Автоматика и телемеханика, № 1, 2020

Нелинейные системы

© 2020 г. М.Г. ЮМАГУЛОВ, д-р физ.-мат. наук (yum_mg@mail.ru)
(Башкирский государственный университет, Уфа),
М.Ф. ФАЗЛЫТДИНОВ (fazlitdin_marat@mail.ru)
(ООО Газпромнефть НТЦ, Санкт-Петербург)

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предлагаются новые подходы, позволяющие получить аппроксимации второго и более высоких порядков центральных многообразий негиперболических точек равновесия динамических систем с непрерывным и дискретным временем. Полученные формулы приводят к новым конструктивным алгоритмам построения центральных многообразий. Предлагаемые формулы и алгоритмы носят общий характер в том смысле, что они позволяют строить центральные многообразия в терминах исходных уравнений и применимы к ситуациям, когда матрица линеаризации имеет произвольный порядок вырождения.

Ключевые слова: динамические системы, точка равновесия, центральное многообразие, бифуркация, аппроксимация, приближенные формулы, алгоритмы.

DOI: 10.31857/S0005231020010031

1. Введение и постановка задачи

Важным объектом изучения нелинейных динамических систем является центральное многообразие негиперболической точки равновесия. В фазовом пространстве системы это многообразие локально инвариантно для ее траекторий; оно содержит точку равновесия и касается в ней соответствующего подпространства линеаризации системы. В естественном смысле вся нетривиальная динамика системы в окрестности точки равновесия сосредоточена на центральном многообразии. Этот факт следует из теоремы о центральном многообразии (см. [1–7]) и принципа сведения А.Н. Шошитайшвили [8], позволяющего при изучении динамики системы избавиться от "гиперболических переменных", оказывающих вполне предсказуемое влияние, и свести задачу к исследованию системы на центральном многообразии.

Теория центрального многообразия находит многочисленные приложения во многих задачах теории динамических систем, нелинейной динамики, механики, теории управления и др. Ограничимся здесь ссылками на работы [9–11], в которых методы этой теории использовались в задачах моделирования управляемых процессов, в задачах параметрической идентификации и др. Сочетание теории центрального многообразия с теорией нормальных форм Пуанкаре [2, 4, 12] широко используется и для изучения задач о бифуркациях в динамических системах [2–4, 7, 13, 14].

Так как центральное многообразие и динамика системы на нем, как правило, не могут быть точно рассчитаны, то актуальными являются разработки соответствующих аппроксимаций. При этом практический интерес, как правило, представляют аппроксимации второго и третьего порядков. Имеющиеся в литературе подходы, позволяющие получать приближенное представление центрального многообразия, как правило, направлены на решение конкретных задач. В [7] предложены общие подходы и формулы в ситуациях, когда матрица линеаризации имеет порядок вырождения, равный 1 или 2. Использование этих формул для исследования конкретных уравнений, как правило, требует предварительного преобразования исходных уравнений, что далеко не всегда является тривиальной задачей. Следует также отметить подходы, основанные на применении современной компьютерной техники и пакетов символьных вычислений (см., например, [15]). Эти подходы позволили существенно продвинуться в построении центральных многообразий, в частности в задаче вычисления аппроксимаций высоких порядков.

В настоящей работе предлагается общая схема, позволяющая получить новые приближенные формулы для центральных многообразий динамических систем в терминах исходных уравнений. Предлагаемая схема носит общий характер и в том смысле, что она применима к ситуациям, когда матрица линеаризации имеет произвольный порядок вырожденности.

Основными объектами исследования в статье являются динамические системы с непрерывным временем:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + a(x), \quad x \in R^N, \tag{1.1}$$

и динамические системы с дискретным временем:

$$x_{n+1} = Ax_n + a(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_n \in R^N, \tag{1.2}$$

в которых A — квадратная матрица, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой ($m \geqslant 2$) и удовлетворяет равенствам $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$. Предполагается, что точки равновесия $x = 0$ систем (1.1) и (1.2) являются негиперболическими: для системы (1.1) матрица A имеет одно или несколько чисто мнимых собственных значений, а для системы (1.2) матрица A имеет одно или несколько собственных значений, равных 1 по модулю.

2. Динамические системы с непрерывным временем

Рассмотрим сначала систему (1.1). Если ее точка равновесия $x = 0$ является гиперболической (т.е. матрица A не имеет собственных значений на мнимой оси), то по теореме Гробмана – Хартмана (см., например, [1, 3]) в малой окрестности точки $x = 0$ фазовый портрет нелинейной системы (1.1) топологически эквивалентен фазовому портрету линейной системы

$$x' = Ax, \quad x \in R^N. \tag{2.1}$$

Другими словами, качественное поведение решений нелинейной автономной системы (1.1) в окрестности гиперболической точки равновесия $x = 0$ полностью определяется поведением решений соответствующей линейной системы (2.1).

2.1. Теорема о центральном многообразии

Всюду ниже будем предполагать, что точка равновесия $x = 0$ системы (1.1) является негиперболической, т.е. матрица A имеет одно или несколько чисто мнимых собственных значений. В этом случае теорема Гробмана – Хартмана уже неприменима. Другими словами, для описания поведения траекторий нелинейной системы (1.1) вблизи точки $x = 0$ недостаточно анализа только линеаризованной системы (2.1). Здесь необходимо учитывать нелинейные члены системы (1.1).

Пусть спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а σ^0 — остальные собственные значения. Множество σ^0 также состоит из двух частей (одна из которых может быть пустым множеством): $\sigma^0 = \sigma_- \cup \sigma^+$, где множество σ_- содержит собственные значения, вещественные части которых отрицательны, а σ^+ — собственные значения, вещественные части которых положительны. Обозначим через E_0, E_- и E^+ — корневые подпространства матрицы A, отвечающие соответственно частям σ_0, σ_- и σ^+ ее спектра. Пусть k_0, k_- и k^+ — это размерности подпространств E_0, E_- и E^+; тогда $k_0 + k_- + k^+ = N$ и $1 \leqslant k_0 \leqslant N - 1$. Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E_- \bigoplus E^+$ инвариантных для оператора $A : R^N \to R^N$ подпространств E_0, E_- и E^+.

Имеет место следующая *теорема о центральном многообразии* (см. [1–7]).

Теорема 1. *Существует δ_0-окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что система* (1.1) *имеет в шаре* $T(0, \delta_0)$:

— единственные C^m-гладкие инвариантные k_--мерное устойчивое многообразие W_s и k^+-мерное неустойчивое многообразие W_u;

— C^m-гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие W_c.

Эти многообразия пересекаются только в точке $x = 0$ и касаются в ней подпространств E_-, E^+ и E_0 соответственно.

Инвариантность многообразий W_s и W_u для системы (1.1) означает, что если некоторая ее траектория в некоторый момент времени находится на многообразии W_s (или W_u), то она будет находиться на W_s (или W_u) и во все последующие моменты времени до тех пор, пока эта траектория остается в шаре $T(0, \delta_0)$. Устойчивость многообразия W_s означает, что все траектории системы (1.1), начинающиеся на W_s, стремятся при $t \to +\infty$ к точке $x = 0$. Соответственно, неустойчивость многообразия W_u означает, что все траектории системы (1.1), начинающиеся в ненулевой точке многообразия W_u, за конечное время покидают шар $T(0, \delta_0)$, а при $t \to -\infty$ стремятся к точке $x = 0$.

Многообразие W_c называют *центральным многообразием* системы (1.1). Инвариантность многообразия W_c для системы (1.1) означает, что если некоторая ее траектория в некоторый момент времени находится на многообразии W_c, то она будет находиться на W_c и во все последующие моменты времени до тех пор, пока эта траектория остается в шаре $T(0,\delta_0)$.

2.2. Вспомогательные сведения

Приведем некоторые вспомогательные сведения относительно свойств центрального многообразия (см., например, [1–7]).

Положим $E^0 = E_- \bigoplus E^+$, т.е. E^0 — это корневое подпространство матрицы A, отвечающее части σ^0 ее спектра. Размерность подпространства E^0 равна $k^0 = k_- + k^+$. Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E^0$ инвариантных для оператора $A : R^N \to R^N$ подпространств E_0 и E^0. Обозначим, наконец, через $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Центральное многообразие W_c системы (1.1) может быть задано уравнением вида $v = \psi(u)$, где $u \in E_0$, $v \in E^0$, а функция $\psi(u)$ является гладкой и удовлетворяет равенствам $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$. Другими словами, центральное многообразие W_c может быть локально (в малой окрестности точки $x = 0$) описано равенством

$$W_c = \Big\{x : x = u + \psi(u) \mid \ u \in E_0,\ \psi(u) \in E^0,\ \psi(0) = 0, \psi'(0) = 0\Big\}. \tag{2.2}$$

Упомянутый выше принцип сведения А.Н. Шошитайшвили здесь состоит в том, что задача о поведении решений N-мерного уравнения (1.1) в окрестности точки $x = 0$ может быть сведена к аналогичной задаче для k_0-мерного уравнения:

$$u' = Au + P_0 a(u + \psi(u)), \quad u \in E_0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) содержит все основные особенности, присущие исходному уравнению (1.1).

Замечание 1. Центральное многообразие W_c системы (1.1), вообще говоря, не является единственным. Однако все возможные центральные многообразия имеют совпадающие тейлоровские разложения соответствующих функций $v = \psi(u)$ в точке $u = 0$, т.е. все эти функции имеют одинаковые производные $\psi^j(0)$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$. Другими словами, все центральные многообразия мало отличаются друг от друга. При этом каждое из этих многообразий содержит все ограниченные решения системы (1.1), содержащиеся в шаре $T(0,\delta_0)$. В частности, они содержат все точки равновесия, периодические, гомо- и гетероклинические орбиты, лишь бы их траектории располагались в малой окрестности точки $x = 0$. Поэтому для изучения задачи о таких решениях можно выбирать любое из центральных многообразий.

Замечание 2. Если правая часть системы (1.1) является аналитической (а именно, когда функция $a(x)$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ представима в виде сходящегося ряда Тейлора, начинающегося со второй степени), то эта система не может иметь более одного аналитического центрального многообразия. Если при этом аналитического центрального многообразия система не имеет, то ряд Тейлора для функции $v=\psi(u)$, определяющей центральное многообразие W_c и вычисленный в точке $u=0$, расходится в любой окрестности этой точки. Тем не менее в силу теоремы 1 частичные суммы этого ряда могут давать хорошую аппроксимацию центрального многообразия W_c.

2.3. Схема построения центрального многообразия

Перейдем к задаче приближенного построения центрального многообразия (2.2) системы (1.1), а именно, функции $v=\psi(u)$. Ниже будет использоваться следующее утверждение (см., например, [4]).

Теорема 2. Функция $v=\psi(u)$ (*такая, что* $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$) *описывает центральное многообразие* W_c *системы* (1.1) *тогда и только тогда, когда она в некоторой окрестности точки* $u=0$ *подпространства* E_0 *является решением уравнения*

$$\psi'(u)[Au+P_0a(u+\psi(u))]=A\psi(u)+P^0a(u+\psi(u)). \tag{2.4}$$

Функцию $v=\psi(u)$ будем строить в виде

$$\psi(u)=\psi_2(u)+\psi_3(u)+\ldots+\psi_s(u)+\widehat{\psi}(u), \tag{2.5}$$

где $\psi_j(u)$ — однородные функции порядка j, определенные в малой окрестности точки $u=0$ подпространства E_0 и принимающие значения в E^0, а функция $\widehat{\psi}(u)$ является C^m-гладкой и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}(u)\|=$ $=O(\|u\|^{s+1})$ при $u\to 0$.

Ограничимся приведением схемы построения функций $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$; построение последующих функций $\psi_j(u)$ проводится по той же схеме. В этой связи будем считать, что нелинейность в правой части уравнения (1.1) представима в виде $a(x)=a_2(x)+a_3(x)+\widehat{a}_4(x)$, где $a_2(x)$ содержит квадратичные по x слагаемые, $a_3(x)$ — слагаемые третьей степени, а $\widehat{a}_4(x)$ является C^m-гладкой и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{a}_4(x)\|=O(\|x\|^4)$ при $x\to 0$.

Имеет место следующая

Лемма 1. Функции $\psi_2(u)$ *и* $\psi_3(u)$ *являются решениями уравнений*

$$\psi_2'(u)Au-A\psi_2(u)=P^0a_2(u), \tag{2.6}$$

$$\psi_3'(u)Au-A\psi_3(u)=-\psi_2'(u)P_0a_2(u)+P^0[a_2'(u)\psi_2(u)+a_3(u)]. \tag{2.7}$$

Справедливость этого утверждения устанавливается простым подсчетом путем подстановки (2.5) в (2.4).

С целью изучения вопроса о разрешимости уравнений (2.6) и (2.7) обозначим через через F_p множество однородных порядка p (p — натуральное число) функций $\psi(u)$, определенных в подпространстве E_0 и принимающих значения в подпространстве E^0, т.е.

$$F_p=\Big\{\psi(u)\mid\ \psi:\,E_0\to E^0,\ \psi(\alpha u)\equiv\alpha^p\psi(u)\Big\}. \tag{2.8}$$

Для каждого p множество F_p образует линейное пространство с обычными операциями сложения элементов и умножения на вещественные числа. Далее, через L обозначим действующий в пространстве F_p линейный оператор, сопоставляющий каждой функции $\psi(u) \in F_p$ функцию $L\psi(u) \in F_p$, определенную равенством

$$L\psi(u) = \psi'(u)Au - A\psi(u). \tag{2.9}$$

Конечно, оператор L будет зависеть от p. Однако для простоты будем использовать одно и то же обозначение L для всех действующих в пространствах F_p операторов (2.9) независимо от значения p.

Уравнения (2.6) и (2.7) однотипны, имея вид

$$L\psi(u) = b(u), \tag{2.10}$$

относительно неизвестной функции $\psi(u) \in F_p$; здесь L — оператор (2.9). При этом, например, для (2.6) имеем: $\psi(u) \in F_2$, $b(u) = P^0 a_2(u) \in F_2$, а L — оператор, действующий в пространстве F_2.

Лемма 2. *Определенный равенством* (2.9) *линейный оператор* $L: F_p \to F_p$ *обратим.*

Доказательство этой леммы вынесено в Приложение.

Из леммы 2 следует однозначная разрешимость уравнений (2.6) и (2.7):

$$\psi_2(u) = L^{-1}P^0 a_2(u), \tag{2.11}$$

$$\psi_3(u) = L^{-1}P^0[-\psi_2'(u)P_0 a_2(u) + a_2'(u)\psi_2(u) + a_3(u)], \tag{2.12}$$

где через L^{-1} обозначен обратный оператор для (2.9); точнее, в (2.11) L^{-1} — это обратный для оператора $L: F_2 \to F_2$, а в (2.12) — для оператора $L: F_3 \to F_3$.

Для вычисления функций (2.11) и (2.12) необходимо знание обратного оператора L^{-1} и операторов проектирования P_0 и P^0 на подпространства E_0 и E^0 соответственно. Вопрос о построении оператора L^{-1} обсуждается ниже. Для случая, когда подпространство E_0 является одномерным или двумерным, формулы для операторов проектирования также приводятся ниже. Задача построения операторов проектирования в общей ситуации может быть решена стандартными методами спектральной теории операторов (см., например, [16]).

2.3.1. Алгоритм построения обратного оператора L^{-1}. Задача построения обратного оператора L^{-1} равносильна задаче решения уравнения (2.10). Ограничимся рассмотрением этой задачи в пространстве F_2. В общем случае задача может быть решена по той же схеме.

Напомним, что k_0 и k^0 — это размерности подпространств E_0 и E^0 такие, что $k_0 + k^0 = N$ и $1 \leqslant k_0 \leqslant N-1$. Для простоты обозначений положим $k = k_0$.

На первом этапе предлагаемого алгоритма выберем в подпространстве E_0 некоторый базис $e_1, \ldots, e_k$. Каждый вектор $u \in E_0$ единственным образом представляется в виде $u = u_1 e_1 + \ldots + u_k e_k$. Тогда каждый вектор $b(u) \in F_2$ единственным образом представляется в виде $b(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} u_i u_j b_{ij}$, в котором $b_{ij} = b_{ji} \in E^0$. Решение $\psi(u) \in F_2$ уравнения (2.10) будем искать в виде $\psi(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} u_i u_j g_{ij}$, в котором векторы $g_{ij} = g_{ji} \in E^0$ требуют определения.

На втором этапе вычислим значение оператора $L\psi(u)$, определенного левой частью уравнения (2.10). Имеем

$$Au = \sum_{i=1}^{k} u_i A e_i, \quad A\psi(u) = \sum_{i,j=1}^{k} u_i u_j A g_{ij}. \tag{2.13}$$

Несложно убедиться в том, что для $h = h_1 e_1 + \ldots + h_k e_k \in E_0$ имеет место равенство

$$\psi'(u)h = 2(u_1 B_1 + \ldots + u_k B_k)h, \tag{2.14}$$

где $B_j : E_0 \to E^0$ — линейные операторы, задаваемые равенствами $B_j h = \sum\limits_{i=1}^{k} h_i g_{ij}$.

Равенства (2.13) и (2.14) в совокупности с равенством $b(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} u_i u_j b_{ij}$ позволяют представить уравнение (2.10) (путем приравнивания коэффициентов при одинаковых выражениях $u_i u_j$) как систему линейных уравнений с неизвестными векторами g_{ij}. Эта система однозначно разрешима в силу леммы 2. Решение полученной системы представляет собой третий (заключительный) этап предлагаемого алгоритма вычисления функции (2.11).

Предлагаемый алгоритм может быть доведен до программ вычисления коэффициентов $\psi_j(u)$ центрального многообразия (2.2) системы (1.1) с применением современной компьютерной техники и пакетов символьных вычислений.

Приведем для иллюстрации алгоритм вычисления функции (2.11) в ситуации, когда матрица A имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$ и не имеет других чисто мнимых собственных значений.

В рассматриваемом случае подпространство E_0 является двумерным. Обозначим через $e, g \in R^N$ ненулевые векторы такие, что $A(e + ig) = i\omega_0(e + ig)$; векторы e и g образуют базис в E_0. Каждый вектор $u \in E_0$ единственным образом представим в виде $u = u_1 e + u_2 g$, а каждая функция $b(u) \in F_2$ — в виде

$$b(u) = u_1^2 b_{11} + 2u_1 u_2 b_{12} + u_2^2 b_{22}, \tag{2.15}$$

где $b_{11}, b_{12}, b_{22} \in E^0$. Решение $\psi(u) \in F_2$ уравнения (2.10) будем искать в виде $\psi(u) = u_1^2 g_{11} + u_2^2 g_{22} + 2u_1 u_2 g_{12}$, в котором $g_{11}, g_{12}, g_{22} \in E^0$ требуют определения.

Подставляя в уравнение (2.10) равенства (2.13) и (2.14) (с учетом рассматриваемого случая), а также равенство (2.15), получим уравнение

$$2\omega_0\left[\left(u_2^2-u_1^2\right)g_{12}+u_1u_2(g_{11}-g_{22})\right]-\left(u_1^2Ag_{11}+u_2^2Ag_{22}+2u_1u_2Ag_{12}\right)=$$
$$=u_1^2b_{11}+u_2^2b_{22}+2u_1u_2b_{12}.$$

Приравнивая затем в этом уравнении коэффициенты при одинаковых выражениях u_iu_j, получим систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных векторов $g_{11},g_{12},g_{22}\in E^0$. Полученная система однозначно разрешима:

$$\begin{aligned} g_{12}&=-(A^2+4\omega_0^2I)^{-1}[\omega_0(b_{11}-b_{22})+Ab_{12}],\\ g_{11}&=-A^{-1}(2\omega_0g_{12}+b_{11}),\\ g_{22}&=A^{-1}(2\omega_0g_{12}-b_{22}).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Здесь для простоты через $(A^2+4\omega_0^2I)^{-1}$ и A^{-1} обозначены обратные операторы для операторов $(A^2+4\omega_0^2I):E^0\to E^0$ и $A:E^0\to E^0$; обратимость последних операторов следует из предположения, что оператор $A:E^0\to E^0$ не имеет чисто мнимых собственных значений.

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (2.10) имеет единственное решение

$$\psi(u)=L^{-1}b(u)=u_1^2g_{11}+u_2^2g_{22}+2u_1u_2g_{12},\tag{2.17}$$

где g_{11},g_{12},g_{22} — векторы (2.16).

Предлагаемый алгоритм позволяет строить решение уравнения (2.10) в общей ситуации. Формулы, определяющие это решение, в свою очередь, позволяют (в соответствии с (2.5)) получить представление центрального многообразия W_c системы (1.1) до любого порядка. Продемонстрируем эффективность предлагаемого подхода в задачах построения центрального многообразия в случаях, когда: а) матрица A имеет простое собственное значение 0; б) матрица A имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$.

2.4. Формулы для центрального многообразия: случай нулевого собственного значения

Пусть матрица A имеет простое собственное значение 0 и не имеет других чисто мнимых собственных значений. В этом случае существуют собственные векторы e и g матрицы A и транспонированной матрицы A^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 0 и удовлетворяющие равенствам

$$\|e\|=1,\quad (e,g)=1.\tag{2.18}$$

Подпространство E_0 является одномерным; оно содержит вектор e. Операторы проектирования P_0 и P^0 здесь определяются равенствами

$$P_0x=(x,g)e,\quad P^0=I-P_0.\tag{2.19}$$

Так как подпространство E_0 является одномерным, то векторы $u \in E_0$ можно задавать равенством $u = \varepsilon e$, где $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$. Соответственно, произвольный вектор $x \in R^N$ единственным образом представляется в виде суммы $x = \varepsilon e + v$, так что $\varepsilon = (x, g)$ и $v = P^0 x$. Формулу (2.2) для описания центрального многообразия W_c системы (1.1) в рассматриваемом случае можно представить равенством

$$W_c = \{x : \, x = \varepsilon e + \psi(\varepsilon)\}, \tag{2.20}$$

в котором функция $\psi(\varepsilon)$ принимает свои значения в подпространстве E^0, при этом она является C^m-гладкой и удовлетворяет равенствам $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$. Наконец, формулу (2.5) для приближенного представления функции $\psi(\varepsilon)$ здесь можно представить в виде

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon), \tag{2.21}$$

где $\psi_2, \psi_3 \in E^0$ — требующие определения коэффициенты, а принимающая свои значения в подпространстве E^0 функция $\widehat{\psi}_4(\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \to 0$.

Положим $B_0 = -A + P_0$. По построению оператор $B_0 : \, R^N \to R^N$ обратим, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для него. Положим далее для краткости

$$a_2 = a_2(e), \quad a_3 = a_3(e), \quad a_2' = a_2'(e). \tag{2.22}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть матрица A имеет простое собственное значение 0, а вещественные части остальных ее собственных значений не равны нулю. Тогда центральное многообразие W_c системы (1.1) может быть описано равенством (2.20), в котором $\psi(\varepsilon)$ — функция (2.21), а коэффициенты ψ_2 и ψ_3 определяются равенствами*

$$\psi_2 = B_0^{-1} P^0 a_2, \quad \psi_3 = B_0^{-1} P^0 [-2(a_2, g)\psi_2 + a_2' \psi_2 + a_3]. \tag{2.23}$$

Доказательство этой теоремы вынесено в Приложение.

Таким образом, в условиях теоремы 3 система (1.1) имеет одномерное центральное многообразие и оно представимо в виде (2.20):

$$W_c = \left\{ x : \, x = \varepsilon e + \varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon) \right\},$$

где ψ_2 и ψ_3 — коэффициенты (2.23), а функция $\widehat{\psi}_4(\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$ при $\varepsilon \to 0$.

2.5. Формулы для центрального многообразия: случай пары чисто мнимых собственных значений

Пусть теперь матрица A имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$ и не имеет других чисто мнимых собственных значений. В этом случае существуют векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$, удовлетворяющие равенствам $A(e + ig) =$

$= \omega_0 i(e+ig)$ и $A^*(e^*+ig^*) = -\omega_0 i(e^*+ig^*)$, где A^* — транспонированная матрица. Эти векторы можно нормировать равенствами

$$(e,e^*) = (g,g^*) = 1, \quad (e,g^*) = (g,e^*) = 0, \quad \|e\| = \|g\| = 1. \tag{2.24}$$

Подпространство E_0 является двумерным; оно содержит векторы e и g. Операторы проектирования P_0 и P^0 здесь определяются равенствами

$$P_0 x = (x,e^*)e + (x,g^*)g, \quad P^0 = I - P_0. \tag{2.25}$$

Так как подпространство E_0 является двумерным, то векторы $u \in E_0$ можно задавать равенством $u = u_1 e + u_2 g$, где $u_1,\ u_2 \in (-\infty,\infty)$. Соответственно, произвольный вектор $x \in R^N$ единственным образом представляется в виде суммы $x = u + v$, так что $u = u_1 e + u_2 g$, $u_1 = (x,e^*)$, $u_2 = (x,g^*)$ и $v = P^0 x$. Формулу (2.2) для описания центрального многообразия W_c системы (1.1) в рассматриваемом случае можно представить равенством

$$W_c = \{x:\ x = u_1 e + u_2 g + \psi(u)\}, \tag{2.26}$$

в котором функция $\psi(u)$ принимает свои значения в подпространстве E^0, при этом она является C^m-гладкой и удовлетворяет равенствам $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$. Формулу (2.5) для приближенного представления функции $\psi(u)$ здесь можно представить в виде

$$\psi(u) = \psi_2(u) + \psi_3(u) + \widehat{\psi}_4(u), \tag{2.27}$$

где $\psi_2(u), \psi_3(u) \in E^0$ — требующие определения однородные по u функции порядка 2 и 3 соответственно. Функция $\widehat{\psi}_4(u) \in E^0$ является гладкой и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{\psi}_4(u)\| = O(\|u\|^4)$, $u \to 0$.

Из лемм 1 и 2, а также из формул (2.11) и (2.12) следует, что верна

Теорема 4. Пусть матрица A имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, а вещественные части остальных ее собственных значений не равны нулю. Тогда центральное многообразие W_c системы (1.1) *может быть описано равенством* (2.26), *в котором $u = u_1 e + u_2 g$, $\psi(u)$ — функция* (2.27), *а $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ определяются равенствами* (2.11) *и* (2.12).

Пример 1. Рассмотрим систему Лэнгфорда (см., например, [7]) вида

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1 x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 x_3 \\ x_3' = k x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \end{cases} \tag{2.28}$$

где $k \neq 0$. Эта система представима в виде (1.1) при

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \qquad a(x) = a_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \\ -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица A имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i$ и $\lambda_3 = k$, то точка равновесия $x = 0$ системы (2.28) является негиперболической. Поэтому в силу теоремы 4 система (2.28) имеет в окрестности точки $x = 0$ фазового пространства R^3 двумерное центральное многообразие W_c. Используя вышеприведенный подход определим приближенные формулы для этого многообразия. Ограничимся вычислением квадратичного приближения, т.е. в формуле (2.27) ограничимся вычислением слагаемого $\psi_2(u)$.

В соответствии с равенством (2.11) имеем $\psi_2(u) = L^{-1}P^0 a_2(u)$. Далее в качестве векторов, удовлетворяющих равенствам (2.24), здесь можно взять векторы $e = e^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g = g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Тогда $u = u_1 e + u_2 g = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1^2 - u_2^2 \end{bmatrix}$, $P^0 a_2(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1^2 - u_2^2 \end{bmatrix}$; здесь P^0 определяется в (2.25).

Полученная квадратичная функция $b(u) = P^0 a_2(u)$ представляется в виде (2.15) при $b_{11} = b_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Тогда из (2.16) получим $g_{11} = $ $= g_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/k \end{bmatrix}$, $g_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Следовательно, функция $\psi_2(u) = L^{-1}P^0 a_2(u)$ определяется (см. (2.17)) равенством $\psi_2(u) = u_1^2 g_{11} + u_2^2 g_{22} + 2u_1 u_2 g_{12} = $ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (u_1^2 + u_2^2)/k \end{bmatrix}$, а искомое центральное многообразие W_c — равенством

$$W_c = \left\{ x : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (x_1^2 + x_2^2)/k \end{bmatrix} + O(\|x\|^3) \right\}. \tag{2.29}$$

3. Динамические системы с дискретным временем

3.1. О центральном многообразии

Рассмотрим теперь динамическую систему (1.2) с дискретным временем. Качественное поведение решений этой системы в окрестности гиперболической точки равновесия $x = 0$ (когда матрица A не имеет собственных значений, равных 1 по модулю) по теореме Гробмана — Хартмана (см., например, [1, 3]) полностью определяется поведением решений соответствующей линейной системы $x_{n+1} = Ax_n$. Если же точка равновесия $x = 0$ системы (1.2) является негиперболической, то для описания поведения траекторий нелинейной системы (1.2) вблизи точки $x = 0$ недостаточно анализа только указанной линейной системы. Здесь необходимо учитывать нелинейные члены системы (1.2).

Ниже будем считать, что нелинейность системы (1.2) представима в виде $a(x) = a_2(x) + a_3(x) + \tilde{a}_4(x)$, где $x \in R^N$, функции $a_2(x)$ и $a_3(x)$ являются соответственно квадратичной и кубической по x слагаемым, а функция $\tilde{a}_4(x)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{a}_4(x)\| = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$. Общий случай, когда $a(x) = a_2(x) + \ldots + a_s(x) + \tilde{a}_{s+1}(x)$, может быть рассмотрен по той же схеме.

Предполагается, что спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, равные 1 по модулю, а σ^0 — остальные собственные значения. Обозначим через E_0 и E^0 корневые подпространства матрицы A, отвечающие соответственно частям σ_0 и σ^0 ее спектра. Пусть k_0 и k^0 — это размерности подпространств E_0 и E^0. Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E^0$ инвариантных для оператора $A : R^N \to R^N$ подпространств E_0 и E^0. Обозначим через $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Имеет место следующий аналог теоремы 1 о центральном многообразии (см., например, [1, 3]).

Теорема 5. *Существует δ_0-окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что система* (1.2) *в этой окрестности имеет C^m-гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие W_c, содержащее точку $x = 0$ и касающееся в ней подпространства E_0.*

Эта теорема может быть дополнена утверждениями о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий W_s и W_u.

Инвариантность многообразия W_c для системы (1.2) означает, что если $x \in W_c \bigcap T(0, \delta_0)$ и $F(x) \in T(0, \delta_0)$, то $F(x) \in W_c$; здесь $F(x) = Ax + a(x)$. Многообразие W_c называют *центральным* для отображения (1.2) в окрестности неподвижной точки $x = 0$.

Центральное многообразие W_c системы (1.2) может быть задано уравнением вида $v = \psi(u)$, где $u \in E_0$, $v \in E^0$, а функция $\psi(u)$ является гладкой и удовлетворяет равенствам $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$. Другими словами, центральное многообразие W_c может быть локально (в малой окрестности точки $x = 0$) описано равенством вида (2.2).

Принцип сведения А.Н. Шошитайшвили здесь состоит в том, что задача о поведении решений N-мерного уравнения (1.2) в окрестности точки $x = 0$ может быть сведена к аналогичной задаче для k_0-мерного уравнения:

$$u_{n+1} = Au_n + P_0 a(u_n + \psi(u_n)), \quad u_n \in E_0, \tag{3.1}$$

где $u = P_0 x$. Уравнение (3.1) содержит все основные особенности, присущие исходному уравнению (1.2).

3.2. Схема построения центрального многообразия

Имеет место следующий аналог теоремы 2.

Теорема 6. *Функция $v = \psi(u)$ (такая, что $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$) описывает центральное многообразие W_c системы* (1.2) *тогда и только тогда,* *когда она в некоторой окрестности точки $u = 0$ подпространства E_0 является решением уравнения*

$$\psi(Au + P_0 a(u + \psi(u))) = A\psi(u) + P^0 a(u + \psi(u)). \tag{3.2}$$

Перейдем к задаче приближенного построения функции $v = \psi(u)$. С этой целью представим ее в виде (2.5): $\psi(u) = \psi_2(u) + \psi_3(u) + \ldots$

Лемма 3. Функции $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ являются решениями уравнений

$$\psi_2(Au) - A\psi_2(u) = P^0 a_2(u), \tag{3.3}$$

$$\psi_3(Au) - A\psi_3(u) = -\psi_2'(Au) P_0 a_2(u) + P^0[a_2'(u)\psi_2(u) + a_3(u)]. \tag{3.4}$$

Справедливость этого утверждения устанавливается простым подсчетом путем подстановки (2.5) в (3.2).

Как и выше, через F_p будем обозначать линейное пространство однородных порядка p функций $\psi(u)$, определенных в подпространстве E_0 и принимающих значения в подпространстве E^0 (см. (2.8)). Через J обозначим линейный оператор, действующий в пространстве F_p и сопоставляющий каждой функции $\psi(u) \in F_p$ функцию

$$J\psi(u) = \psi(Au) - A\psi(u). \tag{3.5}$$

При этом для простоты будем использовать одно и то же обозначение J для всех действующих в пространствах F_p операторов (3.5) независимо от значения p.

Имеет место следующий аналог леммы 2.

Лемма 4. Определенный равенством (3.5) *линейный оператор $J : F_p \to \to F_p$ обратим.*

Доказательство этой леммы вынесено в Приложение.

Из леммы 4 следует однозначная разрешимость уравнений (3.3) и (3.4):

$$\psi_2(u) = J^{-1} P^0 a_2(u), \tag{3.6}$$

$$\psi_3(u) = J^{-1} P^0[-\psi_2'(Au) P_0 a_2(u) + a_2'(u)\psi_2(u) + a_3(u)], \tag{3.7}$$

где через J^{-1} обозначен обратный оператор для (3.5); точнее, в (3.6) J^{-1} — это обратный для оператора $J : F_2 \to F_2$, а в (3.7) — для оператора $J : F_3 \to \to F_3$.

3.3. Формулы для центрального многообразия

Перейдем к задаче построения функций (3.6) и (3.7). Здесь ограничимся рассмотрением ситуаций, когда матрица A имеет:

— **P1)** простое собственное значение 1;

— **P2)** простое собственное значение -1;

— **P3)** пару простых собственных значений $e^{\pm\varphi_0 i}$, где $0 < \varphi_0 < \pi$.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A не равны по модулю единице.

Случай P1.

Этот случай почти дословно повторяет аналогичный случай для динамической системы с непрерывным временем (1.1), рассмотренный в разделе 2.4. Поэтому укажем здесь лишь то, что присуще системе с дискретным временем (1.2).

Обозначим через e и g собственные векторы матриц A и A^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 1 и удовлетворяющие равенствам (2.18). В отличие от раздела 2.4, оператор B_0 здесь определим равенством $B_0 = I - A + P_0$. По построению оператор $B_0 : R^N \to R^N$ обратим, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для него.

Т е о р е м а 7. *Пусть матрица A имеет простое собственное значение* 1, *а модули остальных ее собственных значений не равны единице. Тогда центральное многообразие W_c системы* (1.2) *может быть описано равенством* (2.20), *в котором $\psi(\varepsilon)$ — функция* (2.21), *а коэффициенты ψ_2 и ψ_3 определяются равенствами* (2.23).

Случай P2.

В этом случае существуют собственные векторы e и g матриц A и A^* соответственно, отвечающие простому собственному значению -1 и удовлетворяющие равенствам (2.18). Подпространство E_0 здесь также (как и в случае P1) является одномерным; оно содержит вектор e. Наконец, операторы проектирования P_0 и P^0 определяются теми же равенствами (2.19).

Как и в случае P1, здесь уравнение центрального многообразия W_c можно искать в виде (2.20). Положим

$$B_1 = I - A, \quad B_2 = -I - A + P_0. \tag{3.8}$$

По построению операторы $B_1 : R^N \to R^N$ и $B_2 : R^N \to R^N$ обратимы, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для них.

Т е о р е м а 8. *Пусть матрица A имеет простое собственное значение -1, а модули остальных ее собственных значений не равны единице. Тогда центральное многообразие W_c системы* (1.2) *может быть описано равенством* (2.20), *в котором $\psi(\varepsilon)$ — функция* (2.21), *а коэффициенты ψ_2 и ψ_3 определяются равенствами*

$$\psi_2 = B_1^{-1} P^0 a_2, \quad \psi_3 = B_2^{-1} P^0 [2(a_2, g)\psi_2 + a_2' \psi_2 + a_3]. \tag{3.9}$$

Доказательство теоремы 8 вынесено в Приложение.

П р и м е р 2. Рассмотрим модель Хенона (см., например, [2]) вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3} x_n - \tfrac{2}{3} y_n - y_n^2, \end{cases} \tag{3.10}$$

т.е. систему (1.2) при $N = 2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$, $a(w) = a_2(w) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y^2 \end{bmatrix}$, где $w = (x, y)$. Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1/3$. Рассмотрим вопрос о построении центрального многообразия W_c системы (3.10).

Вычисления по формулам (2.18), (2.19), (3.8) и (3.9) приводят к равенствам

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = -\frac{3}{16} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Поэтому искомое центральное многообразие W_c определяется равенством $W_c = \{w : w = \varepsilon e + \varepsilon^2 \psi_2 + O(\varepsilon^3)\}$, в котором e и ψ_2 — это векторы из (3.11).

Случай P3.

Этот случай имеет смысл рассматривать только при $N \geqslant 3$.

Так как матрица A имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i\varphi_0}$, то найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства $A(e + ig) = e^{i\varphi_0}(e + ig)$, $A^*(e^* + ig^*) = e^{-i\varphi_0}(e^* + ig^*)$; здесь A^* — транспонированная матрица. Векторы e, g, e^*, g^* можно считать нормированными в соответствии с равенствами (2.24).

Подпространство E_0 — это корневое подпространство оператора A, отвечающее простым собственным значениям $e^{\pm i\varphi_0}$. Пространство E_0 является двумерным; в качестве его базиса могут использоваться векторы e и g. Пространство R^N может быть представлено в виде $R^N = E_0 \oplus E^0$, где E^0 — дополнительное инвариантное для A подпространство размерности $N - 2$.

Равенство $R^N = E_0 \oplus E^0$ определяет операторы проектирования $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ так, что $P^0 = I - P_0$, а оператор P_0 может быть представлен в виде $P_0 x = (x, e^*)e + (x, g^*)g$; последнее следует из того, что по предположению векторы e, g, e^*, g^* выбраны в соответствии с равенствами (2.24).

Центральное многообразие W_c системы (1.2) в рассматриваемом случае P3 естественно строить в виде равенства (2.26) (применительно к рассматриваемой ситуации), в котором функция $\psi(u)$ определяется равенством (2.27).

Из лемм 3 и 4, а также из формул (3.6) и (3.7) следует, что верна

Теорема 9. *Пусть матрица A имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i\varphi_0}$, где $0 < \varphi_0 < \pi$, а модули остальных ее собственных значений не равны единице. Тогда центральное многообразие W_c системы* (1.2) *может быть описано равенством* (2.26), *в котором $\psi(u)$ — функция* (2.27), *а функции $\psi_2(u)$ и $\psi_3(u)$ определяются равенствами* (3.6) *и* (3.7).

Полученные в настоящей статье результаты относительно исследования системы (1.2) являются развитием результатов, приведенных в [14] относительно построения центральных многообразий дискретных динамических систем. Отметим в этой связи, что в указанной работе, в частности, приведена детальная схема расчета функций (3.6) и (3.7).

4. Заключение

В статье предложены новые приближенные формулы и алгоритмы построения центральных многообразий в окрестностях негиперболических точек равновесия динамических систем с непрерывным и дискретным временем (системы (1.1) и (1.2)). Предлагаемые подходы позволяют получить аппроксимации центрального многообразия в терминах исходных систем. Предлагаемая схема носит общий характер и в том смысле, что она применима к ситуациям, когда матрица линеаризации имеет произвольный порядок вырождения. Основные утверждения для непрерывных динамических систем приведены в теоремах 3 и 4, для дискретных динамических систем — в теоремах 7–9.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В Приложении приводятся доказательства лемм 2 и 4, а также теорем 3 и 8.

Доказательство леммы 2.

Справедливость этой леммы можно установить как следствие аналогичного утверждения, приведенного в [12, стр. 211–212]. Пусть для простоты все собственные значения λ_j матрицы A являются полупростыми. Будем рассматривать оператор (2.9) в более широком (чем F_p) линейном пространстве H_p однородных порядка p функций $h(x)$, определенных и принимающих значения в R^N. В [12] показано, что спектр оператора $L: H_p \to H_p$ совпадает с множеством чисел вида

$$\mu = p_1\lambda_1 + \ldots + p_N\lambda_N - \lambda_j, \tag{П.1}$$

где $p = p_1 + \ldots + p_N$. Оператор $L: F_p \to F_p$ является сужением оператора $L: H_p \to H_p$. Несложно показать, что для оператора $L: F_p \to F_p$ в (П.1) в сумме $p_1\lambda_1 + \ldots + p_N\lambda_N$ следует брать только слагаемые, отвечающие чисто мнимым собственным значениям матрицы A, а в качестве λ_j — только остальные собственные значения матрицы A. Тогда $\mu \neq 0$ и, следовательно, оператор $L: F_p \to F_p$ обратим.

Доказательство теоремы 3.

В условиях этой теоремы векторы $u \in E_0$ можно задавать равенством $u = \varepsilon e$, где $Ae = 0$ и, следовательно, $Au = 0$. Поэтому действующий в пространстве F_p линейный оператор (2.9) здесь принимает вид $L\psi(u) = -A\psi(u)$. Далее, произвольный элемент $\psi(u) \in F_p$ здесь представим в виде $\psi(u) = \varepsilon^p v$, где $v = \psi(e) \in E^0$. Несложно видеть, что для $\psi(u) = \varepsilon^p v$ имеет место равенство $L^{-1}\psi(u) = \varepsilon^p B_0^{-1} v$ (напомним, что в силу леммы 2 оператор L обратим). Отсюда и из общих формул (2.11) и (2.12) получим равенства (2.23).

Доказательство леммы 4.

Для доказательства этой леммы приведем сначала вспомогательные построения (аналоги построений, приведенных в [12, стр. 211–212]. Рассмотрим линейный оператор (3.5) в более широком (чем F_p) линейном пространстве H_p однородных порядка p функций $h(x)$, определенных и принимающих значения в R^N. Пусть для простоты оператор A диагональный и $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ — множество его собственных значений; через e_j обозначим собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_j.

Пусть $p = p_1 + \ldots + p_N$, где p_j — целые неотрицательные числа. Для вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^N$ определим многочлен $x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_N^{p_N}$.

Лемма 5. *Спектр оператора $J: H_p \to H_p$ совпадает с множеством чисел вида*

$$\mu = \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\ldots\lambda_N^{p_N} - \lambda_j, \tag{П.2}$$

а векторы $x^p e_j$ являются соответствующими собственными векторами.

Справедливость этого утверждения вытекает из равенства

$$Jh(x) = h(Ax) - Ah(x) = (\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\dots\lambda_N^{p_N} - \lambda_j)x^p e_j,$$

в котором $h(x) = x^p e_j$.

Вернемся к доказательству леммы 4. Оператор $J : F_p \to F_p$ является сужением оператора $J : H_p \to H_p$. Несложно показать, что для оператора $J : F_p \to F_p$ в равенстве (П.2) в произведении $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\dots\lambda_N^{p_N}$ следует брать только сомножители, отвечающие собственным значениям оператора A, равным единице по модулю. При этом в качестве λ_j следует брать только остальные собственные значения оператора A. Тогда $\mu \neq 0$ и, следовательно, оператор $J : F_p \to F_p$ обратим.

Доказательство теоремы 8.

В условиях этой теоремы векторы $u \in E_0$ можно задавать равенством $u = \varepsilon e$, где $Ae = -e$. Произвольный элемент $\psi(u) \in F_p$ здесь представим в виде $\psi(u) = \varepsilon^p v$, где $v = \psi(e) \in E^0$. Поэтому действующий в пространстве F_2 линейный оператор (3.5) здесь принимает вид $J\psi(u) = \varepsilon^2(I - A)v$, а в пространстве F_3 — вид $J\psi(u) = -\varepsilon^3(I + A)v$. Следовательно, для $\psi(u) = \varepsilon^2 v \in F_2$ имеет место равенство $J^{-1}\psi(u) = \varepsilon^2 B_1^{-1} v$, а для $\psi(u) = \varepsilon^3 v \in F_3$ — равенство $J^{-1}\psi(u) = \varepsilon^3 B_2^{-1} v$. Отсюда и из формул (3.6) и (3.7) получим равенства (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004.
2. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьют. исслед., 2009.
3. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
4. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.
5. *Kelley A.* The stable, center-stable, center-unstable, unstable manifolds // J. Diff. Equat. 1967. No. 3. P. 546–570.
6. *Vanderbauwhede A.* Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations // Dynam. Reported. 1989. V. 2. P. 89–169.
7. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer. 1998.
8. *Шошитайшвили А.Н.* Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки // Тр. семинаров им. И.Г. Петровского. 1975. Вып. 1. С. 279–309.
9. *Никульчев Е.В.* Качественное исследование управляемых систем с нелинейной динамикой на центральном многообразии // Вестн. МГАПИ. Естеств. и техн. науки. 2006. № 1. С. 150–161.
10. *Никульчев Е.В.* Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным. М.: МГУП, 2007.
11. *Hamzi B., Kang W., Krener A.J.* Control of center manifolds // Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control. V. 3. Maui, HI, 2003. P. 2065–2070.

12. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
13. *Юмагулов М.Г., Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф.* Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфим. мат. журн. 2018. Т. 10. № 1. С. 25–49.
14. *Юмагулов М.Г., Фазлытдинов М.Ф.* Бифуркационные формулы и алгоритмы построения центральных многообразий дискретных динамических систем // Изв. вузов. Математика. 2019. № 3. С. 71–89.
15. *Qesmi R., Ait Babram M., Hbid M.L.* Symbolic computation for center manifolds and normal forms of Bogdanov bifurcation in retarded functional differential equations // Nonlinear Anal. 2007. V. 66. P. 2833–2851.
16. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Н. Соболевским.

Поступила в редакцию 31.12.2018

После доработки 04.05.2019

Принята к публикации 18.07.2019