, \Delta z} J(\alpha, \beta, \Delta z).$$

Вычисление интегралов Фурье целесообразно выполнять по формуле Филлона [11, 13], так как в этом случае точность вычислений не зависит от частотного спектра измеренных данных. Оценки $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \Theta$ вычисляются алгебраическими методами. Необходимость численного интегрирования уравнений (4) отсутствует. Поэтому требование устойчивости систем (1) и (4) учитывается неявно через множество допустимых значений неизвестных параметров Θ .

Оценки вектора начальных условий $\hat{\chi}$ и смещения \hat{b}_y определяются на оценках параметров $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ во временной области методом наименьших квадратов

$$(10) \quad (\hat{\chi}, \hat{b}_y) = \arg \min_{(\chi, b_y)} \int_0^T e^2(t, \hat{\alpha}, \hat{\beta}; \chi, b_y) dt,$$

где $e(t, \hat{\alpha}, \hat{\beta}; \chi, b_y) = y(t) - \hat{x}(t, \hat{\alpha}, \hat{\beta}; \chi) - b_y$; \hat{x} — оценка выходного сигнала системы (1) или (4), вычисляется на входном сигнале $u(t)$ многократным интегрированием уравнений n -го порядка системы (4) на оценках параметров $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ и начальных условиях χ .

Результаты, полученные решением задач (9) и (10), дают полное решение задачи 2 параметрической идентификации системы (1) в частотно-временной области.

5. Алгоритм идентификации порядка системы (1)

Рассмотрим алгоритм определения порядка системы (1), если измерительные шумы отсутствуют $\eta(t) \equiv 0$.

1. Задают начальное приближение частотной характеристики $W_0(j\omega)$ и полагают $n := 0$.
2. Увеличивают порядок системы на единицу $n := n + 1$ и решают задачу 2 параметрической идентификации.
3. На оценках параметров $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \Theta$ вычисляют частотные характеристики системы (1)

$$W_n(j\omega_k) = \frac{\hat{b}_{n-1}(j\omega_k)^{n-1} + \hat{b}_{n-2}(j\omega_k)^{n-2} + \dots + \hat{b}_1(j\omega_k) + \hat{b}_0}{(j\omega_k)^n + \hat{a}_{n-1}(j\omega_k)^{n-1} + \hat{a}_{n-2}(j\omega_k)^{n-2} + \dots + \hat{a}_1(j\omega_k) + \hat{a}_0}.$$

4. Вычисляют отношение частотных характеристик (3) $W_{n+1}(j\omega)/W_n(j\omega)$.
5. Строят диаграммы Боде отношений (3) на множестве частот Ω и запоминают $W_n(j\omega)$, найденную на шаге 3.
6. Переходят к шагу 2 и повторяют все вычисления.
7. За оценку порядка динамической системы n_0 принимается наименьшее n , начиная с которого диаграммы Боде отношений (3) на всех частотах Ω принимают значения $(0, \pm 2\pi k, k = 0, 1, \dots)$. На этом процесс решения задачи структурно-параметрической идентификации заканчивается.

Алгоритм оценивания порядка системы (1) в присутствии измерительных шумов $\eta(t) \neq 0, t \in [0, T]$ состоит из аналогичной последовательности шагов. Однако отношение частотных характеристик на шаге 4 вычисляется на оценках частотных характеристик возрастающего порядка

$$\widehat{W}_{n+1}(j\omega)/\widehat{W}_n(j\omega).$$

Очевидно, что в этом случае условие (3) будет выполняться только в среднем и шаг 7 формулируется в следующем виде

8. За оценку порядка динамической системы n_0 принимается наименьшее n , начиная с которого диаграммы Боде отношений (3) на всех частотах Ω принимают средние по частоте значения $(0, \pm 2\pi k, k = 0, 1, \dots)$.

Следует отметить высокую вычислительную эффективность метода частотно-временной идентификации по сравнению с методами идентификации динамических систем только во временной области.

6. Пример

Рассмотрим пример решения задачи структурно-параметрической идентификации двух динамических систем.

Первая динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + z_1 + b_1u; \\ \dot{z}_1 &= a_0x + b_0u. \end{aligned}$$

Вторая динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{a}_2x + z_1 + \tilde{b}_2u; \\ \dot{z}_1 &= \tilde{a}_1x + z_2 + \tilde{b}_1u; \\ \dot{z}_2 &= \tilde{a}_0x + \tilde{b}_0u. \end{aligned}$$

Рассмотрим динамические системы (11), (12) такие, что $(a_0 = \tilde{a}_1, a_1 = \tilde{a}_2, b_0 = \tilde{b}_1, b_1 = \tilde{b}_2)$. Входной сигнал $u(t)$ в системах (11), (12) является одним и тем же. В этих условиях систему (12) можно рассматривать как систему (11), в которой переменная $z_1(t)$ возбуждается дополнительным ненаблюдаемым сигналом $z_2(t)$, зависящим от наблюдаемой пары (u, x) . Множество допустимых значений параметров определяется условиями устойчивости систем (11), (12) $\Theta = \{(a_0, a_1, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2) < 0\}$.

Отклик систем (11), (12) наблюдается одним и тем же измерителем

$$y(t) = x(t) + b_y + \eta(t),$$

где $\eta(t) \in [-1, 1]$ — случайная последовательность с нулевым средним, распределенная по равномерному закону; $b_y = 1$ — смещение измерителя. Здесь уровень измерительных шумов и величина смещения приняты нереально большими.

Можно ли в экспериментах над динамическими системами (11) и (12), выполненными в одинаковых условиях, различить структуры этих систем?

Данные одиночного “эксперимента” получены численным решением системы (11) с параметрами $(a_0 = -4, a_1 = -1, b_0 = 10, b_1 = 0)$ и системы (12) с параметрами $(\tilde{a}_0 = -4, \tilde{a}_1 = -1, \tilde{a}_2 = -1, \tilde{b}_2 = 0, \tilde{b}_1 = 10, \tilde{b}_0 = -1)$. Начальные значения для первых двух переменных систем (11) и (12) приняты равными $x(0) = 1, z_1(0) = -1, z_2(0) = 0$. Эксперимент выполняется на интервале времени $t \in [0, T]$, $T = 30$ и на одном и том же входном сигнале переменной частоты

$$u(t) = 1 + 2 \sin((\omega_0 + \dot{\omega}t)t), \quad \dot{\omega} = \frac{2 - \omega_0}{T}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Уравнения (11) и (12) интегрировались с шагом $h = 0,001$. Псевдослучайная последовательность $\eta(t)$ получена генератором случайных чисел RANDOM пакета MATLAB.

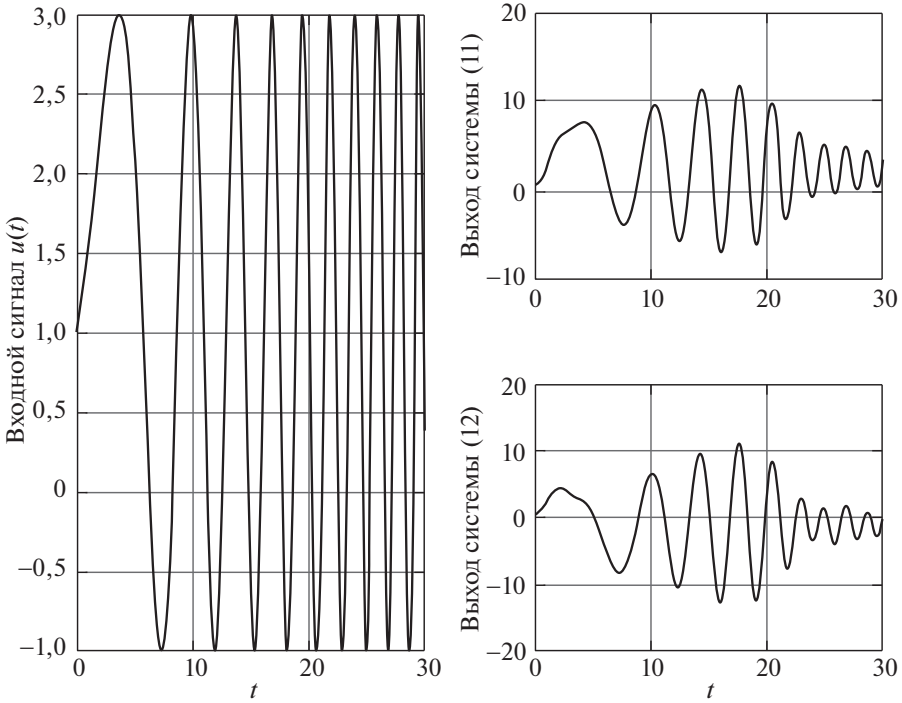


Рис. 1. Входной и выходные сигналы систем (11) и (12).

На рис. 1 показаны входной сигнал и выходные сигналы систем (11) и (12) (для удобства восприятия графики приведены без измерительного шума $\eta(t) \equiv 0$). Видно, что выходы систем (11) и (12) почти не отличаются друг от друга.

Задача параметрической идентификации решалась частотно-временным методом на множестве частот $\Omega = \{\omega_k : \omega_k = k\omega_0, k = 1, \dots, 50\}$. В задаче идентификации порядка начальное приближение частотной характеристики было принято $W_0(j\omega) = 1$. В процессе решения задачи структурно-параметрической идентификации порядок динамических систем возрастал от $n = 1$ до $n = 5$. Полученные результаты показаны на рис. 2 и 3. Видно, что для системы (11) слабоэквивалентные системы появляются начиная с $n = 2$, а для системы (12) — начиная с порядка $n = 3$, т.е. порядки систем (11) и (12) вычислены правильно. Получены следующие оценки параметров систем (11) и (12), оценки начальных условий и оценка смещения: для системы (11) $\hat{a}_1 = -1$; $\hat{a}_0 = -3,99$; $\hat{b}_1 = 10$; $\hat{b}_0 = 0,01$; $\hat{x}(0) = 0,996$; $\hat{z}_1(0) = -1,036$; $\hat{b}_y = 0,993$; для системы (12) $\hat{a}_2 = -1$; $\hat{a}_1 = -4$; $\hat{a}_0 = -1$; $\hat{b}_2 = -0,005$; $\hat{b}_1 = 9,987$; $\hat{b}_0 = -1,017$; $\hat{x}(0) = 1,039$; $\hat{z}_1(0) = -0,941$; $\hat{z}_2(0) = 0,123$; $\hat{b}_y = 1,011$. Очевидна близость этих оценок и априорных значений. Для сравнения приведем значения оценок параметров системы (11), тогда как “экспериментальные” данные были получены интегрированием системы (12): $\hat{a}_1 = -0,643$; $\hat{a}_0 = -3,714$; $\hat{b}_1 = 1,141$; $\hat{b}_0 = 8,833$; $\hat{x}(0) = 0,959$;

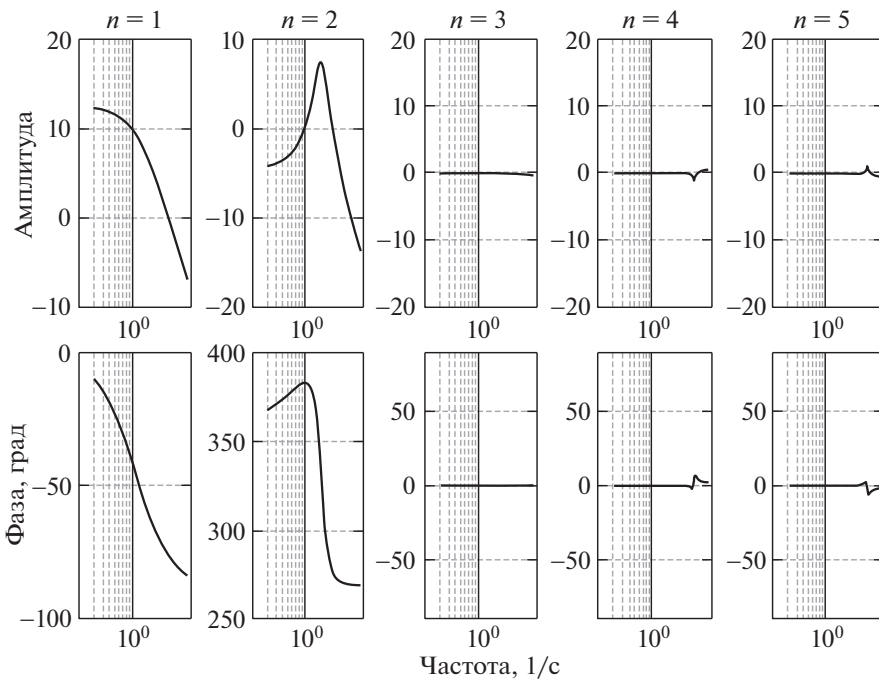


Рис. 2. Диаграммы Бode отношений W_{n+1}/W_n для системы (11).

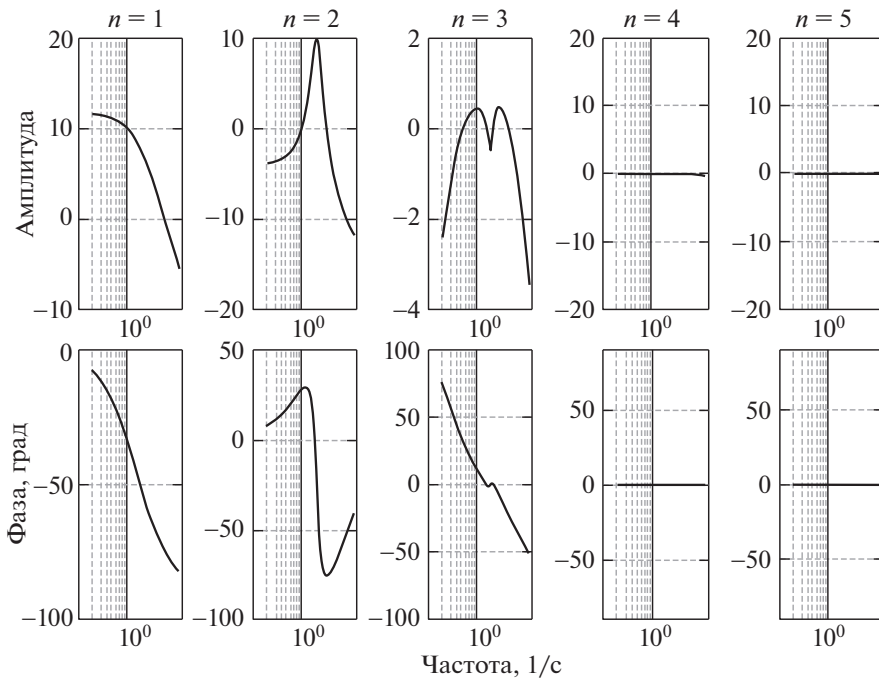


Рис. 3. Диаграммы Бode отношений W_{n+1}/W_n для системы (12).

$\hat{z}_1(0) = 3,076$; $\hat{b}_y = -2,451$. Эти результаты получены на некоторой реализации измерительного шума и являются типичными и для других реализаций.

Численное решение примера получено в пакете компьютерной математики MATLAB с применением программ: LSIM для решения систем (11) и (12); FMINCON для решения задач (9) и (10); BODE для вычисления частотных характеристик. Финитные интегралы Фурье вычислялись по формуле Филонна программой, приведенной в [11].

Таким образом, предложенный метод корректно решает задачу структурно-параметрической идентификации (в условиях смещения нуля измерителя и большой интенсивности измерительного шума).

7. Заключение

Предложен новый метод структурно-параметрической идентификации динамической системы, заданной линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Под структурно-параметрической идентификацией понимаются: оценка порядка дифференциальных уравнений; всех коэффициентов, удовлетворяющих некоторым ограничениям (например, по условиям устойчивости); неизвестных начальных условий и смещения измерителя. Метод основан на свойстве слабой эквивалентности двух и более систем. Решение задачи структурной идентификации ищется на множестве слабоэквивалентных систем. Для рассматриваемого класса динамических систем определение порядка линейных дифференциальных уравнений сводится к анализу отношений частотных характеристик последовательно усложняемых структур. За оценку порядка динамической системы принимается наименьший порядок динамической системы, начиная с которого усложнение структуры динамической системы приводит только к последовательности новых слабоэквивалентных систем. Оценка порядка динамической системы определяется за конечное число шагов. Учет влияния измерительного шума на решение задачи структурной идентификации приводит к замене частотных характеристик динамических систем на математическое ожидание этих частотных характеристик. Однако в условиях одиночного эксперимента (или с малым числом реализаций) это не приводит к изменению алгоритма структурной идентификации.

Решению задачи структурной идентификации предшествует необходимость решения задачи параметрической идентификации, которое ищется частотно-временным методом. В процессе решения задачи параметрической идентификации вычисляются оценки параметров динамической системы в частотной области, а затем во временной области определяются оценки начальных условий и смещение измерителя. На оценках параметров вычисляются частотные характеристики динамической системы. В результате решения задачи структурно-параметрической идентификации получают оценки порядка динамической системы, оценки параметров и оценку смещения измерителя.

На иллюстративном примере (рис. 2 и 3) показано, что предложенный новый метод структурно-параметрической идентификации имеет высокую чувствительность и позволяет разделить две динамические системы различной

структуры в условиях одиночного эксперимента и больших измерительных ошибок, переходные процессы которых визуально близки.

Разработанный метод полностью решает задачу структурно-параметрической идентификации стационарной линейной системы по наблюдениям пары вход — выход на ограниченном временном интервале в условиях измерительных ошибок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: ИПУ, 2014.
2. *Эйхгофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
3. Типовые линейные модели объектов управления / Под ред. Н.С. Райбмана. М.: Энергоатомиздат, 1983. 264 с.
4. *Гинсберг К.С.* Новый подход к проблеме структурной идентификации. II // *АиТ.* 2002. № 6. С. 85–98.
Ginsberg K.S. A New Approach to the Problem of Structural Identification. II // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 6. С. 946–959.
5. *Гинсберг К.С.* К основам методологии структурной идентификации для цели проектирования технических систем // *Тр. XIII Всерос. сов. по проблемам управления.* М.: ИПУ, 2019.
6. *Карабутов Н.Н.* Структурная идентификация систем: анализ информационных структур. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 176с.
7. *Novara C., Vincent T., Hsu K., Milanese M., Poolla K.* Parametric identification of structured nonlinear systems // *Automatica.* 2011. № 47. С. 711–721.
8. *Корсун О.Н.* Алгоритм идентификации динамических систем с функционалом в частотной области // *АиТ.* 2003. № 5. С. 111–121.
Korsun O.N. An Identification Algorithm for Dynamic Systems with a Functional in the Frequency Domain // *Autom. Remote Control.* 2003. T. 64. № 5. С. 772–781.
9. *Овчаренко В.Н.* Идентификация аэродинамических характеристик воздушных судов по полетным данным. М.: Изд-во МАИ, 2017.
10. *Danilevich E.V., Evstratov A.R., Kukharenskiy N.I., Ovcharenko V.N., Poplavskii V.K.* Identification of Constant Parameters of Dynamic Systems by a Time-Frequency Method // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2018. V. 57. No. 4. P. 3–13.
11. *Овчаренко В.Н.* Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: идентификация по полетным данным. М.: ЛЕНАНД, 2019. 236 с.
12. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. М.: Наука, ГРФ.-М; Л., 1970.
13. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 20.03.2019

После доработки 25.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019