

© 2020 г. Е.Н. РОЗЕНВАССЕР, д-р техн. наук (fishka33@mail.ru)  
(Государственный морской технический университет, Санкт-Петербург),  
Б.П. ЛЯМПЕ, д-р инженерии,  
В. ДРЕВЕЛОВ, д-р инженерии (wolfgang.drewelow@uni-rostok.de),  
Т. ЯЙНШ, д-р инженерии (torsten.jeinsch@uni-rostok.de)  
(Университет Росток, ФРГ)

## СТАНДАРТИЗИРУЕМОСТЬ И $H_2$ -ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОКОНТУРНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Изучается одноконтурная многомерная система с тремя звеньями чистого запаздывания. Приводятся достаточные условия стандартизируемости системы  $S_0$ , при выполнении которых задача  $H_2$ -оптимизации системы  $S_0$  сводится к более простой задаче  $H_2$ -оптимизации некоторой эквивалентной импульсной системы с одним звеном чистого запаздывания. Строится множество фиксированных полюсов  $H_2$ -оптимальной системы  $S_0$ .

*Ключевые слова:* одноконтурная многомерная импульсная система с запаздыванием, стандартизируемость,  $H_2$ -оптимизация, фиксированные полюса.

DOI: 10.31857/S000523102001002X

### 1. Введение

Проблема учета запаздывания играет важную роль при решении задач анализа и синтеза импульсных систем. Различным аспектам этой проблемы посвящена значительная литература. Разнообразные подходы к решению указанной проблемы содержатся в публикациях [1–20] и цитированных там источниках. Анализ существующей литературы показывает, что теоретические и вычислительные трудности, связанные с исследованием импульсных систем с запаздыванием, существенно возрастают с увеличением количества элементов чистого запаздывания в структуре изучаемой системы. В связи с этим несомненный теоретический и практический интерес представляет задача построения для заданной импульсной системы с множественными запаздываниями эквивалентной системы с меньшим числом элементов чистого запаздывания.

В [20] на основе концепции параметрической передаточной матрицы (ППМ) сформирован класс многомерных импульсных систем с множественными запаздываниями, которые названы стандартизируемыми. При этом показано, что задача  $H_2$ -оптимизации стандартизируемой системы сводится к решению аналогичной задачи для эквивалентной стандартной импульсной системы  $S_T$ , содержащей только один элемент чистого запаздывания. Поэтому решение задачи  $H_2$ -оптимизации для стандартизируемой импульсной

системы может быть получено с помощью алгоритма, описанного в [19]. В настоящей статье, которая является непосредственным продолжением [20], общие результаты [20] применяются к практически важному типу импульсных систем: многомерной одноконтурной импульсной системе  $S_0$  с несколькими запаздываниями. Для конкретности рассматривается ситуация, когда число элементов чистого запаздывания в контуре управления равно трем, а число составляющих наблюдаемого вектора выхода, имеющих различные временные сдвиги, равно двум. Однако предлагаемый подход без существенных изменений распространяется на общий случай. В статье приведены достаточные условия стандартизируемости системы  $S_0$ , обычно выполняющиеся в приложениях, и построена соответствующая стандартная система  $S_\tau$ . Кроме того, определена совокупность стационарных элементов, которые порождают полюса замкнутой  $H_2$ -оптимальной системы, не зависящие от вида используемого преобразователя «цифра-аналог».

## 2. Обобщенная стандартная импульсная система с множественными запаздываниями

Приведем используемые в последующем изложении общие свойства обобщенной стандартной импульсной системы с запаздыванием  $S_g$ , установленные в [20]. В определении обобщенной стандартной импульсной системы предполагается, что управляемый стационарный объект описывается уравнениями состояния:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= Av(t) + B_1x(t - \tau_1) + Bu(t - \tau_2), \\ y(t) &= Cv(t), \end{aligned}$$

где  $v(t)$  – вектор состояния объекта,  $y(t)$  – вектор управляемого выхода,  $x(t)$  – вектор входа,  $u(t)$  – вектор управления и  $A, B, B_1, C$  – постоянные матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что пара  $A, B$  полностью управляема и пара  $A, C$  полностью наблюдаема. Кроме того, в (2.1)  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – неотрицательные постоянные.

Предполагается, что объект (2.1) управляется импульсным регулятором (ИР), который имеет период квантования  $T$  и описывается системой уравнений (2.2)–(2.4)

$$(2.2) \quad \xi_k = y(kT), \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &\alpha_0\psi_k + \alpha_1\psi_{k-1} + \dots + \alpha_\rho\psi_{k-\rho} = \\ &= \beta_0\xi_k + \beta_1\xi_{k-1} + \dots + \beta_\rho\xi_{k-\rho}, \quad \det \alpha_0 \neq 0, \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad u(t) = h(t - kT)\psi_k, \quad kT < t < (k + 1)T,$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  – постоянные матрицы соответствующих размеров и  $h(t)$  – матрица, элементы которой имеют ограниченную вариацию на интервале  $0 \leq t \leq T$ , а условие  $\det \alpha_0 \neq 0$  является условием каузальности дискретного регулятора.

Используя оператор обратного сдвига  $\zeta$  [3], уравнение алгоритма управления (2.3) можно записать в полиномиальной форме

$$(2.5) \quad \alpha(\zeta)\psi_k = \beta(\zeta)\xi_k,$$

где  $\alpha(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$  – полиномиальные матрицы вида

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \alpha(\zeta) &= \alpha_0 + \alpha_1\zeta + \dots + \alpha_\rho\zeta^\rho, \\ \beta(\zeta) &= \beta_0 + \beta_1\zeta + \dots + \beta_\rho\zeta^\rho. \end{aligned}$$

Далее рациональную матрицу

$$(2.7) \quad W_d(\zeta) \triangleq \alpha^{-1}(\zeta)\beta(\zeta)$$

будем называть передаточной матрицей алгоритма управления.

Кроме того, в определении системы  $S_g$  предполагается, что для любой пары различных собственных чисел матрицы  $A$   $p_1$  и  $p_2$  выполняется условие непатологичности периода квантования [3]

$$(2.8) \quad e^{p_1 T} \neq e^{p_2 T}.$$

В качестве наблюдаемого выхода системы  $S_g$  рассматривается вектор

$$(2.9) \quad \bar{z}'(t) = [z'_1(t) \ \dots \ z'_\gamma(t)],$$

где штрих – оператор транспонирования и  $z_i(t)$  – наблюдаемые парциальные векторы, заданные соотношениями

$$(2.10) \quad z_i(t) = C_i v(t - \tau_{3i}) + D_i u(t - \tau_2 - \tau_{3i}),$$

где  $\tau_{3i}$ ,  $i = 1, \dots, \gamma$ , – вещественные постоянные, которые могут иметь значения произвольного знака.

В совокупности соотношения (2.1)–(2.10) определяют систему дифференциально разностных уравнений, которую, при выполнении всех указанных выше условий, назвали в [20] обобщенной стандартной системой с множественными запаздываниями  $S_g$ . Частный случай системы  $S_g$ , соответствующий значению  $\gamma = 1$ , рассмотрен в [19] и назван там стандартной импульсной системой  $S_\tau$ .

По отношению к парциальному выходу  $z_i(t)$  система  $S_g$  сводится к стандартной системе  $S_{\tau i}$ , которой в соответствии с [19] может быть сопоставлена параметрическая передаточная матрица (ППМ)  $W_i(s, t)$ , определяемая формулой

$$(2.11) \quad W_i(p, t) = \phi_{L_{\tau i} \mu}(T, p, t) \tilde{R}_N(p) M_\tau(p) + K_{\tau i}(p), \quad i = 1, \dots, \gamma.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \phi_{L_{\tau i} \mu}(T, p, t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{\tau i}(p + kj\omega) \mu(p + kj\omega) e^{kj\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \\
 \mu(p) &= \int_0^T h(t) e^{-pt} dt, \\
 \tilde{R}_N(p) &= \tilde{W}_d(p) \left[ I - \tilde{D}_{N\mu}(T, p, -\tau_2) \tilde{W}_d(p) \right]^{-1}, \\
 \tilde{D}_{N\mu}(T, p, -\tau_2) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} N(p + kj\omega) \mu(p + kj\omega) e^{-(p+kj\omega)\tau_2}, \\
 \tilde{W}_d(p) &= W_d(\zeta) \Big|_{\zeta=e^{-pT}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

В (2.11) и (2.12) использованы обозначения

$$K_{\tau i}(p) = K_i(p) e^{-p\tau_{K_i}}, \quad L_{\tau i}(p) = L_i(p) e^{-p\tau_{L_i}},
 \tag{2.13}$$

где  $K_i(p)$ ,  $L_i(p)$  – рациональные матрицы вида:

$$K_i(p) = C_i(pI - A)^{-1} B_1, \quad L_i(p) = C_i(pI - A)^{-1} B + D_i.
 \tag{2.14}$$

Помимо этого, в (2.11) и далее

$$M_{\tau}(p) = M(p) e^{-p\tau_M}, \quad N_{\tau}(p) = N(p) e^{-p\tau_N},
 \tag{2.15}$$

где

$$M(p) = C(pI - A)^{-1} B_1, \quad N(p) = C(pI - A)^{-1} B.
 \tag{2.16}$$

Фигурирующие в (2.13), (2.15) постоянные  $\tau_{K_i}$ ,  $\tau_{L_i}$ ,  $\tau_M$ ,  $\tau_N$  определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 \tau_{K_i} &= \tau_M + \tau_{3i}, & \tau_{L_i} &= \tau_N + \tau_{3i}, \\
 \tau_M &= \tau_1, & \tau_N &= \tau_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Из (2.9) следует, что при входе  $x(t)$  и наблюдаемом выходе  $\bar{z}(t)$  ППМ системы  $S_g$  имеет вид

$$W_{\bar{z}x}(p, t) = \begin{bmatrix} W_1(p, t) \\ \dots \\ W_{\gamma}(p, t) \end{bmatrix},
 \tag{2.18}$$

что с учетом (2.11) приводит к соотношению

$$W_{\bar{z}x}(p, t) = \phi_{\bar{L}_{\tau\mu}}(T, p, t) \tilde{R}_N(p) M_{\tau}(p) + \bar{K}_{\tau}(p),
 \tag{2.19}$$

где

$$(2.20) \quad \bar{K}'_{\tau}(p) = [ K'_{\tau 1}(p) \quad \dots \quad K'_{\tau \gamma}(p) ], \quad \bar{L}'_{\tau}(p) = [ L'_{\tau 1}(p) \quad \dots \quad L'_{\tau \gamma}(p) ]$$

и

$$(2.21) \quad \phi_{\bar{L}'_{\tau \mu}}(T, p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{L}'_{\tau}(p + kj\omega) \mu(p + kj\omega) e^{kj\omega t}.$$

Далее правую часть формулы (2.19) будем называть стандартной формой ППМ для импульсной системы с множественными запаздываниями.

### 3. Стандартизируемость одноконтурной импульсной системы с множественными запаздываниями

*Определение 1.* Далее импульсную систему  $S^0$  произвольной структуры со входом  $x(t)$  и выходом  $\bar{z}(t)$ , состоящую из линейных стационарных элементов и импульсного регулятора вида (2.2)–(2.4), будем называть структурно стандартизируемой, если у нее существует ППМ  $W_{\bar{z}x}^0(p, t)$  от входа  $x(t)$  к выходу  $\bar{z}(t)$ , имеющая стандартную форму (2.19).

*Определение 2.* Структурно стандартизируемую систему  $S^0$  с ППМ  $W_{\bar{z}x}^0(p, t)$  будем называть стандартизируемой, если существует обобщенная стандартная система  $\tilde{S}_g$ , ППМ которой  $\tilde{W}_{\bar{z}x}(p, t)$  совпадает с ППМ  $W_{\bar{z}x}^0(p, t)$ .

Далее обобщенную стандартную систему  $\tilde{S}_g$  будем называть порождающей для стандартизируемой системы  $S^0$ . Ниже системы  $\tilde{S}_g$  и  $S^0$  считаются эквивалентными. При этом на систему  $S^0$  переносятся все качественные особенности системы  $\tilde{S}_g$ , установленные в [20].

В данном разделе изучается вопрос стандартизируемости многомерной одноконтурной системы  $S_0$  с тремя запаздываниями, структура которой изображена на рис. 1.

На рис. 1 И.Р. – импульсный регулятор (2.2)–(2.4),  $W_i(p)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – рациональные матрицы, свойства которых будут оговорены далее,  $\chi^2$  – положительная постоянная,  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – неотрицательные постоянные. В качестве

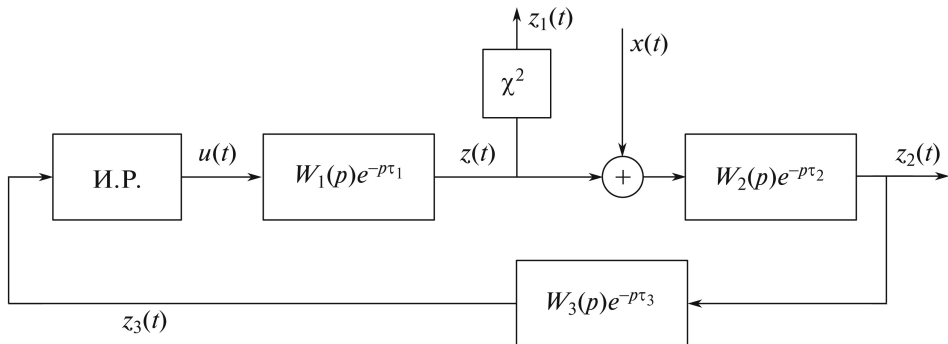


Рис. 1.

вектора наблюдаемого выхода будем рассматривать вектор

$$(3.1) \quad \bar{z}(t) = \begin{bmatrix} \chi^2 z(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}.$$

*Теорема 1.* Для стандартизируемости системы  $S^0$  при выборе наблюдаемого выхода в виде (3.1) достаточно выполнения следующих условий:

1) рациональные матрицы

$$(3.2) \quad N(p) \triangleq W_3(p)W_2(p)W_1(p), \quad M(p) = W_3(p)W_2(p), \\ \bar{K}(p) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ W_2(p) \end{bmatrix}$$

– строго правильные;

2) рациональная матрица

$$(3.3) \quad \bar{L}(p) \triangleq \begin{bmatrix} \chi^2 W_1(p) \\ W_2(p)W_1(p) \end{bmatrix}$$

– по меньшей мере правильная;

3) выполнено условие

$$(3.4) \quad M \deg N(p) = M \deg W_1(p) + M \deg W_2(p) + M \deg W_3(p),$$

где  $M \deg$  – обозначение степени Мак-Миллана [20, 21];

4) для всех различных полюсов матрицы  $N(p)$  выполнены условия вида (2.8).

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2 и 3 приведены в Приложении.

*Замечание 1.* Условие (3.4) означает отсутствие внутренних сокращений в произведении  $W_3(p)W_2(p)W_1(p)$ . В скалярном случае условие (3.4) равносильно несократимости этого произведения.

*Замечание 2.* Условия теоремы 1 не зависят от величин запаздываний  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Если для системы  $S_0$  не выполняется хотя бы одно из условий 1–3 теоремы 1, то она не является стандартизируемой.

#### 4. $H_2$ -оптимизация и фиксирующие полюса стандартизируемой системы $S_0$

*Теорема 2.* Пусть для системы  $S_0$  выполнены условия теоремы 1. Тогда передаточная матрица  $W_d^0(\zeta)$   $H_2$ -оптимального алгоритма управления совпадает с передаточной матрицей  $H_2$ -оптимального алгоритма управления для одноконтурной системы  $\bar{S}_0$ , изображенной на рис. 2, где выполнено условие

$$(4.1) \quad \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

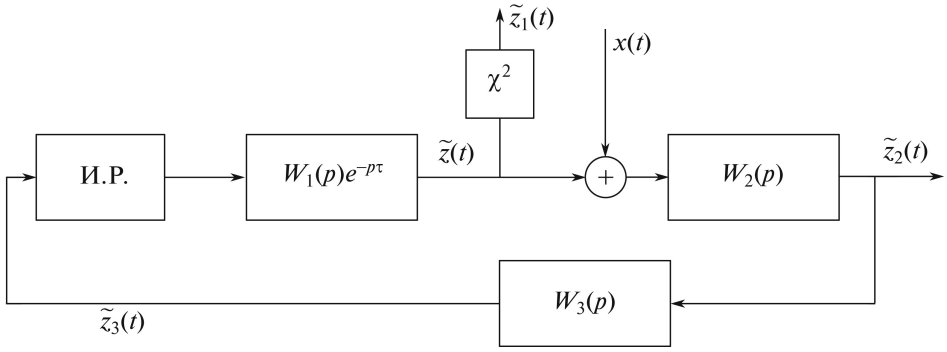


Рис. 2.

и вектор наблюдаемого выхода  $\tilde{z}(t)$  выбран в виде

$$(4.2) \quad \tilde{z}(t) = \begin{bmatrix} \chi^2 \tilde{z}(t) \\ \tilde{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(t) \\ \tilde{z}_2(t) \end{bmatrix}.$$

При выполнении условий теоремы 2 задача  $H_2$ -оптимизации системы  $\tilde{S}_0$  сводится к решению аналогичной задачи для соответствующей порождающей расширенной стандартной системы  $\tilde{S}_\tau$ , что может быть выполнено на основе результатов [19].

В соответствии с указанным в [20] на системы  $S_0$  и  $\tilde{S}_0$  распространяются все качественные особенности  $H_2$ -оптимальной порождающей системы  $\tilde{S}_\tau$ . В частности, системы  $S_0$  и  $\tilde{S}_0$  имеют совпадающие множества фиксирующих полюсов.

*Теорема 3.* Пусть для системы  $S_0$  выполнены условия теоремы 1. Обозначим через  $\mathcal{M}_0$  объединение множеств полюсов матриц  $W_1(p)$  и  $W_3(p)$ . Также обозначим через  $\mathcal{M}_1$  множество различных полюсов из множества  $\mathcal{M}_0$ . Пусть  $p_1, \dots, p_\lambda$  — элементы множества  $\mathcal{M}_1$ . Тогда при  $\operatorname{Re} p_i < 0$  число  $\zeta_i = e^{-p_i T}$  является полюсом  $H_2$ -оптимальной системы  $S_0$ , а при  $\operatorname{Re} p_i > 0$  аналогичным свойством обладает число  $\zeta_i = e^{p_i T}$ .

В соответствии с терминологией [21]  $\mathcal{M}_1$  — это множество фиксирующих полюсов системы  $S_0$ , а множество чисел  $\zeta_i$  — это множество фиксированных полюсов  $H_2$ -оптимальной системы. Из теоремы 3 следует практически важный вывод о том, что при проектировании системы  $S_0$  на основе методов  $H_2$ -оптимизации необходимо накладывать определенные ограничения на свойства полюсов матриц  $W_1(p)$  и  $W_3(p)$ . Если среди этих полюсов имеются полюса, лежащие вблизи мнимой оси, то степень устойчивости процессов в  $H_2$ -оптимальной системе может оказаться неудовлетворительной. Если же среди полюсов матриц  $W_1(p)$  и  $W_3(p)$  имеются полюса, лежащие на мнимой оси, то проектирование на основе методов  $H_2$ -оптимизации оказывается невозможным, поскольку  $H_2$ -оптимальная система оказывается на границе области устойчивости.

## 5. Заключение

В статье описан подход к решению задач стандартизируемости и  $H_2$ -оптимизации многомерных одноконтурных импульсных систем с несколькими запаздываниями, основанный на переходе к эквивалентной системе с одним запаздыванием. Рассмотрен способ построения множества фиксированных полюсов для  $H_2$ -оптимальной системы.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Доказательство проводится в несколько этапов.

Покажем, прежде всего, что при выполнении условий теоремы 1 для системы  $S_0$  существует ППМ  $W_0(p, t)$ , которая имеет стандартную формулу. Это означает, что система  $S_0$  структурно стандартизируема. Для этого в соответствии с общим подходом [16–21] предполагаем, что на вход системы  $S_0$  поступает матричный экспоненциальный сигнал

$$(П.1) \quad x(t) = e^{pt} I,$$

и находим режим функционирования системы  $S_0$ , в котором

$$(П.2) \quad z_i(p, t) = e^{pt} W_i(p, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

где матрицы

$$(П.3) \quad W_i(p, t) = W_i(p, t + T), \quad i = 1, 2, 3,$$

— это ППМ от входа  $x(t)$  к выходам  $z_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . В условиях теоремы 1 элементы матрицы  $W_3(p, t)$  непрерывны относительно  $t$ . Поэтому, используя стробоскопическое свойство аналого-цифрового преобразователя (АЦП) (2.2), можно перейти к рассмотрению разомкнутой системы на рис. 3.

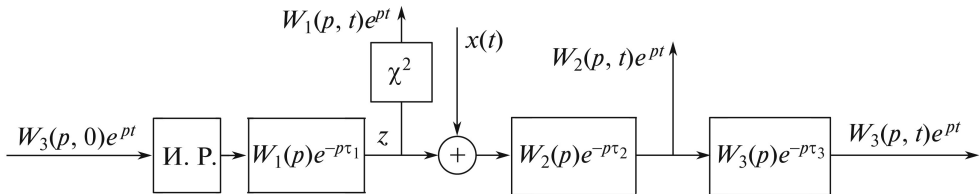


Рис. 3.

Используя (П.1)–(П.3), из рис. 3 можно получить после сокращения на  $e^{pt}$

$$(П.4) \quad W_3(p, t) = \phi_{N\tau\mu}(T, p, t) \tilde{W}_d(p) W_3(p, 0) + W_3(p) W_2(p) e^{-p(\tau_2 + \tau_3)},$$

где

$$(П.5) \quad \phi_{N\tau\mu}(T, p, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} N(p + kj\omega) \mu(p + kj\omega) e^{-(p+kj\omega)\tau} e^{kj\omega t}.$$



Кроме того,

$$(II.6) \quad N_\tau(p) = N(p)e^{-p\tau},$$

где, как и ранее,

$$(II.7) \quad \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Поскольку матрица (II.5) при всех  $p$ , не являющихся ее полюсами, непрерывна относительно  $t$ , то в левой и правой частях (II.4) можно положить  $t = 0$ . В результате приходим к равенству

$$(II.8) \quad W_3(p, 0) = \phi_{N_\tau\mu}(T, p, 0)\tilde{W}_d(p)W_3(p, 0) + W_3(p)W_2(p)e^{-p(\tau_2+\tau_3)}.$$

Если учесть, что

$$(II.9) \quad \begin{aligned} & \phi_{N_\tau\mu}(T, p, 0) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} N(p + kj\omega)M(p + kj\omega)e^{-(p+kj\omega)\tau} = \tilde{D}_{N_\mu}(T, p, -\tau), \end{aligned}$$

то от (II.8) приходим к равенству

$$(II.10) \quad W_3(p, 0) = \left[ I - \tilde{D}_{N_\mu}(T, p, -\tau)\tilde{W}_d(p) \right]^{-1} W_3(p)W_2(p)e^{-p(\tau_3+\tau_2)}.$$

Возвращаясь к рис. 3, с учетом (II.10) получаем

$$(II.11) \quad \begin{aligned} W_1(p, t) &= \chi^2 \phi_{W_{1\tau}\mu}(T, p, t)\tilde{R}_N(p)W_3(p)W_2(p)e^{-p(\tau_3+\tau_2)}, \\ W_2(p, t) &= \phi_{W_{2\tau}W_{1\tau}\mu}(T, p, t)\tilde{R}_N(p)W_3(p)W_2(p)e^{-p(\tau_2+\tau_3)} + W_2(p)e^{-p\tau_2}, \\ \tilde{R}_N(p) &= \tilde{W}_d(p) \left[ I - \tilde{D}_{N_\mu}(T, \beta, -\tau)\tilde{W}_d(p) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Используя (II.11) и (2.18), после несложных преобразований можно установить, что ППМ системы  $S_0$  от входа  $x(t)$  к выходу (3.1) имеет стандартную форму (2.19) с матрицами  $\bar{K}(p)$ ,  $\bar{L}(p)$ ,  $M(p)$ ,  $N(p)$ , которые определены формулами (3.2), (3.3), а постоянные  $\tau_N$ ,  $\tau_M$ ,  $\tau_{Li}$ ,  $\tau_{Ki}$  равны

$$(II.12) \quad \begin{aligned} \tau_N &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau, & \tau_M &= \tau_2 + \tau_3, \\ \tau_{L1} &= \tau_1, & \tau_{L2} &= \tau_1 + \tau_2, \\ \tau_{K1} &= 0, & \tau_{K2} &= \tau_2. \end{aligned}$$

Из доказанного следует, что система  $S_0$  структурно стандартизуема.

Для доказательства стандартизуемости системы  $S_0$  покажем, что при выполнении условий теоремы 1 выполнены общие необходимые и достаточные условия стандартизуемости, приведенные в теореме 1 из [20]. Условия а) и б) этой теоремы выполняются очевидным образом. Выполнение условий (2.17) сразу следует из (II.12).

Условие 1 выполнено по определению. Остается доказать, что условие в) теоремы 1 из [20] также выполняется, т.е. что из условия (3.4) вытекает равенство

$$(П.13) \quad \text{M deg} N(p) = \text{M deg} \begin{bmatrix} \bar{K}(p) & \bar{L}(p) \\ M(p) & N(p) \end{bmatrix} \triangleq \text{M deg} W_0(p).$$

Для этого отметим, что с учетом (3.2) и (3.3) имеем

$$(П.14) \quad W_0(p) = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{K}(p) & \bar{L}(p) \\ \hline M(p) & N(p) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \chi^2 W_1(p) \\ \hline W_2(p) & W_2(p)W_1(p) \\ \hline W_3(p)W_2(p) & W_3(p)W_2(p)W_1(p) \end{array} \right].$$

Ведем обозначения:

$$(П.15) \quad \text{M deg} W_i(p) \triangleq \psi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \triangleq \psi.$$

Из свойств степени Мак-Миллана, (П.14) и (3.4) сразу следует, что

$$(П.16) \quad \begin{aligned} \text{M deg} W_0(p) &\geq \text{M deg} N(p) = \\ &= \text{M deg} W_1(p) + \text{M deg} W_2(p) + \text{M deg} W_3(p) = \psi. \end{aligned}$$

С другой стороны, матрицу  $W_0(p)$  можно представить в виде произведения

$$(П.17) \quad W_0(p) = \bar{W}_3(p)\bar{W}_2(p)\bar{W}_1(p),$$

где

$$(П.18) \quad \begin{aligned} \bar{W}_3(p) &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & W_3(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_2(p) = \begin{bmatrix} 0 & \chi^2 I \\ W_2(p) & W_2(p) \\ W_2(p) & W_2(p) \end{bmatrix}, \\ \bar{W}_1(p) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W_1(p) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Покажем, что справедливы равенства

$$(П.19) \quad \text{M deg} \bar{W}_i(p) = \psi_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для этого отметим, что из (П.18) имеем

$$(П.20) \quad \text{M deg} \bar{W}_i(p) \geq \psi_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

С другой стороны, из (П.15) вытекает существование представлений MFD (Matrix fraction description) [22]

$$(П.21) \quad W_i(p) = a_i^{-1}(p)b_i(p), \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$(П.22) \quad \deg \det a_i(p) = \psi_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

С помощью (П.21) и (П.18) при  $i = 3$  находим MFD

$$(П.23) \quad \bar{W}_3(p) = \bar{a}_3^{-1}(p)\bar{b}_3(p),$$

где

$$(П.24) \quad \bar{a}_3(p) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & a_3(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_3(p) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & b_3(p) \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$(П.25) \quad \deg \det \bar{a}_3(p) = \deg \det a_3(p) = \psi_3,$$

то из свойств непонижаемых MFD [22] следует, что

$$(П.26) \quad M \deg \bar{W}_3(p) \leq \psi_3.$$

Сопоставляя (П.26) и (П.20), приходим к равенству (П.19) при  $i = 3$ . Для случая  $i = 1$  доказательство (П.20) проводится аналогично. Остается рассмотреть случай  $i = 2$ . Очевидно, что имеем

$$(П.27) \quad \bar{W}_2(p) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \bar{W}_4(p),$$

где

$$(П.28) \quad \bar{W}_4(p) = \begin{bmatrix} 0 & \chi^2 I \\ 0 & 0 \\ W_2(p) & W_2(p) \end{bmatrix}.$$

Из (П.27) следует, что

$$(П.29) \quad M \deg \bar{W}_2(p) = M \deg W_4(p),$$

так как первый множитель в (П.27) – постоянная несингулярная матрица. Используя MFD (П.21) при  $i = 2$ , можно получить MFD

$$(П.30) \quad \bar{W}_2(p) = \bar{a}_2^{-1} \bar{b}_2(p),$$

где

$$(П.31) \quad \deg \det \bar{a}_2(p) = \psi_2.$$

Из (П.31), (П.30) следует, что

$$(П.32) \quad \text{M deg } \bar{W}_2(p) \leq \psi_2.$$

Сопоставляя (П.32) и (П.20), получаем, что

$$(П.33) \quad \text{M deg } \bar{W}_2(p) = \psi_2,$$

что завершает доказательство формул (П.19). Из (П.19) и (П.17) вытекает, что

$$(П.34) \quad \text{M deg } W_0(p) \leq \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \psi.$$

С другой стороны, из (П.14), (П.15) находим, что

$$(П.35) \quad \text{M deg } W_0(p) \geq \text{M deg } N(p) = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \psi.$$

Сопоставление (П.34) и (П.35) приводит к равенству

$$(П.36) \quad \text{M deg } W_0(p) = \text{M deg } N(p) = \psi,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

*Доказательство теоремы 2.* С помощью выкладок, аналогичных использованным при доказательстве теоремы 1, устанавливается, что ППМ системы  $\tilde{S}_0$  от входа  $x(t)$  к выходам  $\tilde{z}_i(t)$  имеют вид:

$$(П.37) \quad \begin{aligned} W_{\tilde{z}_1 x}(p, t) &= \chi^2 \psi_{W_{1\tau\mu}}(T, p, t) \tilde{R}_N(p) W_3(p) W_2(p), \\ W_{\tilde{z}_2 x}(p, t) &= \chi^2 \psi_{W_{21\tau\mu}}(T, p, t) \tilde{R}_N(p) W_3(p) W_2(p) + W_2(p), \end{aligned}$$

где использованы обозначения:

$$(П.38) \quad \begin{aligned} W_{1\tau}(p) &= W_1(p) e^{-p\tau}, \quad W_{21\tau}(p) = W_2(p) W_1(p) e^{-p\tau}, \\ \tilde{R}_N(p) &= \tilde{W}_d(p) \left[ I - \tilde{D}_{N\mu}(T, p, -\tau) \tilde{W}_d(p) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому ППМ  $W_{\tilde{z}x}(p, t)$  от входа  $x(t)$  к выходу  $\tilde{z}(t)$  (4.2) имеет стандартную форму

$$(П.39) \quad W_{\tilde{z}x}(p, t) = \phi_{\bar{L}\tau\mu}(T, p, t) \tilde{R}_N(p) M(p) + \bar{K}(p).$$

Здесь

$$(П.40) \quad \bar{L}_\tau(p) = \bar{L}(p) e^{-p\tau}$$

и аналогично предыдущему

$$(П.41) \quad \bar{K}(p) = \begin{bmatrix} K_1(p) \\ K_2(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{L}(p) = \begin{bmatrix} L_1(p) \\ L_2(p) \end{bmatrix},$$

где

$$(П.42) \quad \begin{aligned} K_1(p) &= 0, & K_2(p) &= W_2(p), \\ L_1(p) &= \chi^2 W_1(p), & L_2(p) &= W_2(p)W_1(p), \\ M(p) &= W_3(p)W_2(p), & N(p) &= W_3(p)W_2(p)W_1(p). \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений и теоремы 4 из [20] следует, что системы  $S_0$  и  $\bar{S}_0 - H_2$ -эквивалентны в смысле [20] и им соответствует единая порождающая расширенная стандартная система  $\bar{S}_7$ .

*Доказательство теоремы 3.* Пусть имеем непонижаемые левые и правые MFD (ILMFD и IRMFD) [22]

$$(П.43) \quad W_i(p) = a_{\ell i}^{-1}(p)b_{\ell i}(p) = b_{r i}(p)a_{r i}^{-1}(p), \quad i = 1, 2, 3,$$

где в силу (П.15)

$$(П.44) \quad \deg \det a_{\ell i}(p) = \deg \det a_{r i}(p) = \psi_i.$$

Из (П.42) и (П.43) следует

$$(П.45) \quad M(p) = a_{\ell 3}^{-1}(p)b_{\ell 3}(p)a_{\ell 2}^{-1}(p)b_{\ell 2}(p).$$

Из (3.4) вытекает

$$\text{M deg } M(p) = \psi_2 + \psi_3.$$

Поэтому существует ILMFD

$$(П.46) \quad b_{\ell 3}(p)a_{\ell 2}^{-1}(p) = a_{\ell 4}^{-1}(p)b_{\ell 4}(p),$$

в котором

$$(П.47) \quad \det a_{\ell 4}(p) \sim \det a_{\ell 2}(p),$$

где символ  $\sim$  означает эквивалентность полиномиальных матриц [22, 23] и, в частности, скалярных полиномов. Поэтому справедливо равенство

$$(П.48) \quad \deg \det a_{\ell 4}(p) = \deg \det a_{\ell 2}(p) = \psi_2.$$

С помощью (П.46) получаем MFD

$$(П.49) \quad M(p) = a_M^{-1}(p)B_M(p),$$

где

$$(П.50) \quad a_M(p) = a_{\ell 4}(p)a_{\ell 3}(p), \quad b_M(p) = b_{\ell 4}(p)b_{\ell 2}(p),$$

причем

$$(П.51) \quad \deg \det a_M(p) = \psi_2 + \psi_3 = M \deg M(p).$$

Равенство (П.51) означает, что правая часть (П.49) – это ILMFD. Продолжая вычисления, используем равенство

$$(П.52) \quad N(p) = W_3(p)W_2(p)W_1(p) = M(p)W_1(p).$$

С помощью (П.43) при  $i = 1$  и (П.49) получаем, что

$$(П.53) \quad N(p) = a_M^{-1}(p)b_M(p)a_1^{-1}(p)b_1(p).$$

При выполнении (3.4) существует ILMFD

$$(П.54) \quad b_M(p)a_1^{-1}(p) = a_{\ell 5}^{-1}(p)b_{\ell 5}(p),$$

где

$$(П.55) \quad \begin{aligned} \det a_{\ell 5}(p) &\sim \det a_{\ell 1}(p), \\ \deg \det a_{\ell 5}(p) &= \deg \det a_{\ell 1}(p) = \psi_1. \end{aligned}$$

С учетом (П.54) из (П.52) получается ILMFD

$$(П.56) \quad N(p) = a_{\ell N}^{-1}(p)b_{\ell N}(p),$$

где

$$(П.57) \quad a_{\ell N}(p) = a_{\ell 5}(p)a_M(p), \quad b_{\ell N}(p) = b_{\ell 5}(p)b_M(p),$$

причем по построению

$$(П.58) \quad \deg \det a_{\ell N}(p) = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = M \deg N(p).$$

Из (П.55) и (П.57) в силу доказанного в [21] следует, что полюса матрицы  $W_1(p)$  являются фиксирующими.

Для доказательства утверждения, относящегося к матрице  $W_3(p)$ , используем (3.3) в виде

$$(П.59) \quad \bar{L}(p) = \begin{bmatrix} \chi^2 I \\ W_2(p) \end{bmatrix} W_1(p).$$

Аналогично предыдущему с помощью (П.59) устанавливается, что

$$(П.60) \quad M \deg \bar{L}(p) \leq \psi_2 + \psi_1.$$

В то же время из (3.3) имеем

$$(П.61) \quad M \deg \bar{L}(p) \geq \psi_1 + \psi_2.$$

Сопоставляя (П.60) и (П.61), находим, что

$$(П.62) \quad \text{M deg } \bar{L}(p) = \psi_1 + \psi_2.$$

Из (П.62) вытекает существование IRMFD

$$(П.63) \quad \bar{L}(p) = b_{r\bar{L}}(p)a_{r\bar{L}}^{-1}(p),$$

где

$$(П.64) \quad \text{deg det } a_{r\bar{L}}(p) = \psi_1 + \psi_2.$$

Из (П.63) следует, что произведение

$$(П.65) \quad \bar{L}(p)a_{r\bar{L}}(p) = \begin{bmatrix} \chi^2 W_1(p) \\ W_2(p)W_1(p) \end{bmatrix} a_{r\bar{L}}(p)$$

— полиномиальная матрица. Следовательно, произведение

$$(П.66) \quad W_2(p)W_1(p)a_{r\bar{L}}(p) \triangleq b_L(p)$$

— тоже полиномиальная матрица. Из (П.66) находим правое MFD

$$(П.67) \quad W_2(p)W_1(p) = b_L(p)a_{r\bar{L}}^{-1}(p),$$

которое в силу (3.4) непонижаемо. С помощью (П.43) и (П.67) находим

$$(П.68) \quad N(p) = b_{r3}(p)a_{r3}^{-1}(p)b_L(p)a_{r\bar{L}}^{-1}(p).$$

При выполнении (3.4) имеем

$$(П.69) \quad a_{r3}^{-1}(p)b_L(p) = b_{r4}(p)a_{r4}^{-1}(p),$$

где правая часть – IRMFD. Подставляя (П.69) в (П.68), приходим к IRMFD

$$(П.70) \quad N(p) = b_{rN}(p)a_{rN}^{-1}(p),$$

где

$$(П.71) \quad a_{rN}(p) = a_{r\bar{L}}(p)a_{r4}(p), \quad b_{rN}(p) = b_{\bar{L}}(p)b_{r4}(p).$$

Сопоставляя IRMFD (П.66) и (П.70) на основании результатов [21] получаем, что полюса матрицы  $W_3(p)$  являются фиксирующими.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear Optimal Control Systems. N.Y.: Wiley-Interscience, a Division of John Wiley & Sons, Inc., 1972.
  2. *Ackermann J.* Abtastregelung. Berlin: Springer-Verlag, 3 ed., 1988.
  3. *Astrom K.J., Wittenmark B.* Computer Controlled Systems: Theory and Design. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 3rd ed., 1997.
  4. *Chen T., Francis B.A.* Optimal sampled-data control systems. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
  5. *Fridman E., Shaked U.* Sampled-Data  $\mathcal{H}_\infty$  State Feedback Control of Systems with State Delays // Int. J. Control. 2000. V. 73. No. 12. P. 1115–1128.
  6. *Khargonekar P.P., Yamamoto J.* Delayed Signal Reconstruction Using Sampled-Data Control // Proc. 35th IEEE Conf. on Decision Contr. Kyoto. 1996. P. 1259–1263.
  7. *Yamamoto Y., Hara S.* Performance Lower Bound for a Sampled-Data Signal Reconstruction / V. Blondel, E. Sontag, M. Vidyasagar, J. Willems eds. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer-Verlag, 1998. P. 277–279.
  8. *Lennartson B.* Sampled-Data Control for Time-Delayed Plants // Int. J. Control. 1989. V. 49. P. 1601–1614.
  9. *Hara S., Fujioka H., Kabamba P.T.* A Hybrid State-Space Approach to Sampled-Data Feedback Control // Linear Algebra Appl. 1994. P. 679–712.
  10. *Wittenmark B.* Sampling of a System with Time Delay // IEEE Trans. Autom. Control. May 1985. V. AC-30. P. 507–510.
  11. *Jugo J.* Discretization of Continuous Time-Delay Systems // Proc. 15th IFAC Triennial World Congr. V. Linear systems/Time-delay systems. P. REG1450, Barcelona, 2002.
  12. *Polyakov K.Yu.*  $\mathcal{H}_2$ -optimal Sampled-Data Control of Plants with Multiple Input and Output Delays // Asian J. Control. June 2006. V. 8. No. 2. P. 107–116.
  13. *Emilia Fridman* Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control // Cham–Heidelberg–N.Y.–Dordrecht–London: Springer, 2014.
  14. *Mirkin L., Shima T., Tadmor G.* Analog Loop Shifting in  $\mathcal{H}_2$  Optimization of Input-Delay Sampled-Data Systems // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. December 10–13, 2013, Florence, Italy.
  15. *Mirkin L., Shima T., Tadmor G.* Sampled-Data  $\mathcal{H}_2$  Optimization of Systems with I/O Delays via Analog Loop Shifting // IEEE Trans. Autom. Control. March 2014. V. 59. No. 3. P. 787–791.
  16. *Розенwasser Е.Н.* Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. М.: Наука, 1994.
  17. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P.* Digitale Regelung in kontinuierlicher Zeit – Analyse und Entwurf im Frequenzbereich. B.G. Teubner, Stuttgart, 1997.
  18. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P.* Computer Controlled Systems – Analysis and Design with Process-orientated Models. London–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
  19. *Лямпе Б.П., Розенwasser Е.Н.*  $\mathcal{H}_2$ -оптимизация импульсных систем с запаздыванием на основе метода параметрической передаточной матрицы // АиТ. 2010. № 1. С. 49–69.
- Lampe B.P., Rosenwasser E.N.*  $\mathcal{H}_2$ -optimization of Time-Delayed Sampled-Data Systems on the Basis of the Parametric Transfer Matrix Method // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 1. P. 49–69.



20. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P., Drewelow W., Jeinsch T.* Стандартизируемость и  $H_2$ -оптимизация импульсных систем с множественными запаздываниями // *АиТ.* 2019. № 3. С. 26–44.  
*Rosenwasser E.N., Lampe B.P., Drewelow W., Jeinsch T.* Standardizability and  $H_2$ -Optimization of Sampled-Data Systems with Multiple Delays // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 3. P. 413–428.
21. *Rosenwasser E.N., Lampe B.P.* Multivariable Computer-Controlled Systems — A Transfer Function Approach. London: Springer, 2006.
22. *Kailath T.* Linear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.
23. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: ГИТТЛ, 1954.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.*

Поступила в редакцию 01.03.2019

После доработки 29.04.2019

Принята к публикации 18.07.2019