Автоматика и телемеханика, № 1, 2020

© 2020 г. Е.С. ПАЛАМАРЧУК, канд. физ.-мат. наук (e.palamarchuck@gmail.com)
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ НЕАВТОНОМНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУСТОРОННИМ ЦЕЛЕВЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ[1]

Рассматривается задача стохастического линейного регулятора на бесконечном интервале времени с двусторонним целевым функционалом и переменной матрицей диффузии. В двустороннем квадратичном целевом функционале пределы интегрирования имеют противоположный знак и зависят от длины интервала планирования. Показано, что при ограничениях на рост матрицы диффузии известный закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию будет являться оптимальным по критерию обобщенного долговременного среднего и его потраекторного аналога. Также проводится анализ вероятностного поведения оптимальной траектории развития системы.

Ключевые слова: стохастический линейный регулятор, двусторонний целевой функционал, переменная матрица диффузии.

DOI: 10.31857/S0005231020010055

1. Введение

Стохастические линейные регуляторы относятся к классу систем управления, имеющих важное теоретическое и практическое значение, см. [1, гл. 3]. При этом их динамика обычно рассматривается на положительной полуоси изменения параметра времени $t \in [t_0, T]$ и горизонте планирования $[t_0, T] \subseteq [0, +\infty)$. Вместе с тем, в теоретико-операторной перспективе, т.е. при возникновении бесконечномерных пространств состояний, см., например, [2], анализ эволюции систем может проводиться на всей числовой прямой, т.е. при $t \in (-\infty, +\infty)$, и постановка задач управления осуществляется на интервалах $[t_0 - T, t_0 + T]$, где $T \geqslant 0$, и затем $T \to +\infty$, см. [3, 4]. Кроме того, как подчеркивается в [5], существуют области приложений (обработка сигналов, статистическое оценивание, передача информации и др.), моделирование в которых также предполагает возможность значений независимой переменной $t \in (-\infty, +\infty)$. Опишем систему управления, исследуемую в данной статье. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан n-мерный случайный процесс X_t, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, описываемый уравнением

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t U_t dt + G_t dw_t, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена в рамках НИР “Теория и методы для компьютерного и математического моделирования и анализа общественных систем и процессов”, номер государственной регистрации АААА-Ф18-118021990120-2.

где A_t, B_t — ограниченные матрицы с зависящими от времени элементами; шумовые воздействия моделируются с помощью так называемого двустороннего винеровского процесса w_t, $t \in \mathbb{R}$, задаваемого обычным образом как $w_t = w_t^{(1)}$, $t \geqslant 0$, и $w_t = w_{-t}^{(2)}$, $t < 0$, при двух независимых d-мерных стандартных винеровских процессах $w_t^{(1)}$, $w_t^{(2)}$, $t \geqslant 0$, см., например, [6, с. 7]; множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ состоит из k-мерных квадратично интегрируемых случайных процессов U_t, $t \in \mathbb{R}$, согласованных с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_s, s \leqslant t\}$ ($\sigma(\cdot)$ — знак σ-алгебры), таких что существует решение уравнения (1), т.е., см., например, [3], процесс X_t, $t \in \mathbb{R}$, для которого почти наверное (п.н.) выполняется $X_t = X_s + \int_s^t A_\tau X_\tau\, d\tau + \int_s^t B_\tau U_\tau\, d\tau + \int_s^t G_\tau\, dw_\tau$ при всех $s \leqslant t$; G_t — матрица диффузии, о предположениях относительно ее элементов будет сказано далее, а здесь отметим, что в рассмотрение могут включаться ситуации как ограниченных параметров возмущений (например, постоянных $G_t \equiv G$ или затухающих $\|G_t\| \to 0$), так и нарастающих $\|G_t\| \to \infty$, $t \to \pm\infty$ ($\|\cdot\|$ — матричная евклидова норма).

Для $T > 0$ в качестве двустороннего целевого функционала на $[-T, T]$ определим случайную величину

$$J_{2T}(U) = \int\limits_{-T}^{T} (X_t' Q_t X_t + U_t' R_t U_t)\, dt, \tag{2}$$

где $U \in \mathcal{U}$ — допустимое управление; $Q_t \geqslant qI$, $R_t \geqslant \rho I$, $t \in \mathbb{R}$, — ограниченные симметричные матрицы, $q, \rho > 0$ — некоторые константы ($'$ — знак транспонирования, запись $A \geqslant B$ для матриц означает, что разность $A - B$ неотрицательно определена, I — единичная матрица).

Ранее задачи стохастического линейного регулятора на бесконечном интервале времени ($T \to +\infty$) с функционалом вида (2) рассматривались в [7] при управлении передачей информации в сетях, для приложений в инженерных системах — см. [8; 9, часть 13.2.10]. При этом в качестве критерия оптимальности использовалось долговременное среднее, т.е. $\limsup\limits_{T\to+\infty} \{\mathrm{E} J_{2T}/(2T)\} \to \inf\limits_{U\in\mathcal{U}}$. Очевидно, что при таком подходе не учитывается специфика изменения матрицы диффузии G_t во времени, например, ее неограниченность на бесконечности, как, например, в когнитивной модели [10], или ее вырождение, см. случай диффузии [11]. В данной статье для определения управлений, оптимальных в среднем на бесконечном интервале времени, предлагается критерий, который обобщает приведенный выше:

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{\mathrm{E} J_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}. \tag{3}$$

Более сильным (в вероятностном смысле) критерием, чем долговременное среднее, является потраекторное эргодическое, когда задача

$$\limsup_{T\to+\infty} \{J_{2T}/(2T)\} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$$

решается с вероятностью единица, см. [3]. При учете фактора воздействия на динамику системы переменной матрицы диффузии можно использовать потраекторное обобщенное долговременное среднее, когда ставится задача

$$(4)\qquad \limsup_{T\to+\infty} \frac{J_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \text{ с вероятностью единица.}$$

Следует отметить, что обобщенные долговременные средние также вводились в [12–14] для стохастического линейного регулятора с односторонним целевым функционалом, т.е. при интегрировании на $[0, T]$ в (2). Задачи с двусторонними функционалами рассматривались в [3, 4], а используемые там критерии оптимальности являлись стандартными для систем с ограниченными коэффициентами (упомянутые выше долговременное среднее и потраекторное эргодическое). При этом для элементов множества допустимых управлений предполагались выполненными условия конечности моментов соответствующих им процессов, точнее, $\sup_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{E}\|X_t\|^2 + \mathrm{E}\|U_t\|^2) < \infty$, см. [4], или же $\sup_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{E}\|X_t\|^4 + \mathrm{E}\|U_t\|^4) < \infty$, см. [3], а также эргодического среднего $\limsup_{T\to\infty}\{(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\|U_t\|^2\,dt\} < \infty$ в [4]. По сравнению с анализом, проведенным в [3, 4], в настоящей статье представляется ряд обобщений (для случая конечномерных систем управления). Во-первых, включается ситуация неограниченного изменения во времени матрицы диффузии ($\|G_t\| \to \infty$, $t \to \pm\infty$), и применяются новые критерии обобщенных долговременных средних (см. (3), (4)), учитывающие этот факт. Во-вторых, задачи (3) и (4) решаются для гораздо более широкого класса управляющих воздействий, чем было сделано в [3, 4]: достаточно потребовать существования решения (1) и квадратичной интегрируемости управлений, т.е. $\int_s^t \|U_\tau\|^2\,d\tau < \infty$, $-\infty < s \leqslant t < +\infty$. Важно подчеркнуть, что известная форма оптимальной стратегии в виде линейной обратной связи по состоянию, структура которой также включает решение уравнения Риккати (см., например, [1, 3, 4]), сохраняется и в рассматриваемом случае для (3) и (4). Для оптимальной траектории, соответствующей такому управлению, в [3] было выявлено свойство глобальной асимптотической устойчивости в среднем квадратичном. В данной статье будут получены более точные оценки изменений этого процесса во времени как в среднем квадратичном смысле, так и с вероятностью единица, в зависимости от коэффициентов матрицы диффузии, что представляется обобщением результата [15], где изучался скалярный стационарный процесс. Таким образом, цель данной статьи — нахождение управления U_t^*, оптимального в задачах (3) и (4), и исследование свойств соответствующей ему оптимальной траектории X_t^* при $t \to \pm\infty$. Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 2 вводятся основные предположения о параметрах системы управления (1)–(2) и решается задача (3). Раздел 3 посвящен проблеме потраекторной оптимальности U^* для задачи (4) и стохастическому анализу динамики траектории X^*. Кроме того, в разделе 3 приводятся примеры различных классов функций, которые могут описывать изменение матрицы диффузии G_t в рамках основных предположений. Заключение содержит выводы и информацию о направлении дальнейших исследований.

2. Оптимальность в среднем на бесконечном интервале времени

Сначала сформулируем предположения о коэффициентах (1)–(2), в рамках которых будут получены основные результаты.

Предположение $\mathcal{AB}$. *Пара матриц (A_t, B_t) является стабилизируемой при $t \in \mathbb{R}$.*

Стабилизируемость пары (A_t, B_t), см., например, [2, 4], означает существование ограниченной матрицы K_t с кусочно-непрерывными элементами, при которой матрица $\mathcal{A}_t = A_t + B_t K_t$ является экспоненциально устойчивой, $t \in \mathbb{R}$, т.е. соответствующая ей фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ допускает оценку $\|\Phi(t,s)\| \leqslant \kappa_0 e^{-\kappa(t-s)}$, $s \leqslant t$, $\kappa_0, \kappa > 0$ — константы. При этом, как известно, фундаментальная матрица определяется из решения задачи $\dfrac{\partial\Phi(t,s)}{\partial t} = \mathcal{A}_t\Phi(t,s)$, $\Phi(s,s) = I$. Далее формулируется предположение относительно параметров возмущений, т.е. матрицы G_t, $t \in \mathbb{R}$. Введем множество $\mathcal{T} = \{-\infty; +\infty; \pm\infty\}$ и запись $t \to \mathcal{T}$ будем использовать для сокращенного обозначения ситуаций $t \to -\infty$, $t \to +\infty$ или $t \to \pm\infty$.

Предположение $\mathcal{G}$. *Для элементов матрицы диффузии G_t выполняется одно из следующих условий*:

1) G_t — *ограничена при* $t \to \mathcal{T}$;

2) $\|G_t\| \to +\infty$, G_t — *дифференцируема, при этом* $d\ln\|G_t\|/dt \to 0$, $t \to \mathcal{T}$.

Необходимо подчеркнуть, что возможность выполнения условий 1, 2 для матрицы G_t зависит от того, на какой полуоси (положительной или отрицательной) изменяется параметр $t \in \mathbb{R}$. В частности, для $\|G_t\| = e^{\sqrt[m]{t}}$, где m — нечетное число, имеет место условие 1 при $t \to -\infty$ и условие 2 при $t \to +\infty$.

В условиях предположения $\mathcal{AB}$, см. [2, 4], существует управление

$$U_t^* = -R_t^{-1} B_t' \Pi_t X_t^*, \tag{5}$$

где ограниченная симметричная матрица $\Pi_t \geqslant pI$, $p > 0$ — константа, удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t + \Pi_t A_t + A_t'\Pi_t - \Pi_t B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t + Q_t = 0. \tag{6}$$

При подстановке (5) в (1) становится очевидно, что процесс X_t^*, $t \in \mathbb{R}$, является решением линейного стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$dX_t^* = (A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t) X_t^* dt + G_t dw_t \tag{7}$$

и представляет собой аналог процесса Орнштейна–Уленбека при $t \in \mathbb{R}$ в случае СДУ с переменными коэффициентами. При этом матрица $A_t^* = A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t$ — экспоненциально устойчива, см. [2, 4], а ряд других свойств X_t^*, $t \in \mathbb{R}$, устанавливается в лемме 1.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{G}$. Тогда решением (7) является процесс вида $X_t^* = \int_{-\infty}^t \Phi(t,s) G_s dw_s$, где $\Phi(t,s)$ — фундаментальная матрица, соответствующая экспоненциально устойчивой матрице $A_t^* = A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t$. При этом существует константа $c_G > 0$, такая что $E\|X_t^*\|^2 \leqslant c_G \max\{1, \|G_t\|^2\}$, $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство леммы 1, а также всех последующих утверждений вынесено в приложение. В следующей далее теореме 1 приводится результат об оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени управления U^*.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{G}$. Тогда закон управления U^*, задаваемый (5)–(7), *является решением задачи*

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{EJ_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \tag{8}$$

при этом

$$0 < \limsup_{T\to+\infty} \frac{EJ_{2T}(U^*)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} = \limsup_{T\to+\infty} \frac{\int\limits_{-T}^{T} tr(G_t'\Pi_t G_t)\, dt}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} < \infty, \tag{9}$$

где $\mathrm{tr}(\cdot)$ *— след матрицы.*

3. Потраекторная стохастическая оптимальность

В приводимых далее леммах 2 и 3 характеризуются асимптотические свойства траекторий процесса X_t^*, $t \in \mathbb{R}$. Знание этих свойств оказывается необходимым при исследовании стохастической оптимальности управления U^* в задаче (4).

Лемма 2. Пусть выполнены предположение $\mathcal{AB}$ и п. 2 предположения $\mathcal{G}$. Тогда существует константа $\bar{c} > 0$, такая что

$$\limsup_{t\to\mathcal{T}} \frac{\|X_t^*\|^2}{\|G_t\|^2 \ln|t|} < \bar{c} < \infty \quad \text{с вероятностью единица,}$$

где $|\cdot|$ — модуль скалярной переменной.

Приведенная в лемме 2 функция $h_t = \|G_t\|^2 \ln|t|$ является мажорантой, т.е. верхней функцией процесса X_t^*, см. [16, определение 1], при условии выполнения п. 2 предположения $\mathcal{G}$. Для ограниченной G_t, $t \geqslant 0$, результат о виде h_t был получен ранее в [16], частный случай скалярного стационарного процесса рассмотрен в [15].

Лемма 3. Пусть выполнены предположение $\mathcal{AB}$ и предположение $\mathcal{G}$. Если в п. 2 предположения $\mathcal{G}$ также $d\ln\|G_t\|/dt \cdot \ln|t| \to 0$, $t \to \mathcal{T}$, то

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\|X_{-T}^*\|^2 + \|X_T^*\|^2}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} = 0 \quad \text{с вероятностью единица.}$$

Соотношение в лемме 3 утверждает, что нормировка при помощи $\Gamma_T = \sqrt{\int_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt}$ как прошлых (X^*_{-T}), так и последующих (X^*_T) значений траектории обеспечит стремление результирующего процесса к нулю п.н. с ростом длины “окна” рассматриваемых наблюдений. Заданная таким образом функция Γ_T определяет среднеквадратичное отклонение компонент вектора интегральных шумовых воздействий за период $[-T,T]$, точнее, берется $\mathcal{Z}_T = \int_{-T}^{T} G_t dw_t$ и тогда $\mathrm{E}\|\mathcal{Z}_T\|^2 = \int_{-T}^{T}\|G_t\|^2\,dt$.

При анализе задачи (4) для случая $\|G_t\| \to \infty$, $t \to \mathcal{T}$, потребуется выполнение более сильного условия, чем сформулированное в п. 2 предположения $\mathcal{G}$.

Предположение $\mathcal{G}1$. *Пусть в п. 2 предположения $\mathcal{G}$ выполнено соотношение $d\ln\|G_t\|/dt \cdot \ln|t|(\ln\ln|t| + \ln\ln\|G_t\|) \to 0$, $t \to \mathcal{T}$, и при этом $\|G_t\|$ является монотонной функцией, $t \to \mathcal{T}$.*

Основным результатом данного раздела является утверждение теоремы 2 о потраекторной оптимальности управления U^*.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и предположение $\mathcal{G}1$. Если $\int_{-T}^{T}\|G_t\|^2\,dt \to \infty$, $T \to +\infty$, то оптимальный в среднем закон управления U^* будет также являться решением задачи с потраекторным критерием обобщенного долговременного среднего, т.е.

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{J_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T}\|G_t\|^2\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \text{ с вероятностью единица,} \tag{10}$$

при этом

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{J_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T}\|G_t\|^2\,dt} = \limsup_{T\to+\infty} \frac{EJ_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T}\|G_t\|^2\,dt} \qquad \text{п.н.} \tag{11}$$

Приведем примеры различных классов функций, описывающих динамику нормы матрицы диффузии G_t. Используемый далее знак отношения $f_t \sim g_t$ для двух скалярных неотрицательных функций f_t и g_t означает, что $0 < \lim_{t\to\pm\infty}(f_t/g_t) < \infty$.

Пример 1.

1. Степенное семейство $\|G_t\|^2 \sim |t|^{2\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}:$ при $\alpha \leqslant 0$ имеет место п. 1 предположения $\mathcal{G}$ и для $\alpha > 0$ — п. 2. Так как $d\ln\|G_t\|/dt \sim 1/|t|$, а $\ln\ln\|G_t\| \sim \ln|t|$, то соотношение в предположении $\mathcal{G}1$ возникает при любом числе α. При этом условия теоремы 2 будут выполнены для $\alpha \geqslant -1/2$.

2. Логарифмическое семейство $\|G_t\|^2 \sim \ln^{2\alpha}|t|$, $\beta \in \mathbb{R}:$ если $\beta \leqslant 0$, то имеет место п. 1 предположения $\mathcal{G}$ и при $\beta > 0$ — п. 2. В силу того что $d\ln\|G_t\|/dt \sim 1/(|t|\ln|t|)$, а функция $\ln\ln\|G_t\| \sim \ln\ln|t|$, требование предположения $\mathcal{G}1$ выполняется при любом β. Также для каждого $\beta \in \mathbb{R}$ будут выполнены условия теоремы 2.

3. Экспоненциальное семейство $\|G_t\|^2 \sim e^{|t|^\mu}$, $\mu < 1$: при $\mu \leqslant 0$ имеет место п. 1 предположения $\mathcal{G}$ и для $\mu > 0$ — п. 2. Также $d \ln \|G_t\|/dt \sim |t|^{\mu-1}$ и $\ln \ln \|G_t\| \sim |t|^\mu$, т.е. соотношение из предположения $\mathcal{G}1$ следует при любом $0 < \mu < 1$. Очевидно, что условия теоремы 2 выполняются при каждом $\mu < 1$.

4. Заключение

В статье рассмотрена задача стохастического линейного регулятора на бесконечном интервале времени с двусторонним целевым функционалом и переменной матрицей диффузии G_t. В двустороннем квадратичном целевом функционале $J_{2T}(U)$, см. (2), пределы интегрирования имеют противоположный знак и зависят от длины интервала планирования, т.е. $t \in [-T, T]$ в (2), а затем $T \to +\infty$. Показано, что в рамках стандартного условия стабилизируемости детерминированной системы (см. предположение $\mathcal{AB}$) и ограничениях на рост матрицы диффузии, см. предположения $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}1$, известный закон управления U^* в виде линейной обратной связи по состоянию (5)–(7) будет являться оптимальным по критерию обобщенного долговременного среднего (теорема 1) и его потраекторного аналога (теорема 2). Также в статье проведен анализ асимптотического вероятностного поведения X_t^* — оптимальной траектории развития системы, см. уравнение (7). В частности, установлено, что верхняя граница изменений X_t^* в среднем квадратичном может быть определена в зависимости от $\|G_t\|$ (лемма 1). В потраекторной динамике найдена достаточная нормировка, обеспечивающая стремление значений процесса к нулю с вероятностью единица (см. лемму 3) и определяемая через статистическую характеристику (стандартное отклонение) вектора интегральных шумовых воздействий. В качестве направления дальнейших исследований можно выделить изучение задачи трекинга стохастической траектории, обобщая, например, случай модели [7], где эталонная траектория является гауссовским процессом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Так как $X_t^* = \Phi(t,0)\chi_t$, где $\chi_t = \int_{-\infty}^t \Phi(0,s)G_s dw_s$, то сначала требуется показать, что существует стохастический интеграл χ_t с бесконечным нижним пределом, а затем дифференцированием проверить, что X_t^* удовлетворяет (7). В силу определения двустороннего винеровского процесса $w_t = w_{-t}^{(2)}$, $t < 0$, где $w_\tau^{(2)}$ — стандартный винеровский процесс, $\tau \geqslant 0$, стохастическое исчисление для интегралов вида χ_t осуществляется по обычным правилам интегрирования по Ито, также см. [6, с. 13–14]. Для $t \geqslant 0$ процесс $X_t^* = \Phi(t,0)X_0^* + \int_0^t \Phi(t,s)G_s dw_s$, где $X_0^* = \chi_0$. Известно, см. [6, теорема 5.1, с. 54], что существование χ_t, $t \in \mathbb{R}$, связано с требованием $\mathrm{E}\|\chi_0\|^2 = \int_{-\infty}^0 \|\Phi(0,s)G_s\|^2\, ds < \infty$, которое выполняется в силу экспоненциальной устойчивости матрицы A_t^* и предположения $\mathcal{G}$. Действительно, $\|\Phi(0,s)\| \leqslant \kappa_0 e^{\kappa s}$, $s \leqslant 0$, и $\limsup_{s\to-\infty} \|G_s\|^2 e^{\gamma s} < \infty$ для любого $\gamma > 0$, тогда, выбирая $\gamma < 2\kappa$, имеем $\mathrm{E}\|\chi_0\|^2 < \infty$. Далее находим, что

$$\text{(П.1)} \qquad \mathrm{E}\|X_t^*\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{t} \operatorname{tr}\{\Phi(t,s)G_sG_s'\Phi'(t,s)\}\, ds \leqslant c \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-2\kappa(t-s)}\|G_s\|^2\, ds,$$

где $\mathrm{tr}(\cdot)$ — след матрицы, здесь и далее в качестве c обозначена некоторая положительная константа, конкретное значение которой несущественно и может меняться от формулы к формуле. Из (П.1) следует, что при ограниченной G_t выражение для $\mathrm{E}\|X_t^*\|^2$ также будет ограничено, $t \in \mathbb{R}$. Если же $\|G_t\| \to +\infty$, $t \to \mathcal{T}$, то при помощи интегрирования по частям, по аналогии с проделанным в [14, лемма 1] для случая $t \to +\infty$, можно показать, что $\limsup_{t\to\mathcal{T}}(\mathrm{E}\|X_t^*\|^2/\|G_t\|^2) < \infty$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем управление $U \in \mathcal{U}$ и определим соответствующий ему процесс по (1). Пусть $x_t = X_t^* - X_t$, $u_t = U_t^* - U_t$, $\bar{x} = X_0^* - X_0$, тогда получается представление

$$J_{2T}(U^*) - J_{2T}(U) = \tag{П.2}$$

$$= 2x_T'\Pi_T X_T^* - 2x_{-T}'\Pi_{-T}X_{-T}^* - \int\limits_{-T}^{T}(x_t'Q_tx_t + u_t'R_tu_t)dt - 2\int\limits_{-T}^{T}x_t'\Pi_tG_tdw_t.$$

Для оценки (П.2) проводится анализ динамики x_t при $t \in [-T, T]$. По построению

$$dx_t = A_tx_tdt + B_tu_tdt. \tag{П.3}$$

Пусть сначала $t \in [0, T]$. Тогда рассмотрение (П.3) с начальным условием $x_0 = \bar{x}$ и предположение $Q_t \geqslant qI$ приводят к решению (П.3) вида $x_T = \bar{\Phi}(T,0)\bar{x} + \int_0^T \bar{\Phi}(T,t)(\bar{k}\sqrt{Q_t}x_t + B_tu_t)dt$, где $\bar{\Phi}(t,s)$ — фундаментальная матрица, соответствующая экспоненциально устойчивой матрице $\bar{A}_t = A_t - \bar{k}\sqrt{Q_t}$ при некоторой константе $\bar{k} > 0$. Оценка приведенного выше соотношения дает

$$\|x_T\|^2 \leqslant \bar{c}e^{-\bar{\kappa}T}\|\bar{x}\|^2 + \bar{c}\int\limits_0^T e^{-\bar{\kappa}(T-s)}(x_s'Q_sx_s + u_s'R_su_s)ds \tag{П.4}$$

с некоторыми константами $\bar{c}, \bar{\kappa} > 0$. Для случая $t \in [-T, 0]$ уравнение (П.3) рассматривается при граничном условии $x_0 = \bar{x}$. В силу $Q_t \geqslant qI$ существует константа $\tilde{k} > 0$, такая что матрица $\tilde{A}_t = A_t + \tilde{k}\sqrt{Q_t}$ является экспоненциально антиустойчивой, т.е. $\|\tilde{\Phi}(s,t)\| \leqslant \tilde{\kappa}e^{-\tilde{\kappa}_1(t-s)}$, $s \leqslant t$, а $\tilde{\kappa}, \tilde{\kappa}_1 > 0$ — константы. Тогда, представив решение (П.3) в виде $x_{-T} = \tilde{\Phi}(-T,0)\bar{x} - \int_{-T}^0 \tilde{\Phi}(-T,s)(\tilde{k}\sqrt{Q_s}x_s + B_su_s)ds$, будем при некоторой константе $\tilde{c} > 0$ иметь оценку

$$\|x_{-T}\|^2 \leqslant \tilde{c}e^{-\tilde{\kappa}_1T}\|\bar{x}\|^2 + \tilde{c}\int\limits_{-T}^0 e^{-\tilde{\kappa}_1(T+s)}(x_s'Q_sx_s + u_s'R_tu_s)ds. \tag{П.5}$$

Тогда ограниченность Π_t, $t \in \mathbb{R}$, в совокупности с элементарным неравенством $2ab \leqslant ca^2 + b^2/c$, которое справедливо при произвольном $c > 0$, и (П.4)–(П.5) приводят к следующей оценке для ожидаемого значения (П.2):

$$\mathrm{E}J_{2T}(U^*) - \mathrm{E}J_{2T}(U) \leqslant c_0e^{-\kappa_1}\|\bar{x}\|^2 + c_1\mathrm{E}\|X_T^*\|^2 + c_2\mathrm{E}\|X_{-T}^*\|^2$$

с некоторыми константами $\kappa_1, c_0, c_1, c_2 > 0$. Применение нормировки $\int_{-T}^{T} \|G_t\|^2$, с учетом результата леммы 1 и условий предположения $\mathcal{G}$, в предельном переходе для $T \to +\infty$, обеспечивает выполнение соотношения

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{\mathrm{E}J_{2T}(U^*)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt} \leqslant \limsup_{T\to+\infty} \frac{\mathrm{E}J_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt},$$

показывающего, что U^* является решением задачи (3). Следует заметить, что для процессов, определенных при всех $t \in \mathbb{R}$, как в (7), решение соответствующего уравнения представляется в интегральном виде $X_t^* = X_s^* + \int_s^t A_\tau^* X_\tau^* d\tau + \int_s^t G_\tau\,dw_\tau$ при произвольном $s \in \mathbb{R}$, $s \leqslant t$. Тогда по замечанию [17, замечание 4.3.7, с. 99] известные результаты, в частности справедливость формулы Ито, могут быть распространены на случай таких процессов. Далее, по формуле Ито

$$J_{2T}(U^*) = \tag{П.6}$$

$$= [(X_{-T}^*)'\Pi_{-T}X_{-T}^*] - [(X_T^*)'\Pi_T X_T^*] + \int\limits_{-T}^{T} \mathrm{tr}(G_t'\Pi_t G_t)\,dt + 2\int\limits_{-T}^{T} (X_t^*)'\Pi_t G_t dw_t.$$

На основании неравенства из леммы 1 и свойства $pI \leqslant \Pi_t \leqslant cI$, $t \in \mathbb{R}$, выписывается двусторонняя оценка для ожидаемого значения (П.6): $\hat{c}_1 \int_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt \leqslant \mathrm{E}J_{2T}(U^*) \leqslant \hat{c}_2 \int_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt$ при некоторых константах $\hat{c}_1, \hat{c}_2 > 0$, из которой следует (9). Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Для случая $\mathcal{T} = +\infty$ процесс $X_t^* = \Phi(t,0)X_0^* + \tilde{X}_t^*$, где $\tilde{X}_t^* = \int_0^t \Phi(t,s)G_s dw_s$, $t \geqslant 0$. В [14, лемма 2] было показано, что $\|\tilde{X}_t^*\|^2 \leqslant c_0\|G_t\|^2 \ln t$ п.н. при $t \to +\infty$ и детерминированной константе $c_0 > 0$. Так как X_0^* — случайная величина, а $\|\Phi(t,0\| \leqslant \kappa_0 e^{-\kappa t}$, то из приведенного выше результата для $\|\tilde{X}_t^*\|^2$ сразу получается утверждение доказываемой леммы. При $\mathcal{T} = -\infty$ сначала рассмотрим скалярный процесс z_t с уравнением динамики $dz_t = -\kappa z_t dt + \sigma_t dw_t$, $\kappa > 0$, и коэффициентом диффузии σ_t со свойствами из условия леммы 2. Тогда $z_t = e^{-\kappa t} I_t$, где $I_t = \int_{-\infty}^t e^{\kappa s}\sigma_s dw_s$. В стохастическом интеграле I_{-T}, $T \geqslant 0$, можно провести замену времени $\tau = -1/s$ и учесть, что $\tau w_{-1/\tau} = \hat{w}_\tau$, где $\hat{w}_\tau$, $\tau \geqslant 0$, — другой винеровский процесс, см., например, [18, с. 94]. Поэтому

$$I_{-T} = \int\limits_0^{1/T} e^{-\kappa/\tau}\sigma_{-1/\tau}\left(\frac{d\hat{w}_\tau}{\tau} - \frac{\hat{w}_\tau}{\tau^2}d\tau\right).$$

При $T \to +\infty$ для оценки слагаемых в I_{-T} может использоваться локальный закон повторного логарифма [18, следствие 3, с. 93]. Пусть $I_T^{(1)} = \int_0^{1/T} e^{-\kappa/\tau}\sigma_{-1/\tau}\frac{d\hat{w}_\tau}{\tau}$, тогда $|I_T^{(1)}| \leqslant \hat{c}_1 h_T^{(1)}$ при $h_T^{(1)} = \sqrt{M_T \ln\ln(1/M_T)}$, $M_T =$

$= \int_0^{1/T} e^{-2\kappa/\tau}\sigma^2_{-1/\tau}\dfrac{d\tau}{\tau^2}$ и некоторой константе $\hat{c}_1 > 0$. Для процесса $I_T^{(2)} = \int_0^{1/T} e^{-\kappa/\tau}\sigma_{-1/\tau}\dfrac{\hat{w}_\tau}{\tau^2}d\tau$ при $T \to +\infty$ будет иметь место оценка $|I_T^{(2)}| \leqslant \hat{c}_2 h_T^{(2)}$, где $h_T^{(2)} = \int_0^{1/T} \dfrac{e^{-\kappa/\tau}\sqrt{\tau \ln\ln(1/\tau)}}{\tau^2}|\sigma_{-1/\tau}|d\tau$ и $\hat{c}_2 > 0$ — некоторая константа. При помощи правила Лопиталя нетрудно показать, что

$$\left(h_T^{(1)} + h_T^{(2)}\right)/\sqrt{\left(e^{2\kappa T}\sigma^2_{-T}\ln T\right)} \to c, \quad T \to +\infty.$$

Тогда $\limsup_{T\to+\infty}\{|z_T|/\sqrt{(\sigma^2_{-T}\ln T)}\} < \infty$, и использование этой оценки для каждой из компонент вспомогательного процесса $\hat{X}_{-T} = \int_{-\infty}^{-T} e^{\kappa(T+s)}G_s dw_s$ приводит к тому, что существует константа $\hat{c} > 0$, при которой $\limsup_{T\to+\infty}\{\|\hat{X}_{-T}\|/h_T\} < \hat{c} < \infty$ п.н., если $h_T = \sqrt{\|G_{-T}\|^2 \ln T}$. Далее, для процесса разности $Z_t = X_t^* - \hat{X}_t$ с уравнением динамики $dZ_t = A_t^* Z_t dt + (\kappa I - A_t^*)\hat{X}_t dt$ и решением $Z_t = \int_{-\infty}^{t} \Phi(t,s)(\kappa I - A_s^*)\hat{X}_s\, ds$ стандартным образом показывается, см., например, [16], что экспоненциальная устойчивость A_t^* и $\dot{h}_t/h_t \to 0$ гарантируют ограниченность отношения $\|Z_t\|/h_t$ при $t \to -\infty$, откуда следует, что и $\limsup_{t\to-\infty}\{\|X_t^*\|/h_t\} < \bar{c} < \infty$ для $h_t = \sqrt{\|G_t\|^2 \ln|t|}$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. В условиях п. 2 предположения $\mathcal{G}$ использование результата леммы 2 в совокупности с требованием $d\ln\|G_t\|/dt \times \ln|t| \to 0$, $t \to \mathcal{T}$, приводит к тому, что $\lim_{t\to\mathcal{T}}\left\{\|X_t^*\|^2/\left|\int_0^t \|G_s\|^2\, ds\right|\right\} \leqslant c\lim_{t\to\mathcal{T}}\left\{\|G_t\|^2 \ln|t|/\left|\int_0^t \|G_s\|^2\, ds\right|\right\} = 0$ с вероятностью единица. Если матрица диффузии G_t ограничена, то при $\mathcal{T} = +\infty$ вновь используется представление $X_T^* = \Phi(T,0)X_0^* + \tilde{X}_T^*$, где $\tilde{X}_T^* = \int_0^T \Phi(T,s)G_s dw_s$, $T \geqslant 0$, и известный результат [13, теорема 1], согласно которому $\|\tilde{X}_T^*\|^2/\int_0^T \|G_s\|^2 ds \to 0$ п.н., $T \to +\infty$. Тогда, принимая во внимание наличие убывающей экспоненциальной оценки для $\|\Phi(T,0)\|$, получаем соотношение $\|X_T^*\|^2/\int_{-T}^T \|G_s\|^2 ds \to 0$, $T \to +\infty$. Для $\mathcal{T} = -\infty$ представление $\|X_{-T}^*\|^2 = \|X_0^*\|^2 - \int_{-T}^0 (X_t^*)'(A_t + A_t')X_t^* dt - \int_{-T}^0 (X_t^*)'G_t dw_t - \int_{-T}^0 (dw_t)'G_t' X_t^* - \int_{-T}^0 \|G_t\|^2\, dt$ позволяет применить при анализе слагаемых результаты [13, лемма 1, лемма 2] с подынтегральной заменой времени $\tau = -t$, и тогда также $\|X_{-T}^*\|^2/\left|\int_{-T}^0 \|G_s\|^2\, ds\right| \to 0$, $T \to +\infty$. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для оценки (П.2) используются полученные неравенства (П.4) и (П.5). Замена T на t в (П.4), $(-T)$ на t — в (П.5) и последующее интегрирование этих соотношений на $[0,T]$ и $[-T,0]$ приводят к

$$\int_0^T \|x_t\|^2\, dt \leqslant \bar{c}_1\|\bar{x}\|^2 + \bar{c}_1\int_0^T (x_t' Q_t x_t + u_t' R_t u_t)dt \qquad \text{(П.7)}$$

и соответственно к

$$(\text{П}.8)\qquad \int\limits_{-T}^{0} \|x_t\|^2\,dt \leqslant \tilde{c}_1\|\bar{x}\|^2 + \tilde{c}_1 \int\limits_{-T}^{0} (x_t' Q_t x_t + u_t' R_t u_t) dt$$

при некоторых константах $\bar{c}_1, \tilde{c}_1 > 0$. Тогда (П.2) можно оценить как

$$J_{2T}(U^*) \leqslant J_{2T}(U) + c_0\|\bar{x}\|^2 + c_1\|X_T^*\|^2 + c_2\|X_{-T}^*\|^2 - $$
$$- c_3 \int\limits_{-T}^{T} \|x_t\|^2\,dt - 2\int\limits_{-T}^{T} x_t'\Pi_t G_t dw_t,$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3 > 0$ — некоторые константы, а затем записать, что

$$(\text{П}.9)\qquad J_{2T}(U^*) \leqslant J_{2T}(U) + \mathcal{R}_T^{(0)} + \mathcal{R}_T^{(+)} + \mathcal{R}_T^{(-)},$$

где процессы $\mathcal{R}_T^{(0)} = c_0\|\bar{x}\|^2 + c_1\|X_T^*\|^2 + c_2\|X_{-T}^*\|^2$, $\mathcal{R}_T^{(+)} = -c_3\int_0^T \|x_t\|^2\,dt - -2\int_0^T x_t'\Pi_t G_t dw_t$, $\mathcal{R}_T^{(-)} = -\mathcal{R}_{-T}^{(+)}$. Так как выполнены предположения $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}1$ и $\int_{-T}^T \|G_t\|^2\,dt \to \infty$, $T \to +\infty$, то с учетом леммы 3 имеем

$$\lim_{T\to+\infty} \left\{ \mathcal{R}_T^{(0)} \Big/ \int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt \right\} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Далее рассматривается поведение процессов $\mathcal{R}_T^{(+)}$ и $\mathcal{R}_T^{(-)}$ при $T \to +\infty$. Для ограниченной G_t, $t \geqslant 0$, известно, см., например, [12], что $\limsup\limits_{t\to+\infty}\{\mathcal{R}_T^{(+)}/g_T\} \leqslant 0$ п.н. для любой функции $g_T > 0$ и $g_T \to \infty$, $t \to +\infty$. По условию в качестве нормировки g_T можно взять $g_T = \int_{-T}^T \|G_t\|^2\,dt$. Если имеет место п. 2 предположения $\mathcal{G}$ и предположение $\mathcal{G}1$, то после использования закона повторного логарифма для стохастических интегралов, см., например, [19], $\mathcal{R}_T^{(+)}$ оценивается в виде $|\mathcal{R}_T^{(+)}| \leqslant L_T$, $T \to +\infty$, где

$$L_T = \hat{c}_1\|G_T\|^2 \sqrt{\int\limits_0^T \|x_t\|^2\,dt \ln\ln\left(\int\limits_0^T \|x_t\|^2\,dt\right)} - $$
$$- \hat{c}_2 \int\limits_0^T \|x_t\|^2 dt + \hat{c}_3\|G_T\|^2 \ln\ln\|G_T\|,$$

а $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3$ — некоторое константы. Применяя аналогичные рассуждения как и при доказательстве в [14, лемма 3], можно определить, что $L_T \leqslant c\|G_T\|^2 \ln\ln\|G_T\|$, и тогда $\limsup_{t\to+\infty}\{\mathcal{R}_T^{(+)}/g_T\} = 0$ п.н. при $g_T =$

$= \|G_T\|^2 \ln\ln \|G_T\|$. Из этого результата и предположения $\mathcal{G}1$ следует, что $\lim_{T\to+\infty} \left\{ g_T / \int_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt \right\} = 0$ п.н. Также необходимо отметить, что результаты по выбору нормировок g_T для процесса $\mathcal{R}_T^{(-)}$ получаются на основе соответствующих соотношений, приведенных выше для $\mathcal{R}_T^{(+)}$, если произвести замену времени $\tau = -t$ в подынтегральных выражениях. Тогда с учетом этих замечаний из (П.9) в пределе при $T \to +\infty$ приходим к неравенству

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{J_{2T}(U^*)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} \leqslant \limsup_{T\to+\infty} \frac{J_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} \qquad \text{с вероятностью единица.}$$

Далее, переходя к (П.6), принимая во внимание (9) и результат леммы 3, очевидно, что для доказательства (11) необходимо исследовать поведение

$$I_T = \int\limits_{-T}^{T} (X_t^*)' \Pi_t G_t\, dw_t = I_T^{(+)} + I_T^{(-)},$$

где $I_T^{(+)} = \int_0^T (X_t^*)' \Pi_t G_t\, dw_t$, $I_T^{(-)} = -I_{-T}^{(+)}$. Точнее, требуется проанализировать $I_T^{(+)}/\Gamma_T$, с $\Gamma_T = \int_0^T \|G_t\|^2\, dt$, при этом случай $I_T^{(-)}/|\Gamma_{-T}|$ рассматривается аналогичным образом путем замены времени. Для ограниченной G_t, $t \geqslant 0$, как было показано в [13], отношение $I_T^{(+)} / \Gamma_T \to 0$ п.н. при $T \to +\infty$. Для $\|G_t\| \to \infty$, $t \to +\infty$, и соотношений в предположении $\mathcal{G}1$ используется закон повторного логарифма для стохастических интегралов, см. [19], когда $\limsup\limits_{T\to+\infty} \left\{ |I_T^{(+)}| / \sqrt{\langle I_T^{(+)}\rangle \ln\ln \langle I_T^{(+)}\rangle} \right\} < \infty$ п.н., где $\langle I_T^{(+)}\rangle = \int_0^T \|X_t^*\|^2 \|G_t\|^2 \|\Pi_t\|^2 dt$. Применение леммы 2 в совокупности с монотонностью $\|G_t\|$ дает оценки $\langle I_T^{(+)}\rangle \leqslant c\|G_T\|^2 \int_0^T \|G_t\|^2 dt \ln T$ и $\ln\ln \langle I_T^{(+)}\rangle \leqslant c(\ln\ln T + \ln\ln \|G_T\|)$. Тогда

$$\langle I_T^{(+)}\rangle \ln\ln \langle I_T^{(+)}\rangle \,/\, \Gamma_T^2 \leqslant c\|G_T\|^2 \left(\ln\ln T + \ln\ln \|G_T\|\right) \ln T \,/\, \Gamma_T \to 0, \quad T \to +\infty$$

(здесь равенство нулю получено вследствие предположения $\mathcal{G}1$), поэтому $I_T^{(+)}/\Gamma_T \to 0$ с вероятностью единица. С учетом изложенного

$$I_T / \int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad T \to +\infty,$$

и имеет место (11). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.

2. *Mueller M., Cantoni M.* Normalized Coprime Representations for Time-Varying Linear Systems // Proc. 49th IEEE Conf. on Decision and Control. N.Y., 2010. P. 7718–7723.

3. *Tudor C.* Quadratic Control for Linear Stochastic Equations with Pathwise Cost // Stochastic Systems and Optimization. Proc. 6th IFIP WG 7.1 Working Conf. Warsaw, Poland, September 12–16, 1988. Berlin: Springer, 1989. P. 360–369.

4. *Da Prato G., Ichikawa A.* Quadratic Control for Linear Time-Varying Systems // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. No. 2. P. 359–381.

5. *Makila P.M.* Convoluted Double Trouble // IEEE Contr. Syst. Mag. 2002. V. 22. No. 4. P. 26–31.

6. *Nourdin I.* Selected aspects of fractional Brownian motion. Milan: Springer, 2012.

7. *Altman E., Basar T., Hovakimyan N.* Worst-Case Rate-Based Flow Control with an ARMA Model of the Available Bandwidth // Advances in Dynamic Games and Applications. Boston: Birkhauser, 2000. P. 3–29.

8. *Sun T., Nielsen S.R.K.* Stochastic Optimal Control of a Heave Point Wave Energy Converter Based on a Modified LQG Approach // Ocean Eng. 2018. V. 154. P. 357–366.

9. *Grimble M.J., Johnson M.A.* Optimal control and stochastic estimation: theory and applications. V. 2. N.Y.: John Wiley & Sons, 1986.

10. *Smith P.L., McKenzie C.R.L.* Diffusive Information Accumulation by Minimal Recurrent Neural Models of Decision Making // Neural Comput. 2011. V. 23. No. 8. P. 2000–2031.

11. *Lim S.C., Muniandy S.V.* Self-Similar Gaussian Processes for Modeling Anomalous Diffusion // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. No. 2. P. 021114.

12. *Белкина Т.А., Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями // АиТ. 2013. № 4. С. 110–128.

    Belkina T.A., Palamarchuk E.S. On Stochastic Optimality for a Linear Controller with Attenuating Disturbances // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 4. P. 628–641.

13. *Паламарчук Е.С.* Асимптотическое поведение решения линейного стохастического дифференциального уравнения и оптимальность почти наверное для управляемого случайного процесса // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 89–103.

    Palamarchuk E.S. Asymptotic Behavior of the Solution to a Linear Stochastic Differential Equation and Almost Sure Optimality for a Controlled Stochastic Process // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54. No. 1. P. 83–96.

14. *Паламарчук Е.С.* Оценка риска в линейных экономических системах при отрицательных временных предпочтениях // Экономика и матем. методы. 2013. Т. 49. № 3. С. 99–116.

15. *Al-Azzawi S., Liu J., Liu X.* Convergence Rate of Synchronization of Systems with Additive Noise // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2017. V. 22. No. 2. P. 227–245.

16. *Паламарчук Е.С.* Об обобщении логарифмической верхней функции для решения линейного стохастического дифференциального уравнения с неэкспоненциально устойчивой матрицей // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 195–195.

    Palamarchuk E.S. On the Generalization of Logarithmic Upper Function for Solution of a Linear Stochastic Differential Equation with a Nonexponentially Stable Matrix // Differ. Equat. 2018. V. 54. No. 2. P. 193–200.

17. *Prevot C., Rockner M.* A concise course on stochastic partial differential equations. Berlin: Springer, 2007.
18. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
19. *Wang J.* A Law of the Iterated Logarithm for Stochastic Integrals // Stoch. Proc. Appl. 1993. V. 47. No. 2. P. 215–228.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 31.05.2019

После доработки 15.07.2019

Принята к публикации 18.07.2019