Автоматика и телемеханика, № 1, 2020

Стохастические системы

© 2020 г. **М.А. ГОРЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (griefer@ccas.ru),**
Ф.И. ЕРЕШКО, д-р техн. наук (fereshko@yandex.ru)
(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва)

ИНФОРМИРОВАННОСТЬ И ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ (СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ)

Рассматривается задача принятия решений в условиях риска. Предполагается, что лицо, принимающее решение, может обработать лишь ограниченный объем информации о неопределенном факторе и ориентируется на математическое ожидание своего выигрыша. Сравнивается два способа управления. В одном из них решение принимается централизованно. Во втором оперирующая сторона передоверяет часть своих полномочий по выбору решений нескольким агентам. При этом предполагается, что оперирующая сторона знает интересы агентов и рассчитывает на их рациональное поведение, а в остальном осторожна по отношению к неопределенности их выбора.

Ключевые слова: принятие решений в условиях риска, информационная теория иерархических систем, децентрализация управления.

DOI: 10.31857/S0005231020010043

1. Введение

Актуальность задачи выбора оптимальной структуры системы управления сложным объектом (производством, транспортом, войсками и т.п.) вряд ли может вызывать сомнение. Поэтому неудивительно и стремление построить математические модели, описывающие такой выбор. Было предложено несколько альтернативных подходов к моделированию [1–5], однако приходится констатировать, что пока вопросов больше, чем ответов. Видимо, это в значительной степени связано с тем, что пока не удается отделить существенные черты моделируемого объекта от многих второстепенных деталей.

В данной статье исследуется зависимость оптимальной структуры системы управления от объема доступной информации о внешнем неопределенном факторе. Впервые на эту зависимость обратили внимание Ю.Б. Гермейер и Н.Н. Моисеев в начале семидесятых годов прошлого века [6–8]. Первая формальная модель такого рода была построена в [9]. Прикладной смысл этого исследования — создание математического аппарата для анализа упрощенных моделей, позволяющих делать качественные выводы и, что самое главное, формировать на модельном уровне представление о предмете исследований у лиц, принимающих решения. Более подробно о деталях используемого подхода и об исходных содержательных предпосылках можно прочесть во введении к цитированной статье.

Построенная модель позволяет получить качественные выводы, хорошо согласующиеся с содержательными представлениями об управлении в условиях неопределенности. Это дает основание говорить о том, что модель верно отражает какие-то существенные черты описываемого объекта. Однако эти выводы получены при довольно жестких предположениях. Поэтому естественно возникает вопрос о том, насколько полученные выводы зависят от сделанных предположений. Есть и другой, чисто утилитарный, вопрос: насколько зависит от этих предположений возможность математического исследования построенной модели? Этим двум вопросам и посвящена в значительной степени данная статья.

Основные гипотезы статьи [9] сохранены. Изменено лишь предположение об отношении лица, принимающего решения, к неопределенности. В [9] оно предполагалось осторожным. Далее считается, что на множестве неопределенных факторов задана вероятностная мера и лицо, принимающее решение, склонно ориентироваться на математическое ожидание своего выигрыша по этой мере. Такое предположение в прикладных исследованиях, разумеется, нуждается в дополнительном обосновании, однако оно весьма распространено, а в западной литературе, пожалуй, даже более популярно, чем принцип максимального гарантированного результата. Отметим, что в данной статье не используются результаты типа закона больших чисел, поэтому все вероятности можно рассматривать как субъективные, что существенно облегчает обоснование адекватности подобного рода моделей. Исследование моделей в новых предположениях оказывается более сложным и требует привлечения иного математического аппарата. Однако решить соответствующие задачи удается в достаточной общности.

Как и в [9], задача поиска оптимальной структуры иерархической системы не ставится. Вместо этого на качественном уровне производится сравнение двух схем управления: централизованной и децентрализованной.

2. Объект управления

Рассмотрим следующую модель управляемой системы. Оперирующая сторона может по своему усмотрению выбирать любое управление w из множества W. Помимо этого выбора на результат управления влияет еще некий неопределенный фактор α из множества A, значение которого оперирующая сторона не контролирует. Эффективность управления оценивается значением $g(w, \alpha)$ функции $g : W \times A \to \mathbb{R}$ (как обычно $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел).

Будем считать, что на множестве A задана вероятностная мера $\wp$, известная оперирующей стороне. В дальнейшем будем предполагать, что оперирующая сторона риск-нейтральна по отношению к этой неопределенности, т.е. ориентируется на математическое ожидание своего выигрыша.

Примем еще одно предположение, отражающее представление "технологической структурированности" рассматриваемой управляемой системы. Будем считать, что множество W представимо в виде декартова произведения $W = U \times V^1 \times \ldots \times V^n$. Тогда всякий элемент $w \in W$ может быть записан в виде $w = (u, v^1, \ldots, v^n)$, где $u \in U$, $v^i \in V^i$, $i = 1, \ldots, n$. Такую форму записи там, где она удобна, будем использовать без особых оговорок.

Сделаем следующие стандартные предположения. Будем предполагать, что на множествах $u \in U$, $v^i \in V^i$, $i = 1, \ldots, n$, и A заданы топологии, в которых эти множества компактны. Функцию g будем считать непрерывной в топологии декартова произведения $U \times V^1 \times \ldots \times V^n \times A$. Меру $\wp$ будем считать борелевской.

Замечание 1. Вероятно, эти предположения можно ослабить без потери всех результатов, полученных далее. Однако это приводит к необходимости более аккуратных и, как следствие, более длинных рассуждений. Поскольку не очень понятно, могут ли найтись интерпретации данной модели, в которых эти предположения будут ограничительными, вдаваться в эти технические детали пока не станем.

Топологии на множествах $u \in U$, $v^i \in V^i$, $i = 1, \ldots, n$ индуцируют топологию на их произведении $W = U \times V^1 \times \ldots \times V^n$. В дальнейшем, когда речь зайдет о топологии на множестве W, будем иметь в виду именно топологию произведения.

Согласно теореме Тихонова [10, стр. 217], множество W будет компактным.

3. Модель централизованного управления

Допустим, оперирующая сторона не имеет никакой дополнительной информации о реализовавшемся значении неопределенного фактора α. Если она зафиксирует управление $w \in W$, то математическое ожидание ее выигрыша составит

$$\mathrm{M}g(w, \alpha) = \int\limits_A g(w, \alpha)\wp(d\alpha).$$

При оптимальном выборе управления w она получит результат равный

$$R_0(0) = \max_{w \in W} \int\limits_A g(w, \alpha)\wp(d\alpha).$$

Рассмотрим другой крайний случай. Предположим, в момент принятия решения оперирующей стороне становится точно известно реализовавшееся значение неопределенного фактора α. Тогда она может выбрать управление w так, чтобы получить выигрыш, равный $\max\limits_{w \in W} g(w, \alpha)$. Соответственно математическое ожидание выигрыша составит

$$R_0(\infty) = \int\limits_A \max_{w \in W} g(w, \alpha)\wp(d\alpha).$$

В данной статье основной интерес будет представлять промежуточный случай. Пусть оперирующая сторона имеет возможность получать информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора, но объем информации, которую она способна получить и своевременно обработать, ограничен. А именно, будем считать, что оперирующая сторона может использовать l бит информации и других ограничений на использование информации нет.

Формализуется сказанное следующим образом. Введем обозначение. Здесь и далее $\Phi(X, Y)$ будет обозначать семейство всех функций, отображающих множество X в множество Y.

Сделанное предположение означает, что вся информация о неопределенном факторе, доступная оперирующей стороне, может быть закодирована словами $s = (s_1, \ldots, s_l)$ из нулей и единиц длины l. Множество $\{0,1\}^l$ (декартову степень множества $\{0,1\}$) обозначим буквой S. Поскольку ограничений на доступ к информации о неопределенном факторе у оперирующей стороны нет, выбор "способа кодировки" $P : A \to S$ — это ее прерогатива. Кроме того, в зависимости от полученной информации $s \in S$ оперирующая сторона вправе выбрать любое управление $w \in W$. Т.е., по сути, она может выбирать функцию $w_* : S \to W$. Если оперирующая сторона зафиксирует способ кодировки $P \in \Phi(A, S)$ и правило выбора управления $w_* \in \Phi(S, W)$ и реализуется значение неопределенного фактора $\alpha \in A$, то оперирующая сторона получит сообщение $P(\alpha)$, выберет управление $w_*(P(\alpha))$ и ее выигрыш составит $g(w_*(P(\alpha)), \alpha)$.

В таком случае математическое ожидание выигрыша будет равно $\int\limits_A g(w_*(P(\alpha)), \alpha) \wp(d\alpha)$, а при наилучшем выборе стратегии (w_*, P) из множества $\Phi(S, W) \times \Phi(A, S)$ результат составит

$$R_0(l) = \sup_{(w_*, P) \in \Phi(S,W) \times \Phi(A,S)} \int\limits_A g(w_*(P(\alpha)), \alpha) \wp(d\alpha).$$

Замечание 2. Можно представить себе ситуацию, когда функция w_* выбрана так, что функция $g(w_*(P(\alpha)), \alpha)$ будет неизмеримой. Поэтому данная постановка задачи требует некоторого уточнения. Возможны, по меньшей мере, два способа такого уточнения: либо можно понимать интеграл в определении величины $R_0(l)$ как нижний интеграл, либо можно ограничить класс стратегий оперирующей стороны множеством измеримых функций (по отношению к алгебре всех подмножеств конечного множества S). И тот, и другой подход методологически оправдан. Из дальнейшего будет видно, что при обоих подходах и в задаче этого раздела, и в задаче раздела 4 получается один и тот же результат. Это можно рассматривать как некий аргумент в пользу рассматриваемых постановок. В дальнейшем, дабы не уклоняться от сути дела, на подобного рода технических проблемах, если они решаются стандартными способами, акцент делаться не будет.

Упростим формулу, определяющую величину $R_0(l)$. Фиксируем функцию $w_* \in \Phi(S, W)$. Она принимает $m = 2^l$ различных значений. Пусть множество этих значений есть $\{w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}\}$. Сообщение $s = (s_1, \ldots, s_l)$ можно рассматривать как двоичную запись $s_1 \ldots s_l$ натурального числа из множества $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Имея в виду такое отождествление, можно, не ограничивая общности, считать, что $w_*(s) = w_s$.

Если функция $w_* \in \Phi(S,W)$ фиксирована, то способ кодировки информации $P \in \Phi(A,S)$ разумно выбирать так, чтобы при каждом значении $\alpha \in A$ сообщение $r = P(\alpha)$ удовлетворяло условию $g(w_r,\alpha) = \max\limits_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s,\alpha)$. При таком выборе стратегии (w_*,P) математическое ожидание выигрыша будет равно $\int\limits_A \max\limits_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s,\alpha)\wp(d\alpha)$. А при наилучшем выборе функции w_* можно рассчитывать на получение ожидаемого результата $\max\limits_{(w_0,w_1,\ldots,w_{m-1})\in W^m} \int\limits_A \max\limits_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s,\alpha)\wp(d\alpha)$.

Понятно, что приведенные рассуждения обратимы, поэтому справедлива следующая

Теорема 1. Имеет место равенство

$$R_0(l) = \max_{(w_0,w_1,\ldots,w_{m-1})\in W^m} \int\limits_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s,\alpha)\wp(d\alpha).$$

Замечание 3. Из стандартных теорем анализа следует, что функция $\max\limits_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s,\alpha)$ непрерывно зависит от $w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}$ и α, а функция $\int\limits_A \max\limits_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s,\alpha)\wp(d\alpha)$ непрерывно зависит от $w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}$. Поэтому внешний максимум в результирующем выражении для $R_0(l)$ достигается. Значит, достигается и верхняя грань в определении величины $R_0(l)$. Соответствующие технические рассуждения опускаем.

4. Модель децентрализованного управления

Рассмотрим другой способ управления той же системой.

Предположим, оперирующая сторона передает право выбора управлений v^i n агентам: агент с номером i получает право выбора управления $v^i \in V^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Выбор управления $u \in U$ оперирующая сторона (Центр) оставляет за собой.

Появление у агента i права влиять на ситуацию неизбежно влечет появление у него собственных целей. Процесс формирования этих целей сложен и мало изучен. В данной модели эти цели считаются заданными экзогенно. Будем предполагать, что цель агента i описывается стремлением к максимизации значения функции $h^i\left(u, v^i, \alpha\right)$. Существенным является то, что эта функция зависит от его собственного управления, управления Центра и неопределенного фактора, но не зависит от выборов остальных агентов.

Будем считать, что Центр по-прежнему имеет возможность получить и обработать l бит информации о неопределенном факторе α. Таким образом, стратегией центра является пара $(u_*,P) \in \Phi(S,U) \times \Phi(A,S)$ функций $u_* : S \to U$ и $P : A \to S$ (смысл этих конструкций тот же, что и в модели раздела 3). Предположим, что каждый из агентов в момент принятия решений имеет точную информацию об этом неопределенном факторе.

Допустим, Центр оставляет за собой право первого хода, т.е. он первым выбирает свою стратегию (u_*,P) и сообщает ее всем агентам.

В этих условиях агент i принимает решение в условиях полной определенности: он знает реализовавшееся значение неопределенного фактора α и управление $u_*\left(P\left(\alpha\right)\right)$, которое должен будет выбрать Центр. Поэтому если Центр знает функцию выигрыша h^i агента i, то он может рассчитывать на то, что в случае, когда реализуется значение неопределенного фактора α, этот агент выберет свое управление из множества

$$BR^i(u_*, P, \alpha) = \left\{ v^i \in V^i : \; h^i(u_*(P(\alpha)), v^i, \alpha) = \max_{v^i \in V^i} h^i(u_*(P(\alpha)), v^i, \alpha) \right\}.$$

Поскольку для i-го агента все выборы из этого множества равноценны, дальше уточнить множество возможных выборов агента у Центра нет.

Если Центр осторожен по отношению к такого рода неопределенностям, то при выборе стратегии (u_*, P) и реализовавшемся значении неопределенного фактора α он должен рассчитывать на выигрыш

$$\min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \dots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^1, \dots, v^n, \alpha\right).$$

Математическое ожидание этого выигрыша равно

$$\int\limits_A \min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \dots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g\left(u_*\left(P\left(\alpha\right)\right), v^1, \dots, v^n, \alpha\right) \wp\left(d\alpha\right),$$

и если считать Центр риск-нейтральным, он будет ориентироваться именно на этот результат. Тогда при оптимальном выборе своей стратегии он получит выигрыш

$$R_1\left(l\right) =$$

$$= \sup_{(u_*, P) \in \Phi(S,U) \times \Phi(A,S)} \int\limits_A \min_{v^1 \in BR^1(u_*, P, \alpha)} \dots \min_{v^n \in BR^n(u_*, P, \alpha)} g(u_*(P(\alpha)), v^1, \dots, v^n, \alpha) \wp(d\alpha).$$

Упростим и эту формулу с тем, чтобы избавиться от верхней грани по функциональному пространству. Вновь фиксируем множество значений $\{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ функции u_* и будем считать, что эти значения перенумерованы так, что $u_*(s) = u_s$.

Если агент i знает, что Центр выберет управление $u_s \in U$ и реализовалось значение неопределенного фактора α, то он выберет свое управление из множества

$$E^i(u_s, \alpha) = \left\{ v^i \in V^i : \; h^i(u_s, v^i, \alpha) = \max_{\omega^i \in V^i} h^i(u_s, \omega^i, \alpha) \right\}.$$

В таком случае Центр может гарантированно рассчитывать на получение выигрыша равного

$$\min_{v^1 \in E^1(u_s, \alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s, \alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha).$$

Естественно выбирать способ кодировки P так, чтобы каждому значению $\alpha \in A$ он ставил в соответствие сообщение u_r, удовлетворяющее условию

$$\min_{v^1 \in E^1(u_r,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_r,\alpha)} g(u_r, v^1, \dots, v^n, \alpha) =$$
$$= \max_{s=0,1,\dots,m-1} \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha).$$

Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1. При любом наборе $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$ функция

$$\varphi(\alpha) = \max_{s=0,1,\dots,m-1} \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \min_{v^2 \in E^2(u_s,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha)$$

$\wp$-измерима.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Лемма 1 позволяет заключить, что при фиксированной функции u_* со значениями $\{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ риск-нейтральный Центр должен ориентироваться на результат

$$\int_A \max_{s=0,1,\dots,m-1} \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \min_{v^2 \in E^2(u_s,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha) \wp(d\alpha).$$

А поскольку выбор значений $\{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ — это тоже право Центра, он может получить выигрыш, равный

$$\max_{(u_0,u_1,\dots,u_{m-1}) \in U^m} \int_A \max_{s=0,1,\dots,m-1} \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha) \wp(d\alpha).$$

Анализируя приведенные рассуждения, несложно убедиться, что на больший выигрыш Центр не может рассчитывать. Поэтому справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Имеет место равенство

$$R_1(l) =$$
$$= \max_{(u_0,u_1,\dots,u_{m-1}) \in U^m} \int_A \max_{s=0,1,\dots,m-1} \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha) \wp(d\alpha).$$

Для удобства сравнения централизованной и децентрализованной схем управления рассмотрим те же два крайних случая, что и в разделе 3.

Случай, когда Центр не имеет информации о неопределенном факторе, вполне вкладывается в рассмотренную схему. Если Центр получает $l = 0$ бит информации, то количество разных сообщений, которое он может получить, равно $m = 2^l = 1$, и множество $S = \{0, 1\}^0$ состоит из одной точки. При этих соглашениях определение величины $R_1(0)$ и утверждение теоремы 2 оказываются корректными и для величины $R_1(0)$ можно получить выражение

$$R_1(0) = \max_{u \in U} \int_A \min_{v^1 \in E^1(u,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u,\alpha)} g(u, v^1, \dots, v^n, \alpha) \wp(d\alpha).$$

Случай, когда Центр имеет точную информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора, формально не вкладывается в рассмотренную схему, но может быть рассмотрен аналогично.

В этом случае стратегиями Центра являются произвольные функции $u_{\#} : A \to U$. При фиксированной стратегии $u_{\#} \in \Phi\left(A, U\right)$ и значении неопределенного фактора $\alpha \in A$ агент i выберет свое управление из множества

$$Br^i\left(u_{\#}, \alpha\right) = \left\{ v^i \in V^i : \; h^i\left(u_{\#}\left(\alpha\right), v^i, \alpha\right) = \max_{v^i \in V^i} h^i\left(u_{\#}\left(\alpha\right), v^i, \alpha\right) \right\}.$$

Поэтому осторожный Центр может рассчитывать на результат

$$\min_{v^1 \in Br^1\left(u_{\#}, \alpha\right)} \ldots \min_{v^n \in Br^n\left(u_{\#}, \alpha\right)} g\left(u_{\#}\left(\alpha\right), v^1, \ldots, v^n, \alpha\right),$$

математическое ожидание которого равно

$$\int_A \min_{v^1 \in Br^1\left(u_{\#}, \alpha\right)} \ldots \min_{v^n \in Br^n\left(u_{\#}, \alpha\right)} g\left(u_{\#}\left(\alpha\right), v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \wp\left(d\alpha\right),$$

и для величины $R_1\left(\infty\right)$ получим определение

$$R_1(\infty) = \sup_{u_{\#} \in \Phi(A, U)} \int_A \min_{v^1 \in Br^1(u_{\#}, \alpha)} \ldots \min_{v^n \in Br^n(u_{\#}, \alpha)} g(u_{\#}(\alpha), v^1, \ldots, v^n, \alpha) \wp(d\alpha).$$

Рассуждения, вполне аналогичные доказательству теоремы 2, позволяют получить для этой величины выражение

$$R_1\left(\infty\right) = \int_A \max_{u \in U} \min_{v^1 \in E^1(u, \alpha)} \ldots \min_{v^n \in E^n(u, \alpha)} g\left(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \wp\left(d\alpha\right).$$

5. Сравнение централизованного и децентрализованного способов управления

Для любого l имеет место неравенство $R_0\left(l\right) \leqslant R_0\left(\infty\right)$.

В самом деле, рассмотрим отображение $\psi : \Phi(S, W) \times \Phi(A, S) \to \Phi(A, W)$, ставящее в соответствие паре функций (w_*, P) их композицию $w_{\#} = w_* \circ P$. Тогда для любого $\alpha \in A$ будем иметь $g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right), \alpha\right) = g\left(w_{\#}\left(\alpha\right), \alpha\right)$ и, следовательно, $\int_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right), \alpha\right) \wp\left(d\alpha\right) = \int_A g\left(w_{\#}\left(\alpha\right), \alpha\right) \wp\left(d\alpha\right)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем стратегию (w_*, P) так, что

$$\int_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right), \alpha\right) \wp(d\alpha) \geqslant \sup_{(w_*, P) \in \Phi(S, W) \times \Phi(A, S)} \int_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right), \alpha\right) \wp(d\alpha) - \varepsilon.$$

Тогда для соответствующей функции $w_{\#} = w_* \circ P$ будем иметь

$$R_0\left(l\right) - \varepsilon = \sup_{(w_*, P) \in \Phi(S, W) \times \Phi(A, S)} \int_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right), \alpha\right) \wp(d\alpha) - \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\wp\left(d\alpha\right) = \int\limits_A g\left(w_\#\left(\alpha\right),\alpha\right)\wp\left(d\alpha\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{w_\# \in \Phi(A,U)} \int\limits_A g\left(w_\#\left(\alpha\right),\alpha\right)\wp\left(d\alpha\right) = R_0\left(\infty\right).$$

В силу произвольности ε отсюда получается неравенство $R_0\left(l\right) \leqslant R_0\left(\infty\right)$.

Далее, для любого l справедливо неравенство $R_0\left(l\right) \leqslant R_0\left(l+1\right)$.

Для доказательства рассмотрим отображения

$$\vartheta : \Phi\left(\{0,1\}^l, U\right) \to \Phi\left(\{0,1\}^{l+1}, U\right) \text{ и } \Theta : \Phi\left(A, \{0,1\}^l\right) \to \Phi\left(A, \{0,1\}^{l+1}\right),$$

определенные следующим образом. Пусть отображение ϑ ставит в соответствие функции $w_* : \{0,1\}^l \to U$ такую функцию $w_{**} : \{0,1\}^{l+1} \to U$, что при любом $s \in \{0,1\}^l$ выполняются равенства $w_{**}(s,0) = w_{**}(s,1) = w_*(s)$. А отображение Θ ставит в соответствие функции $P : A \to \{0,1\}^l$ такую функцию $P_* : A \to \{0,1\}^{l+1}$, что для любого $\alpha \in A$ имеет место равенство $P_*(\alpha) = (P(\alpha), 0)$. Непосредственно проверяется, что тогда для любого α справедливо равенство $g(w_{**}(P_*(\alpha)),\alpha) = g(w_*(P(\alpha)),\alpha)$, а значит,

$$\int\limits_A g(w_{**}(P_*(\alpha)),\alpha)\wp(d\alpha) = \int\limits_A g(w_*(P(\alpha)),\alpha)\wp(d\alpha).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем стратегию (w_*, P) так, что

$$\int\limits_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\wp(d\alpha) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{(w_*,P)\in\Phi\left(\{0,1\}^l,W\right)\times\Phi\left(A,\{0,1\}^l\right)} \int\limits_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\wp(d\alpha) - \varepsilon.$$

Тогда

$$R_0\left(l\right) - \varepsilon = \sup_{(w_*,P)\in\Phi\left(\{0,1\}^l,W\right)\times\Phi\left(A,\{0,1\}^l\right)} \int\limits_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\wp(d\alpha) - \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_A g\left(w_*\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\wp(d\alpha) = \int\limits_A g\left(w_{**}\left(P_*\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\wp(d\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(w_{**},P_*)\in\Phi\left(\{0,1\}^{l+1},W\right)\times\Phi\left(A,\{0,1\}^{l+1}\right)} \int\limits_A g\left(w_{**}\left(P_*\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\wp(d\alpha) = R_0\left(l+1\right).$$

В силу произвольности ε отсюда немедленно следует нужное неравенство $R_0\left(l\right) \leqslant R_0\left(l+1\right)$.

Практически дословно повторяя те же рассуждения, можно показать, что для любого l выполняются неравенства $R_1(l) \leqslant R_1(\infty)$ и $R_1(l) \leqslant R_1(l+1)$.

Установим еще одно неравенство. Очевидно, для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство

$$\max_{w \in W} g(w, \alpha) = \max_{u \in U} \max_{v^1 \in V^1} \ldots \max_{v^n \in V^n} g\left(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \geqslant$$
$$\geqslant \max_{u \in U} \min_{v^1 \in E^1(u,\alpha)} \ldots \min_{v^n \in E^n(u,\alpha)} g\left(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right).$$

Следовательно,

$$\int_A \max_{u \in U} \max_{v^1 \in V^1} \ldots \max_{v^n \in V^n} g\left(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \wp(d\alpha) \geqslant$$
$$\geqslant \int_A \max_{u \in U} \min_{v^1 \in E^1(u,\alpha)} \ldots \min_{v^n \in E^n(u,\alpha)} g\left(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) \wp(d\alpha).$$

Таким образом, $R_0(\infty) \geqslant R_1(\infty)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Имеет место равенство $\lim\limits_{l \to \infty} R_0(l) = R_0(\infty)$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Из леммы 2 следует, что если $R_0(\infty) > R_1(\infty)$, то при достаточно большом l выполняется неравенство $R_0(l) > R_1(\infty)$, а значит, $R_0(l) > R_1(l)$.

Рассмотрим два частных случая.

Начнем со случая, когда интересы Центра и агентов "идеально согласованы", т.е. имеет место равенство $g\left(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} h^i\left(u, v^i, \alpha\right)$. В этом случае в силу теоремы 2 имеем

$$R_1(l) = \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1}) \in U^m} \int_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} \max_{v_s^q \in V^1} \ldots \max_{v_s^n \in V^n} g(u_s, v_s^1, \ldots, v_s^n, \alpha) \wp(d\alpha),$$

или

$$R_1(l) = \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1}) \in U^m} \int_A \max_{\left(v_0^1, v_1^1, \ldots, v_{m-1}^0\right) \in (V^1)^m} \ldots$$
$$\ldots \max_{\left(v_0^n, v_1^n, \ldots, v_{m-1}^n\right) \in (V^n)^m} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(u_s, v_s^1, \ldots, v_s^n, \alpha) \wp(d\alpha).$$

А результат теоремы 1 может быть переписан в виде

$$R_0(l) = \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1}) \in U^m} \max_{\left(v_0^1, v_1^1, \ldots, v_{m-1}^1\right)} \ldots \max_{\left(v_0^n, v_1^n, \ldots, v_{m-1}^n\right)} \int_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha) \wp(d\alpha).$$

Отсюда видно, что в данном случае $R_0(l) \leqslant R_1(l)$ (так как "максимум суммы меньше суммы максимумов").

Рассмотрим противоположный случай, когда агенты “враждебны Центру”, т.е. справедливо равенство $g\left(u, v^1, \ldots, v^n, \alpha\right) = -\sum\limits_{i=1}^{n} h^i\left(u, v^i, \alpha\right)$. Тогда в силу теоремы 1

$$R_1(l) =$$

$$= \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1})\in U^m} \int\limits_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} \min_{v_s^q\in V^1} \min_{v_s^2\in V^2} \ldots \min_{v_s^n\in V^n} g(u_s, v_s^1, \ldots, v_s^n, \alpha)\wp\,(d\alpha).$$

Значит,

$$R_1(l) = \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1})\in U^m} \int\limits_A \min_{\left(v_0^1,v_1^1,\ldots,v_{m-1}^0\right)\in (V^1)^m} \cdots$$

$$\cdots \min_{\left(v_0^n,v_1^n,\ldots,v_{m-1}^n\right)\in (V^n)^m} \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(u_s, v_s^1, \ldots, v_s^n, \alpha)\wp\,(d\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1})\in U^m} \min_{\left(v_0^1,v_1^1,\ldots,v_{m-1}^0\right)\in (V^1)^m} \cdots$$

$$\cdots \min_{\left(v_0^n,v_1^n,\ldots,v_{m-1}^n\right)\in (V^n)^m} \int\limits_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(u_s, v_s^1, \ldots, v_s^n, \alpha)\wp\,(d\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(u_0,u_1,\ldots,u_{m-1})\in U^m} \max_{\left(v_0^1,v_1^1,\ldots,v_{m-1}^0\right)\in (V^1)^m} \cdots$$

$$\cdots \max_{\left(v_0^n,v_1^n,\ldots,v_{m-1}^n\right)\in (V^n)^m} \int\limits_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(u_s, v_s^1, \ldots, v_s^n, \alpha)\wp\,(d\alpha) = R_0\,(l)\,.$$

Понятно, что все доказанные в этом разделе неравенства могут обращаться в равенство (например, если функция g постоянна). Однако “в типичном случае” все они обращаются в строгие неравенства.

Полученные результаты можно суммировать следующим образом.

Т е о р е м а 3. *При фиксированном объеме доступной информации l могут выполняться как неравенство $R_0\,(l) > R_1(l)$, так и противоположное неравенство $R_1\,(l) > R_0\,(l)$. Однако при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно больших l имеет место неравенство $R_0\,(l) > R_1(l) - \varepsilon$, а в типичном случае при достаточно больших l справедливо и неравенство $R_0\,(l) > R_1(l)$.*

Таким образом, при малых объемах доступной оперирующей стороне информации в случае, когда интересы агентов “хорошо согласованы” с интересами Центра, выгоднее децентрализованный способ управления, а в случае, когда интересы агентов “плохо согласованы” с интересами Центра, выгодна централизация управления. А при больших объемах доступной оперирующей стороне информации всегда выгоднее централизованный способ управления.

6. Заключение

Вполне естественные предположения, принятые при построении модели, приводят к хорошо интерпретируемым качественным выводам. А получившиеся математические задачи имеют достаточно конструктивные решения.

Разумеется, трудно говорить о непосредственном применении построенных моделей на практике. Но, благодаря своей абстрактности, эти модели имеют высокую степень общности. И в описанную схему можно вложить многие более конкретные модели. Кроме того, какие-то из принятых гипотез можно варьировать, что открывает широкое поле для дальнейших исследований. Кроме направлений, отмеченных в заключении в [9], стохастическая постановка допускает еще одно видоизменение, быть может даже более интересное. Речь идет о следующем.

В данной статье использовалось осреднение выигрыша оперирующей стороны и жесткое гарантированное ограничение на объем обрабатываемой ею информации. В самом деле, по постановке оперирующая сторона независимо от реализовавшегося значения неопределенного фактора получает сообщение длины l. Наверное, даже более естественно требовать, чтобы все сообщения кодировались словами, длина которых не превосходит l. Но при таком ограничении это почти ничего не меняет по существу.

Можно ограничение сформулировать иначе. Допустим, что сообщения кодируются словами разной длины, и требуется, чтобы математическое ожидание длины получаемого оперирующей стороной сообщения не превосходило заданной величины. Тогда можно существенно выиграть за счет того, что часто встречающиеся сообщения будут кодироваться короткими словами, а длинные слова будут использоваться для сообщения о редких событиях.

Эта идея впервые была использована в теории передачи информации К. Шенноном. Пионерские работы Шеннона дали толчок большому числу исследований. В результате этого были получены важные результаты, далеко выходящие за рамки теории передачи информации. В задачах принятия решений аналогичные постановки, по-видимому, до сих пор не исследовались.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Для удобства будем использовать терминологию из книги [11] и только те утверждения, которые явно сформулированы в ней на с. 272 и с. 283.

Нужно доказать, что при любом c измеримо множество $\{\alpha \in A : \varphi(\alpha) < c\}$. Но

$$\{\alpha \in A : \varphi(\alpha) < c\} = \bigcap_{s=0}^{m-1} \left\{ \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha) < c \right\}.$$

Поэтому достаточно доказать, что при любом c измеримо множество

$$\left\{ \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \dots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \dots, v^n, \alpha) < c \right\},$$

т.е. при любом $u_s \in U$ измерима функция

$$\psi\,(\alpha) = \min_{v^1 \in E^1(u_s,\alpha)} \ldots \min_{v^n \in E^n(u_s,\alpha)} g(u_s, v^1, \ldots, v^n, \alpha).$$

Для упрощения формул введем обозначения $v = \big(v^1, \ldots, v^n\big)$, $V = \prod\limits_{i=1}^{n} V^i$ и рассмотрим функцию $h\,(u, v, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} h^i\,\big(u, v^i, \alpha\big)$. В силу специального вида функции h выполняется равенство $\psi\,(\alpha) = \min\limits_{v \in E(u_s,\alpha)} g(u_s, v, \alpha)$, где

$$E(u_s, \alpha) = \left\{ v \in V :\ h(u_s, v, \alpha) = \max_{\omega \in V} h(u_s, \omega, \alpha) \right\}.$$

Функция $\psi\,(\alpha)$ измерима тогда и только тогда, когда измерима функция $-\psi\,(\alpha)$, следовательно, достаточно доказать, что при любом c измеримо множество $C = \{\alpha \in A : -\psi\,(\alpha) < -c\} = \{\alpha \in A : \psi\,(\alpha) > c\}$. А поскольку мера $\wp$ предполагается борелевской, достаточно доказать, что это множество является открытым. Допустим противное. Тогда существует элемент $\alpha \in A$ и сходящаяся к нему последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ такие, что $\alpha \in C$, но $\alpha_k \notin C$, $k = 1, 2, \ldots$. Функция h является непрерывной, а множество $E\,(u_s, \alpha_k)$ задается условием типа равенства, поэтому оно замкнуто. А поскольку пространство V компактно, его замкнутое подмножество $E\,(u_s, \alpha_k)$ тоже является компактным. Значит, в некоторой точке $v_k \in E\,(u_s, \alpha_k)$ достигается минимум $\min\limits_{v \in E(u_s,\alpha_k)} g\,(u_s, v, \alpha_k)$. Так как по предположению $\alpha_k \notin C$, выполняется неравенство $g\,(u_s, v_k, \alpha_k) \leqslant c$.

Пространство V является компактным, поэтому последовательность $v_1, v_2, \ldots$ можно считать сходящейся к некоторому элементу $v_0 \in V$ (в противном случае можно перейти к подпоследовательности).

Фиксируем произвольное $\omega \in V$. Поскольку $v_k \in E\,(u_s, \alpha_k)$, выполняется неравенство $h\,(u_s, v_k, \alpha_k) \geqslant h\,(u_s, \omega, \alpha_k)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $h\,(u_s, v_0, \alpha) \geqslant h\,(u_s, \omega, \alpha)$. В силу произвольности ω отсюда следует, что $v_0 \in E\,(u_s, \alpha)$. А переходя к пределу в неравенстве $g\,(u_s, v_k, \alpha_k) \leqslant c$, получим $g\,(u_s, v_0, \alpha) \leqslant c$ и тем более $\psi\,(\alpha) = \min\limits_{v \in E(u_s,\alpha)} g\,(u_s, v, \alpha) \leqslant c$, что противоречит условию $\alpha \in C$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание 4. Для строгого обоснования результатов раздела 3 нужно доказать, что при всех $w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}$ измерима функция $\phi\,(\alpha) = \max\limits_{s=0,1,\ldots,m-1} g\,(w_s, \alpha)$. Это утверждение является частным случаем только что доказанной леммы. Действительно, рассмотрим модель, в которой множество V^i состоит из одной точки v^i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\varphi\,(\alpha) = \max\limits_{s=01,\ldots,m-1} g(u_s, v^1, \ldots, v^n, \alpha)$, и нужный результат только обозначением отличается от уже доказанного.

Доказательство леммы 2. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Для каждого $\alpha \in A$ можно выбрать $\omega(\alpha) \in W$ так, что $g(\omega(\alpha), \alpha) = \max_{\varpi \in W} g(\varpi, \alpha)$ и, значит, $g(\omega(\alpha), \alpha) > \max_{\varpi \in W} g(\varpi, \alpha) - \varepsilon$. Поэтому открытые множества

$$O(\omega) = \left\{ \alpha \in A : g(\omega, \alpha) > \max_{\varpi \in W} g(\varpi, \alpha) - \varepsilon \right\}$$

покрывают компактное множество A. Следовательно, можно выбрать конечный набор $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k$ элементов множества W так, что множества $O(\omega_0), O(\omega_1), \ldots, O(\omega_k)$ будут по-прежнему покрывать множество A. Значит, для любого $\alpha \in A$ будет выполняться условие

$$\max_{s=0,1,\ldots,k} g(\omega_s, \alpha) > \max_{\varpi \in W} g(\varpi, \alpha) - \varepsilon.$$

Если n выбрано так, что $m = 2^n \geqslant k$, то можно положить $w_s = \omega_s$ при $s \leqslant k$ и $w_s = \omega_k$ при $s > k$, и тогда будет

$$\max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha) > \max_{\varpi \in W} g(\varpi, \alpha) - \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha) \wp(d\alpha) > \int_A \max_{\varpi \in W} g(\varpi, \alpha) \wp(d\alpha) - \varepsilon = R_0(\infty) - \varepsilon$$

и тем более

$$R_0(l) = \max_{(w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}) \in W^m} \int_A \max_{s=0,1,\ldots,m-1} g(w_s, \alpha) \wp(d\alpha) > R_0(\infty) - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует утверждение леммы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Месарович М., Мако Д., Такаххара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
2. *Новиков Д.А.* Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003.
3. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003.
4. *Alonso R., Dessein W., Matouschek N.* When Does Coordination Require Centralization? // Amer. Econom. Rev. 2008. V. 98. P. 145–179.
5. *Melamud N., Mookherjee D., Reichelstein S.* Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts // Rand J. Econom. 1995. V. 26. P. 654–672.
6. *Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем / Пробл. прикл. мат. и механики. М.: Наука, 1971. С. 30–43.
7. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.

8. *Моисеев Н.Н.* Иерархические структуры и теория игр // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1973. № 6. С. 1–11.
9. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления // АиТ. 2019. № 6. С. 156–172.

   Gorelov V.A., Ereshko F.I. Awareness and Control Decentralization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 6. P. 1063–1076.
10. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
11. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 14.02.2019

После доработки 11.04.2019

Принята к публикации 25.04.2019