Автоматика и телемеханика, № 10, 2020

Обзоры

© 2020 г. **Н.И. ВОРОПАЙ, д-р техн. наук (voropai@isem.irk.ru),**
И.И. ГОЛУБ, д-р техн. наук (golub@isem.irk.ru),
Д.Н. ЕФИМОВ, канд. техн. наук (efimov@isem.irk.ru)
(Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск),
А.Б. ИСКАКОВ, канд. физ.-мат. наук (isk_alex@mail.ru),
И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (jadikin1@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ И МОДАЛЬНЫЙ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И УПРАВЛЕНИИ ИМИ[1]

Представлен обзор применения методов спектрального и модального анализа в исследованиях устойчивости электроэнергетических систем и управлении ими. Рассмотрены теоретические основы этих методов и опыт их использования для выявления неоднородности структуры систем, идентификации когерентности движения генераторов и упрощения математической модели динамики энергосистем, оценки их статической устойчивости (устойчивости "в малом") и выбора управляющих воздействий для ее обеспечения. Обсуждается анализ субграмианов при исследовании устойчивости электроэнергетических систем и другие новые направления развития модального подхода.

Ключевые слова: электроэнергетические системы, спектральный анализ, модальный анализ, упрощение математических моделей, оценка устойчивости, управление, субграмианы.

DOI: 10.31857/S0005231020100013

1. Введение

Электроэнергетические системы (ЭЭС) — сложнейшие технические объекты, созданные человеком и включающие тысячи генераторов электроэнергии, объединяемых на совместную работу электрической сетью, роторы которых в нормальном режиме вращаются с одинаковой (синхронной) угловой скоростью. Со времени создания первых ЭЭС одной из важнейших проблем было и остается обеспечение их устойчивости при малых и больших возмущениях. Для современных больших ЭЭС эта проблема особенно актуальна в связи с появлением новых факторов, определяемых нестационарностью генерации

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 19-19-00673.

возобновляемых источников электроэнергии, активностью потребителей, использованием эффективно управляемых устройств на базе силовой электроники в электрической сети и у потребителей и ряда других, что существенно ухудшает свойства ЭЭС с точки зрения возможностей обеспечения их устойчивости. Кроме того, вследствие неоднородности структуры электрической сети остаются сечения (группы связей одного направления) с ограниченной пропускной способностью (bottlenecks), особенно в ослабленной структуре сети в послеаварийных и ремонтных режимах большой ЭЭС. Неоднородность структуры сети определяется наличием в ней подсистем с сильными внутренними связями и слабых связей и узлов между этими подсистемами (см. раздел 3). Ситуацию усугубляет расширение использования в ЭЭС установок распределенной генерации, в том числе на базе возобновляемых энергоресурсов, с малыми постоянными инерции роторов, а также подключаемых к электрической сети через выпрямительно-инверторные блоки, что существенно снижает инерционность системы и повышает опасность нарушений ее устойчивости. Нарушение устойчивости сложной системы может привести к каскадному развитию аварийного процесса с массовым нарушением питания потребителей и тяжелыми последствиями для системы [1, 2] и др.

Основополагающие исследования в области анализа и обеспечения устойчивости ЭЭС, моделирования элементов и системы в целом в динамических режимах, были выполнены еще в 1930–40-е гг. А.А. Горевым, Р. Парком, П.С. Ждановым, Е.В. Кимбарком, А.С. Лебедевым и рядом других авторов [3–5] и др. Соответствующие результаты для ЭЭС учитывали фундаментальные методы математической теории устойчивости динамических систем, полученные в работах А.А. Ляпунова, Дж. Сильвестра и др. [6, 7] и др. Одним из важных направлений в этой области является проблема устойчивости ЭЭС "в малом", исторически обозначаемая в электроэнергетике термином "статическая устойчивость".

Существуют несколько видов статической устойчивости ЭЭС. Применительно к рассматриваемым в данной статье подходам для сложных ЭЭС актуальными являются "устойчивость по углам" — angle stability (имеются в виду взаимные углы роторов синхронных машин) и "устойчивость по напряжениям" в узлах электрической сети — voltage stability [3–5] и др. При исследовании статической устойчивости ЭЭС при малых возмущениях (устойчивости "в малом") используется классический подход математической теории устойчивости динамических систем, состоящий в линеаризации нелинейной системы в окрестности рассматриваемого положения ее равновесия, что позволяет использовать богатый арсенал строгих методов оценки устойчивости линейных динамических систем. При этом в статье рассматриваются попытки распространения этих методов для анализа нелинейных эффектов.

Первоначально исследования слабо возмущенного движения ЭЭС концентрировались на анализе апериодической статической устойчивости по критерию смены знака определителя матрицы Якоби, равного свободному члену характеристического полинома. Считалось, что колебательные электромеханические процессы должны демпфироваться автоматическим регулятором возбуждения сильного действия (АРВ-СД) или стабилизаторами энергосистемы (СЭС — power system stabilizers). Однако данные практики показали многие случаи слабо демпфированных колебаний и самораскачивания из-за возникновения специфических нерасчетных схемно-режимных ситуаций, на которые не была рассчитана настройка коэффициентов регулирования АРВ-СД и СЭС. Это стимулировало развитие более строгих методов анализа статической устойчивости ЭЭС на базе теории устойчивости “в малом” А.А. Ляпунова, чему способствовало также появление эффективных методов определения корней характеристического уравнения высоких порядков (собственных значений матрицы линейной динамической системы) [8] и др., составляющих основу спектрального анализа. Модальный анализ впервые был исследован применительно к ЭЭС в [9, 10].

В широком смысле как спектральный анализ, так и модальный анализ подразумевают изучение свойств динамических систем в терминах частот и связанных с ними величин, таких как энергии, собственные значения и векторы. Хотя термин “спектральный” имеет более общий математический смысл, но применительно к методам оценки статической устойчивости ЭЭС термины “модальный” и “спектральный” очень близки и связаны с анализом расположения собственных значений матрицы линеаризованной системы на комплексной плоскости. Для удобства изложения в этом обзоре к спектральным отнесены более ранние методы, названные измерительными и анализирующие расположение на комплексной плоскости спектра матрицы линеаризованной динамической системы; к модальным — методы, связанные с идентификацией конкретных мод колебаний при использовании так называемых факторов (коэффициентов) участия, позволяющих соотнести эти моды колебаний с конкретными переменными состояния системы. Методы спектрального анализа и модального анализа активно развиваются и модернизируются. По оценкам специалистов в настоящее время ежегодно в мире по проблемам развития этих методов публикуется до сотни работ, причем большая часть из них связана с задачами устойчивости ЭЭС.

В данной статье приведен обзор наиболее характерных результатов применения методов спектрального и модального анализа для решения различных задач анализа структурных свойств ЭЭС, моделирования динамики этих систем, исследования их устойчивости и управления ими — в основном за последние годы, но с использованием при необходимости более ранних результатов. В разделе 2 кратко даны теоретические основы спектрального и модального методов. Применение этих подходов охватывает практически все стадии исследования устойчивости сложных ЭЭС: изучение объекта исследований, его свойств, прежде всего свойства неоднородности структуры системы (раздел 3); выявление когерентности движения генераторов в электромеханическом переходном процессе в ЭЭС и упрощение (эквивалентирование) математических моделей когерентных групп генераторов (раздел 4); оценка статической устойчивости ЭЭС и выбор управляющих воздействий для ее обеспечения (раздел 5); анализ субграмианов при исследовании устойчивости ЭЭС и другие новые направления развития модального подхода (раздел 6). Раздел 7 (Заключение) подытоживает результаты статьи.

Потенциальные читатели обзора — это преимущественно электроэнергетики, глубоко знакомые со структурой и свойствами больших ЭЭС и проблемами устойчивости этих систем. Тем не менее обзор может быть интересен и полезен специалистам по теории управления, имеющим определенные наработки и понимание проблем устойчивости сложных ЭЭС. Эта двуединая направленность обзора определила его структуру и содержание, которые представляются авторам определенным компромиссом с точки зрения изложения материала для рассматриваемых двух групп специалистов.

Основным объектом рассмотрения в обзоре являются большие сложные ЭЭС, для которых характерна неоднородность структуры электрической сети, проявляющаяся в наличии подсистем с сильными связями внутри них и слабыми связями и узлами между подсистемами (см. подробнее раздел 3), а также такие специфичные для сложных ЭЭС явления, как межрайонные колебания, когерентность возмущенного движения групп генераторов и ряд других, что отражает специфические свойства сложных ЭЭС, важные с точки зрения обеспечения их устойчивости.

2. Теоретические основы

В общем виде математическая модель ЭЭС при исследовании электромеханических переходных процессов может быть представлена системой нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений [11]

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z, v), \\ 0 &= g(y, z, v), \end{aligned} \tag{1}$$

где y – вектор переменных состояния системы размерности n; z – вектор зависимых переменных размерности m; v – вектор управлений размерности l; $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – нелинейные вектор-функции, вид которых определяется моделями синхронных машин, электрической сети и нагрузок.

Линеаризация системы уравнений (1) в окрестности установившегося положения равновесия (y_0, z_0) приводит к линейным алгебро-дифференциальным уравнениям в приращениях $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$, $\Delta v = v - v_0$:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (F_y \big| F_z) \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + F_v \Delta v, \\ 0 &= (G_y \big| G_z) \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + G_v \Delta v. \end{aligned} \tag{2}$$

Система уравнений (2) при условии обратимости матрицы Якоби преобразуется к форме Коши

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

где $x = \Delta y$ – вектор состояния размерности n; $u = \Delta v$ – вектор управления размерности l.

Достаточно часто при решении различных задач исследования устойчивости ЭЭС рассматривается так называемая классическая модель динамики системы

$$T_i \ddot{\delta}_i(t) + d_i \dot{\delta}(t) = a_i - \sum_{j=0}^{N} b_{ij} \sin(\delta_i(t) - \delta_j(t)), \quad i = \overline{1, N}, \tag{4}$$

где δ_i – угол ротора генератора i относительно синхронной оси; T_i, d_i – постоянная инерции и коэффициент демпфирования i-го ротора; a_i – механическая мощность, вырабатываемая турбиной агрегата; $b_{ij} = E_i E_j s_{ij}$, где E_i, E_j – ЭДС, определяемые потокосцеплениями магнитных полей, создаваемых обмотками возбуждения синхронных машин i и j соответственно, а s_{ij} – проводимости ветвей между генераторами i и j.

Классическая модель динамики ЭЭС обычно используется при решении вспомогательных задач спектрального и модального анализа (см., например, раздел 4 данной статьи в части выявления когерентности движения генераторов и упрощения моделей ЭЭС). Такие вспомогательные задачи решаются для удаленных от исследуемой подсистемы частей большой протяженной ЭЭС, в которых классическая модель динамики системы отражает поведение генераторов с приемлемой точностью. Определение исследуемой подсистемы — самостоятельная задача, зависящая от характера решаемой проблемы. В качестве исследуемой подсистемы может рассматриваться, например, территориально выделенный район ЭЭС. Генераторы исследуемой подсистемы представляются достаточно детальной моделью их динамики с учетом действия основных влияющих факторов, прежде всего регуляторов возбуждения и скорости. Учитывая то, что выбор представительной модели генераторов исследуемой подсистемы – самостоятельная задача, в работах, касающихся методов исследования устойчивости ЭЭС, проблемы обоснования моделей динамики генераторов обычно детально не рассматриваются, часто ограничиваясь общим их представлением вида (1).

Линеаризация системы дифференциальных уравнений (4) в окрестности положения равновесия системы дает линейную модель динамики ЭЭС в пространстве состояний, записываемую в общем виде как

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{5}$$

где x – вектор состояния ЭЭС размерности N; N – число синхронных машин в системе; A – вещественная матрица постоянных коэффициентов размерности $N \times N$.

При решении некоторых задач, связанных с проблемами устойчивости ЭЭС (см., например, раздел 3), методами спектрального анализа рассматриваются собственные значения и собственные векторы матрицы Якоби уравнений установившегося режима (состояния равновесия) системы, которые в общем виде на основе (1) представляются как

$$\begin{aligned} 0 &= f(y, z, v), \\ 0 &= g(y, z, v). \end{aligned} \tag{6}$$

Одним из наиболее популярных методов изучения устойчивости моделей ЭЭС вида (3) и (5) относительно малых возмущений является модальный анализ, основанный на вычислении спектра динамической матрицы A, т.е. множества ее собственных значений λ_i

$$\Lambda(A) = \left\{ \lambda_i : \det(\lambda_i I_N - A) = 0,\ i = \overline{1, N} \right\}, \tag{7}$$

где I_N обозначает единичную матрицу размерности $N \times N$. Собственные числа в (7) определяют частоты колебаний и коэффициенты демпфирования мод, характеризующих динамику поведения линейной системы (отсюда и термин "модальный анализ"). В частности, если все собственные значения λ_i, $i = \overline{1, N}$ имеют отрицательные действительные части, т.е.

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{8}$$

то модели ЭЭС (3) или (5) являются статически (асимптотически) устойчивыми. Правый и левый собственные векторы v_i и w_i матрицы A, соответствующие собственному значению λ_i, определяются выражениями

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad w_i^{\mathrm{T}} A = \lambda_i w_i^{\mathrm{T}}, \quad v_i \neq 0, \quad w_i \neq 0. \tag{9}$$

Эти векторы позволяют связать собственные моды системы с соответствующими им переменными состояния.

На начальном этапе развития спектральный анализ рассматривался в основном как совокупность измерительных методов и вычислительных алгоритмов для быстрого нахождения определенных групп собственных чисел и векторов системы, интересных с точки зрения конкретных приложений. В электроэнергетике прежде всего изучались медленные и плохо демпфируемые колебания, которые могут приводить к потере статической устойчивости. Эти колебания могут возникать между одной или несколькими машинами и остальной частью системы ("локальные колебания" с частотой в диапазоне от 1 до 2 Гц) или же между большими группами генераторов ("межрайонные колебания" с частотой от 0,1 до 0,5 Гц) [12, 13].

Классические измерительные методы спектральных характеристик системы основаны на прямом преобразовании Фурье или на оценке корреляционной функции (периодограммы Шустера, модифицированные периодограммы, методы Бартлетта, Уэлча, Блэкмана–Тьюки). В качестве измеряемой величины могут использоваться амплитуда, энергия, число осцилляций и другие параметры сигнала. Более сложные методы динамических измерений для оценки спектральных характеристик системы включают метод Прони, методы Юла–Уолкера и Берга, модель скользящего среднего, вейвлет-анализ, нейронные сети и генетические алгоритмы [14, 15] и др.

Вычислительные методы модального анализа предполагают, что динамическая матрица системы уже известна, и необходимо предложить эффективные способы вычисления собственных чисел и векторов в заданной части спектра. При этом сама матрица как правило имеет большую размерность, может быть вырожденной или плохо обусловленной, а также иметь разреженную структуру. Среди известных и хорошо зарекомендовавших себя методов выделения критических мод можно назвать QR метод, метод одновременных итераций, метод Ланцоша (Lanczos method), модифицированный метод Арнольди, различные их модификации [16–20] и др. Отметим также более новые методы вычисления спектра доминирующих полюсов [21] и метод матричных сигнум-функций [22].

Собственные числа имеют простую смысловую интерпретацию, однако при анализе собственных векторов существует определенная проблема. Собственные векторы не позволяют однозначно интерпретировать связь соответствующих мод и переменных состояния, поскольку эти векторы зависят от выбора единиц измерения переменных. В [12, 13] была предложена удачная формализация селективного модального анализа для линейных систем, которая дала возможность установить однозначную связь между модами и переменными состояния на основе так называемых факторов (коэффициентов) участия, которые не зависят от используемых единиц измерения. Это позволило однозначно выделять элементы структуры системы, связанные с собственными модами в динамике ее поведения. Факторы участия (ФУ) и обобщенные участия определяются соответственно как [23]

$$p_{ki} = v_i^k w_i^k \quad \text{и} \quad p_{kil} = v_i^k w_i^l, \tag{10}$$

где v_i^k и w_i^l обозначают k-ю и l-ю компоненты соответственно i-го правого и левого собственных векторов матрицы A в (9). При этом предполагается, что собственные векторы нормированы, т.е.

$$w_i^{\mathrm{T}} v_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{11}$$

Для линейных систем ФУ определяют относительные вклады собственных мод системы в динамику эволюции переменных состояния, т.е.

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{N} p_{ki} x_k(0)\, e^{\lambda_i t} + \sum_{i,l=1;\ l \neq k}^{N} p_{kil} x_l(0)\ e^{\lambda_i t}. \tag{12}$$

С конца XX в. развитие модального анализа происходило в нескольких направлениях. Во-первых, концепция ФУ находила все новые области применения. Сегодня эти показатели широко используются в электроэнергетике и в других областях для анализа устойчивости [12, 13, 24], упрощения моделей [25], размещения средств измерения и управления в сети [26], кластеризации [27] и др. Некоторые из этих применений будут рассмотрены подробнее в последующих разделах обзора.

Во-вторых, расширялась смысловая интерпретация ФУ. Была установлена их связь с чувствительностями собственных чисел [23], модальной управляемостью и наблюдаемостью [28], а также с модальной подвижностью (modal mobility) [29]. Согласно (12) ФУ определяют динамику переменной состояния $x_k(t)$ только в том случае, если $x_l(0) = 0$, $l \neq k$, т.е. при специально выбранном начальном условии. В [30] было показано, что такое предположение может приводить к противоестественным результатам, и был предложен альтернативный метод усреднения по неопределенному множеству начальных условий. В соответствии с этим подходом, исходное определение ФУ (10) было сохранено для анализа участий “мод в состояниях”. А для анализа участия “состояний в модах” было предложено альтернативное определение ФУ (или ФУСМ). Впоследствии подобные концепции ФУСМ были рассмотрены для динамических нелинейных систем [31] и для систем, описываемых алгебраическими уравнениями, такими, например, как уравнения потокораспределения (6) [24].

В-третьих, были предприняты активные усилия распространить модальный анализ на случай нелинейных моделей. Попытки учесть нелинейные эффекты и межмодальные взаимодействия в рамках модального анализа развивались в основном в двух направлениях. Подходы, в которых предполагается известной модель системы, связаны с учетом членов второго и более высоких порядков в разложении ряда Тейлора, аппроксимирующего динамическую систему. В основном это делается с помощью нормальных форм Пуанкаре [31–33]. Исследование [34] показало, что учет таких членов может оказаться важным при изучении межрайонных колебаний в ЭЭС, подвергнутых большим возмущениям. Основная идея метода Пуанкаре состоит в том, чтобы подобрать нелинейную замену переменных в виде полинома так, чтобы для преобразованной системы члены второго порядка (и, возможно, более высоких порядков) в разложении Тейлора исчезли. Основной недостаток такого подхода заключается в том, что он требует решения сильно нелинейной численной задачи и использования затратных вычислительных алгоритмов. Поэтому альтернативные подходы предлагают оценивать ФУ непосредственно на основе измерений. Например, это можно сделать на основе расширенной динамической модальной декомпозиции (extended dynamic mode decomposition) [35] или модальной декомпозиции Купмана (Koopman mode decomposition) [36]. Использование таких методов менее универсально и требует тщательной проверки в практических приложениях.

Наряду с модальным анализом другой концептуальный метод в исследовании устойчивости связан с именами Джеймса Сильвестра и Александра Ляпунова, которые в конце XIX в. открыли и исследовали свойства матричных уравнений Сильвестра и Ляпунова [6, 7]. Эти уравнения играют сегодня важную роль во многих разделах современной теории управления, в том числе при исследовании устойчивости линейных и нелинейных систем, в робастном и оптимальном управлении. Ляпунов показал, что условия асимптотической статической устойчивости (8) линейных систем (3) или (5) эквивалентны тому, что для любой положительно определенной матрицы Q ($Q > 0$) существует положительно определенное решение P ($P > 0$) алгебраического матричного уравнения Ляпунова [7, 37] и др.

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q, \quad Q = Q^{\mathrm{T}} > 0, \tag{13}$$

которое называется грамианом. В этом случае для спектра устойчивой матрицы A справедлива оценка [38]:

$$\min_{i=1,\ldots,N} |\mathrm{Re}\,\{\lambda_i\}| \leq -\frac{1}{2\,\|P\|}. \tag{14}$$

Таким образом, вычисляя грамиан P как решение уравнения (13), можно оценить степень устойчивости системы без вычисления ее спектра. Кроме того, грамиан P в (13) может быть представлен в виде интеграла с матричными экспонентами матрицы A

$$P = \int\limits_0^\infty e^{A^{\mathrm{T}}t} Q e^{At} dt. \tag{15}$$

Предположим далее, что система (3) наблюдается по выходному сигналу

$$s\,(t) = Cx(t). \tag{16}$$

Тогда для анализа системы (3) обычно используются грамианы управляемости P_C и наблюдаемости P_O, когда в качестве положительной матрицы в уравнении (13) выбираются $Q = BB^{\mathrm{T}} > 0$ и $Q = C^{\mathrm{T}}C > 0$ соответственно. В целом можно сказать, что грамиан наблюдаемости характеризует устойчивость системы в смысле ограничения энергии ее выходного сигнала, а грамиан управляемости характеризует устойчивость системы в смысле ее асимптотической устойчивости к случайным возмущениям входного сигнала. Для устойчивой линейной динамической системы грамианы тесно связаны с квадратом H_2-нормы ее передаточной функции или ее импульсной характеристики. Физическая интерпретация этих величин состоит в том, что они определяют усиление энергии сигнала в системе, усредненное по времени или частоте.

В середине XX в. были достигнуты серьезные прорывы в создании эффективных методов решения матричных уравнений и, в частности, уравнений Ляпунова и Сильвестра. Были разработаны методы ортогонализации, среди которых следует упомянуть методы Бартельса–Стюарта и Голуба–Нэша [39]. Первая работа по вычислению решений уравнений Ляпунова и Сильвестра в виде интегралов от их матричной резольвенты в комплексной плоскости была сделана в СССР М.Г. Крейном [40]. Д.К. Фаддеев разработал спектральное разложение резольвенты матрицы в ряд Фаддеева [41]. В [38, 42] были исследованы вопросы разрешимости матричных уравнений Сильвестра–Ляпунова–Крейна, дихотомия и расслоения их спектров, а также вычислительные проблемы их решения. В [43] обсуждаются структурные свойства грамианов. В [44] предложены методы решения непрерывных и дискретных матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра, основанные на приведении матрицы динамики к нормальной форме Жордана. За последние 30 лет интенсивно развивались вычислительные методы для решения матричных уравнений более сложных типов, имеющих все большую размерность (см. ссылки в недавнем обзоре [45]).

Развивалась также и смысловая интерпретация метода Ляпунова. В частности, интерпретация грамианов для уравнения (13), основанная на концепции "энергии", в целом сохраняется и для параметрических линейных систем с заменой матричной экспоненты e^{At} в (15) на фундаментальное решение $\Phi(0,t)$ однородного уравнения $\dot{x} = A\,(t)\,x$ [46, 47]. Понятие грамианов в дальнейшем было обобщено и интерпретировано для обобщенных уравнений Ляпунова, описывающих свойства детерминированных билинейных и стохастических линейных систем, и получило название энергетических функционалов [48, 49].

Спектральные свойства грамианов и энергетических функционалов были эффективно использованы в методах уменьшения размерности моделей (model order reduction – MOR). Среди них отметим метод сбалансированного отсечения [50], метод использования кросс-грамианов [51] и различные их модификации (см. обзор [52]). В монографии [53], посвященной аппроксимации больших динамических систем, были впервые получены сингулярные разложения бесконечных грамианов управляемости и наблюдаемости на основе приведения матрицы динамики к диагональному виду. Более общая форма спектральных разложений функций Ляпунова на компоненты, соответствующие отдельным собственным числам и их парным комбинациям, была предложена в [54–56]. Каждый член в этих спектральных разложениях был назван *суб-грамианом*. Суб-грамианы позволяют оценивать взаимодействия между собственными модами системы. Они также дают возможность объединить идеи модального анализа с методом оценки устойчивости по Ляпунову. Более подробное описание этого метода и его применение к анализу устойчивости электроэнергетических систем будет представлено в разделе 6 обзора.

3. Исследования неоднородностей в электроэнергетических системах

Структура электрической сети сложной ЭЭС всегда неоднородна. Неоднородность структуры — фундаментальное свойство сложных ЭЭС, равно как и других систем со сложной структурой. Важно выявлять эту неоднородность, количественно ее оценивать и использовать при моделировании ЭЭС, их исследовании и управлении их режимами [57–59].

В процессе функционирования ЭЭС подвергается возмущениям и реагирует на них изменением переменных режима системы. Эта реакция определяется как величиной и местом приложения возмущения, так и внутренними свойствами самой системы. Возмущения, локализуемые в разных местах ЭЭС, вызывают более заметную, по сравнению с другими местами, реакцию переменных режима в одних и тех же узлах и связях системы. Такие элементы, переменные режима которых в наибольшей степени реагируют на происходящие в электрической сети возмущения, названы *сенсорами*. Неоднородности, приводящие к наличию сенсоров, определяются топологией и параметрами схемы электрической сети.

Элементы сети, изменение параметров которых приводит к наибольшей реакции сенсоров на возмущения, названы *слабыми местами*. К слабым местам относятся слабые связи и сечения, изменение сопротивлений в которых позволяет изменить значения переменных режима сенсоров, а также слабые узлы, если фиксация напряжений в них приводит к аналогичному эффекту. Переменные режима в слабых узлах при увеличении загрузки электрической сети раньше всего достигают критических значений с точки зрения нарушения устойчивости ЭЭС по напряжению. По слабым связям и сечениям чаще всего происходят нарушения устойчивости по углу и каскадное развитие аварийных процессов [57, 58].

Рассмотрим на основе [60] методы выявления сенсоров и слабых мест в сложных ЭЭС, используя в общем случае линеаризованные уравнения баланса мощностей в узлах, связывающие изменения модулей ΔU и фаз $\Delta\delta$ узловых напряжений с изменениями активных ΔP и реактивных ΔQ нагрузок в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где J – квадратная вещественная матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \partial P/\partial\delta & \partial P/\partial U \\ \partial Q/\partial\delta & \partial Q/\partial U \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Для выявления сенсоров на основе анализа матрицы Якоби может использоваться ее сингулярное разложение [61]

$$J = V\Sigma W^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \sigma_i w_i^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

где $W = (w_1, \ldots, w_n)$ и $V = (v_1, \ldots, v_n)$ – ортогональные матрицы размера $n \times n$ каждая, i-е столбцы которых являются соответственно i-м левым и i-м правым ортонормированными сингулярными векторами; $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ – диагональная матрица сингулярных значений.

С учетом (19) выражение (17) может быть представлено как

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i^{\mathrm{T}} / \sigma_i \right) \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Если для упорядоченных по возрастанию сингулярных значений $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_n$ первое из них существенно меньше остальных, то при прочих равных условиях наибольший вклад в изменения модулей и фаз напряжений вносит первое слагаемое суммы в (20). Это позволяет представить (20) в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U \end{pmatrix}^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i = \left(v_1 w_1^{\mathrm{T}} / \sigma_1 \right) \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i, \tag{21}$$

где $\sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i$ – погрешность определения напряжений вследствие отбрасывания в (20) $n-1$ слагаемых.

Чем больше отличие первого сингулярного значения от остальных, тем меньше погрешность из-за отбрасывания $n-1$ слагаемых, и тем больше оснований делать выводы о характере поведения переменных режима, используя только первое слагаемое, связанное с σ_1.

При отмеченных выше условиях очевидно, что максимальные изменения модулей и фаз напряжений при изменениях нагрузок будут происходить в узлах, соответствующих максимальным компонентам первого правого сингулярного вектора,

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U \end{pmatrix}^{(1)} = v_1 \Delta S^{(1)} = \left(v_1 w_1^{\mathrm{T}} / \sigma_1 \right) \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Введение скалярной величины $\Delta S^{(1)}$, названной в [57] *первым обобщенным возмущением*, позволяет установить, что максимальные изменения модулей и фаз напряжений будут происходить в сенсорных узлах.

Оценка неоднородности электрической сети связана с определением *слабых мест* сети, от которых в большей степени зависит чувствительность ЭЭС. Слабые узлы и связи при учете инвариантных к режиму факторов могут быть найдены путем исследования следующих производных:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \gamma_{si}} = \pm v_{i1}^2, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \gamma_{ij}} = (v_{i1} + v_{j1})^2, \tag{24}$$

где γ_{ij} и γ_{si} – проводимость линии ij и шунта в узле i. Здесь и далее двойным индексом ij будем обозначать величины, которые относятся к связи между узлами i и j (потери мощности, напряжения и т.д.).

Изменения перетоков активной и реактивной мощности в связи ij $\Delta P_{ij} = (\partial P_{ij}/\partial \delta_{ij})\, \Delta\delta_{ij}$ и $\Delta Q_{ij} = (\partial Q_{ij}/\partial U_{ij})\, \Delta U_{ij}$ во многом определяются значениями $\Delta\delta_{ij}$ и ΔU_{ij}, которые можно найти по разности компонент первого правого сингулярного вектора $(v_{\delta i1} - v_{\delta j1})$ и $(v_{Ui1} - v_{Uj1})$, соответствующих фазам и модулям узловых напряжений в i-м и j-м узлах, и могут также использоваться как показатели слабости связи. Чем на большую величину при увеличении перетока по связи изменяются $\Delta\delta_{ij}$ и ΔU_{ij}, тем быстрее будет достигнут в ней предел передаваемой мощности и наступит вырождение матрицы Якоби.

Слабой может быть названа связь ij, изменение проводимости которой приводит к максимальному изменению минимального сингулярного значения σ_1:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \gamma_{ij}} = w_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial J}{\partial \gamma_{ij}} v_1 = (w_{1\delta}, w_{1U}) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 P}{\partial \delta\, \partial \gamma_{ij}} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial U\, \partial \gamma_{ij}} \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \delta\, \partial \gamma_{ij}} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial U\, \partial \gamma_{ij}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1\delta} \\ v_{1U} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Из выражения (25) следует, что на минимальное сингулярное значение оказывают влияние не только проводимости связей, но и переменные текущего режима. Ослабление связи и, соответственно, ухудшение обусловленности матрицы Якоби, связанные с изменением режима ЭЭС (например, его утяжелением, в результате которого может произойти нарушение статической устойчивости по углу или по напряжению), может быть ликвидировано соответствующими управлениями с использованием устройств FACTS (flexible alternating current transmission system — гибких систем передачи переменного тока), накопителей электроэнергии и других средств.

Таким образом, приведенный подход позволяет обоснованно выявлять слабые связи в структуре электрической сети ЭЭС и определять тем самым сильно связанные подсистемы, объединяемые в общую электросетевую структуру ЭЭС. Как отмечалось выше, нарушения статической устойчивости ЭЭС и каскадное развитие аварий при изменениях режима будут происходить прежде всего по слабым связям и менее вероятно по более сильным связям внутри сильно связанных подсистем. Поэтому исследования статической устойчивости ЭЭС необходимо производить прежде всего по отношению к слабым связям.

Структурная неоднородность ЭЭС определяет также специфику движения генераторов системы в переходном электромеханическом процессе, а именно когерентное их движение (условие когерентности движения генераторов представлено далее выражением (26)). Когерентность движения генераторов является объективным основанием для упрощения математической модели динамики ЭЭС посредством агрегирования (объединения) генераторов сильно связанных подсистем. Замена группы генераторов одним эквивалентным вносит погрешность в математическую модель динамики ЭЭС, определяемую пренебрежением межмашинными колебаниями. Погрешность тем меньше, чем более когерентным является движение объединяемых генераторов. Поэтому требуется разработка методов выявления когерентности движения генераторов ЭЭС.

Для решения перечисленных задач выявления когерентности движения генераторов в сильно связанных подсистемах и агрегирования когерентных групп генераторов, а также оценки статической устойчивости ЭЭС по отношению к слабым связям и определения управляющих воздействий для обеспечения устойчивости нашли применение методы модального анализа, рассмотренные в последующих разделах 4 и 5 данной статьи.

4. Выявление когерентности движения генераторов и упрощение моделей электроэнергетических систем

При анализе устойчивости сложных многомашинных ЭЭС и обосновании мероприятий по обеспечению их устойчивости исследователь сталкивается с двумя противоречивыми проблемами: с одной стороны, очевидна необходимость достаточно детального моделирования элементов (прежде всего, синхронных генераторов) и структуры системы для того, чтобы обоснованно учесть в модели системы все влияющие на ее устойчивость факторы; с другой стороны, получаемая в результате математическая модель сложной ЭЭС в целом в виде совместной системы нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений вида (1) становится необозримой и часто неподъемной для исследований, особенно в условиях дефицита времени при обосновании управляющих воздействий в цикле оперативного управления ЭЭС, когда в течение 10–15 мин требуется провести десятки расчетов по оценке статической устойчивости сложной ЭЭС при различных условиях и выбору управляющих воздействий для обеспечения устойчивости системы. В результате объективно возникает задача обоснованного упрощения математической модели динамики ЭЭС [25, 59, 62, 63] и др. Ключевым этапом упрощения математической модели является выявление когерентности движения генераторов в переходном процессе и представление (агрегирование) каждой из когерентных групп генераторов одним эквивалентным генератором.

Когерентность движения генераторов i и j (до недавнего времени в русскоязычной литературе использовался эквивалентный термин “синфазность”) определяется как

$$\delta_i(t) - \delta_j(t) = \text{const}, \tag{26}$$

где обозначения соответствуют (4).

Первоначально задача выявления когерентности движения генераторов решалась с использованием приближенных, часто эмпирических признаков и критериев. Новым качественным шагом явилось введение понятий локальной и глобальной когерентности движения генераторов [64]. Локальная когерентность определяется структурными свойствами подсистемы, генераторы которой тестируются на когерентность движения, и возмущениями; глобальная когерентность — лишь структурными свойствами, т.е. она инвариантна к возмущениям. Структурные свойства подсистемы отражают неоднородность структуры ЭЭС — сильные связи в подсистеме, определяющие когерентность движения ее генераторов, и слабые связи этой подсистемы с оставшейся частью системы (см. раздел 3) [58, 59, 65].

Развитие этого направления связано с использованием преобразования координат [3, 66]

$$\{\delta_i,\ \delta_j\} \longrightarrow \{\delta_{ic},\ \delta_{jc}, \delta_c\}, \tag{27}$$

где δ_{ic} – угол ротора генератора i по отношению к центру инерции подсистемы δ_c. Показано, что центры инерции когерентных подсистем совершают медленное движение, а координаты δ_{ic} – быстрые движения [62, 67, 68]. На этой основе введено понятие медленной когерентности, оценки которой инвариантны к возмущениям [69, 70].

Рассмотрим, используя [71], метод выявления когерентности движения на основе анализа межсистемных колебаний с помощью селективного модального анализа. При этом межсистемные моды колебаний определяются факторами участия (10), матрицу которых обозначим в соответствии с [72]:

$$PF = [pf_1, pf_2, \ldots, pf_n], \tag{28}$$

где

$$pf_i = \begin{bmatrix} v_i^1 w_i^1 \\ v_i^2 w_i^2 \\ \vdots \\ v_i^n w_i^n \end{bmatrix}, \forall\ i \in [1, \ldots, n]. \tag{29}$$

Абсолютные величины факторов участия, связанные с углами роторов синхронных генераторов классической модели ЭЭС (4), ранжированные в соответствии с их значениями, обозначены в (30) как PF_δ^{sort}. Окончательно минимальное количество j генераторов, удовлетворяющее требованию, сформулированному в (30), определяется для каждой моды, где g – общее количество генераторов:

$$(30)\qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{j} PF_{\delta}^{\text{sort}}(i)}{\sum\limits_{i=1}^{g} PF_{\delta}^{\text{sort}}(i)} > c, \quad \forall\, j \in [1, g]\,.$$

Значение c экспертно определяется в [71] величиной 0,9. Моды с более высоким значением индекса j являются кандидатами на межсистемные колебания.

После идентификации межсистемных мод производится формирование групп (кластеров) генераторов, которые определяются следующими требованиями:

— когерентность движения генераторов в группе;

— электрическая близость генераторов в группе.

Алгоритм идентификации когерентности работает при заданном количестве кластеров. Кластеры формируются по критерию минимизации суммы квадратов расстояний от центроида кластера [73].

В результате формируются два кластера для каждой межсистемной моды. Два кластера необходимы для того, чтобы учесть взаимные колебания мод. При этом с точки зрения принципа формирования кластеров предполагается классическая ситуация в кластерном анализе, когда задается число кластеров (в данном случаев два), а алгоритм кластеризации сам выбирает, какой объект куда отнести. Если существуют проблемы кластеризации собственных векторов в два независимых кластера (т.е. группировка нереалистична), формируются меньшие кластеры с комбинированием их по два кластера для каждой межсистемной моды.

Может оказаться, что когерентные генераторы в кластере расположены в разных географических зонах. Для исключения таких ситуаций анализируется электрическая близость генераторов в кластере по соотношению собственных и взаимных проводимостей генераторных узлов классической модели ЭЭС. Если генераторы в кластере располагаются в разных географических зонах, рассматриваемый кластер разбивается на соответствующее количество кластеров.

Динамический эквивалент когерентной группы генераторов (эквивалентный генератор) определяется различными методами, например в [74] — динамическим методом REI.

Рассмотрим еще некоторые характерные подходы к выявлению когерентности движения генераторов и формированию упрощенных моделей подсистем ЭЭС, прежде всего обзор возможных методов построения динамических эквивалентов ЭЭС [75], подготовленный рабочей группой IEEE PES, а также обзор [76].

В [75] при формировании низкочастотных эквивалентов рассматривается использование селективного модального анализа выделенной для упрощения линеаризованной части ЭЭС, в том числе для выявления когерентности движения генераторов. При этом отмечаются особенности подхода при сохранении структуры системы. Эквивалентная модель сокращенной сети должна правильно отражать ее реакцию; для ее настройки используется соответствующая оптимизационная процедура.

В [76] первоначально ЭЭС разбивается на исследуемую и внешнюю подсистемы, эквивалентная модель рассматривается для внешней подсистемы. Для этой подсистемы решается задача выявления когерентности движения генераторов, и среди представленных методов идентификации когерентности рассматривается использование селективного модального анализа в виде, близком описанному выше. Для построения внешнего эквивалента применяются различные подходы, один из них основан на использовании факторов участия, рассматриваемых в селективном модальном анализе, следующим образом [77, 78].

В когерентной группе генераторов выбирается генератор с наибольшим значением фактора участия, причем в качестве допущения принимается, что этот генератор в наибольшей мере отражает динамические характеристики когерентной группы. Остальные составляющие матрицы участия исключаются из рассмотрения. Эквивалентная постоянная инерции ротора эквивалентного генератора определяется формулой

$$T_{eq} = \sum_{j \epsilon G_k} h_j T_j, \tag{31}$$

$$h_j = P_{kj} / \sum_{j \epsilon G_k} P_{kj}, \tag{32}$$

где G_k – множество генераторов в группе k; P_{kj} – мощность генератора j в группе k.

В [79] представлен метод синхронного модального эквивалентирования для динамических эквивалентов, сохраняющих структуру системы. Выделяется исследуемая подсистема и одна или несколько внешних подсистем, для которых идентифицируются когерентные группы генераторов на основе оценки медленной когерентности с использованием селективного модального анализа. Для каждой внешней подсистемы оставляется один генератор, имеющий наибольшее значение фактора участия. Этот генератор описывается исходной моделью. Динамика остальных генераторов внешних подсистем представляется линеаризованной моделью в пространстве состояний.

В [80] предлагается оценка медленной когерентности движения генераторов ЭЭС на основе межсистемных модальных характеристик и иерархической восходящей классификации. Межсистемные модальные характеристики получаются с использованием преобразования Тэйлора–Фурье, которое интегрирует подпространства Тэйлора и Фурье в общее пространство. В результате преобразование Тэйлора–Фурье образует некоторый фильтр, который путем спектрального разложения колебательных мод выделяет моды, наименее восприимчивые к условиям наличия шумов. Иерархическая восходящая классификация использует метод Эльбоу для выделения когерентных групп генераторов.

В [81] представлен метод идентификации когерентных групп генераторов на основе сингулярного разложения (singular value decomposition — SVD) матрицы ЭЭС. Посредством этого метода вектор углов роторов генераторов высокой размерности проецируется на подпространство низкой размерности. В результате получаются коэффициенты подпространства как ключевые индикаторы когерентности. Затем идентификация когерентности осуществляется запуском кластеризации полученных коэффициентов методом k-средних. Снижение размерности задачи для алгоритма кластеризации методом SVD ускоряет идентификацию когерентности. Поскольку предложенный метод использует данные об углах роторов генераторов в режиме реального времени, он имеет хорошие перспективы для реализации идентификации когерентности в реальном времени.

В [82] рассматривается задача формирования динамической эквивалентной модели участка распределительной сети с использованием метода Прони (Prony analysis) и нелинейной оптимизации методом наименьших квадратов. Метод Прони оперирует линейной суммой экспоненциальных функций от собственных значений системы и используется для начальных оценок параметров модели, представляемой зависимостью Y от X, которая в дальнейшем оптимизируется нелинейным методом наименьших квадратов. В результате оптимизации определяются амплитуда, фаза, частота и демпфирующий коэффициент как параметры искомой модели, которая представляется в виде передаточной функции.

Как видно из изложенных в данном разделе результатов, различные модификации селективного модального анализа, наряду с другими методами, широко используются как для идентификации когерентных групп генераторов, так и при определении параметров упрощенных моделей подсистем, внешних по отношению к исследуемой подсистеме.

5. Исследование устойчивости электроэнергетических систем и управление ими

Как следует из условия (7), оценка статической устойчивости ЭЭС заключается в проверке выполнения этого условия для рассматриваемого состояния системы. При выборе управлений для обеспечения устойчивости ЭЭС задача заключается в том, чтобы за счет управлений обеспечить выполнение условия (7). Одновременно требуется, чтобы выбранное управление обеспечивало хорошее демпфирование колебаний, вызываемых возмущениями. Методы селективного модального анализа оказались эффективным инструментом для решения двух названных задач. Тем не менее математический аппарат модального анализа применительно к решению проблем устойчивости ЭЭС развивается. В данном разделе, не претендуя на полноту, приведем некоторые результаты в этом направлении.

Рассмотрим работы [83–89], характеризующие возрождение интереса к модальному анализу для исследований устойчивости ЭЭС у российских специалистов-электроэнергетиков.

В [83] изучается квадратическая проблема собственных значений с применением к различным задачам электроэнергетических систем. Соотношения (7), (9) представляют так называемую стандартную проблему собственных значений. В отличие от нее в квадратической проблеме собственных значений

(КПСЗ) изучаются свойства $n \times n$ матричных полиномов степени 2 (квадратических пучков матриц)

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K. \tag{33}$$

КПСЗ заключается в определении комплексных скаляров λ и ненулевых комплексных векторов v и w, удовлетворяющих алгебраическим уравнениям

$$Q(\lambda)\, v = 0, \quad w^{\mathrm{T}} Q(\lambda) = 0. \tag{34}$$

Использование КПСЗ дает определенные преимущества при анализе устойчивости линейных динамических систем по сравнению с решением стандартной проблемы собственных значений.

В [83] приводятся примеры использования КПСЗ в следующих электроэнергетических задачах: исследование устойчивости “в малом” сложной ЭЭС; анализ устойчивости валопроводов мощных турбоагрегатов; анализ сейсмической устойчивости арочных плотин гидроэлектростанций; экстраполяция поведения ЭЭС; оценивание состояния ЭЭС. Рассматриваются проблемы линеаризации и численных методов решения КПСЗ. Обсуждаются понятия спектра и псевдоспектра ЭЭС. Понятие спектра определено в разделе 2 при рассмотрении выражения (7). Теория псевдоспектров числовых матриц изучает изменения в расположении собственных значений, соответствующих исходной матрице, под влиянием возмущений.

Работа [84] посвящена оценке влияния возмущений на устойчивость ЭЭС. Отмечено, что элементы матрицы A в моделях реальных ЭЭС вида (5) определяются на основе физических наблюдений и измерений, а также расчетов по конструктивным параметрам элементов системы, и поэтому они содержат погрешности. Вследствие этого реальная матрица линеаризованной модели ЭЭС выглядит как $A + \Delta$, а сама модель может быть записана в виде

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta)\, x(t). \tag{35}$$

Здесь $\Delta \epsilon R^{n \times n}$ – матрица неизвестных возмущений, содержащая помимо перечисленных факторов также и реальные возмущения.

С помощью псевдоспектров формулируются и решаются две задачи: 1) можно ли определить, каким образом изменятся собственные значения матрицы A, и останется ли ЭЭС, описываемая моделью (35), асимптотически устойчивой при некоторых известных характеристиках матрицы возмущений Δ (например, максимальные значения модулей или норма матрицы Δ); 2) насколько велико может быть возмущение Δ, чтобы ЭЭС, описываемая моделью (35), оставалась асимптотически устойчивой.

Работа [85] рассматривает проблемы нелинейного модального взаимодействия в ЭЭС. Показано, что эффективным инструментом анализа нелинейного модального взаимодействия является метод нормальных форм Пуанкаре–Дюлака, дающий возможность в условиях отсутствия сильного резонанса мод колебаний посредством невырожденного нелинейного преобразования выполнять линеаризацию исходной нелинейной модели ЭЭС. Делается вывод, что полученные таким способом модели ЭЭС в виде нормальных форм могут быть использованы при решении задач анализа устойчивости системы, а также синтеза автоматических регуляторов (например, системных стабилизаторов) модальными методами.

Статья [86] посвящена анализу достоинств модального метода для анализа устойчивости ЭЭС. Отмечается, что возможности модального подхода чрезвычайно широки, и он постоянно активно развивается. С его помощью эффективно идентифицируются критические с точки зрения возможной потери устойчивости колебания в ЭЭС. Модальный подход дает возможность использовать разнообразные методы синтеза законов управления.

Статья [87] в определенном смысле обобщает результаты, полученные в [83–86]. Предложено в качестве обобщенной переходной функции возмущенного движения ЭЭС использовать норму матричной экспоненты. На основе понятий радиуса устойчивости и псевдоспектра матрицы Якоби определены необходимые и достаточные условия существования запасов статической устойчивости. Показаны возможности и преимущества совмещенного модального и линейно-квадратического подходов при синтезе централизованного и децентрализованного управлений, а также перспективы анализа нелинейных колебаний и обеспечения динамической устойчивости ЭЭС.

В [88] рассматривается задача выбора координированного противоаварийного управления устройствами FACTS и традиционными дискретными устройствами аварийного отключения генераторов и нагрузок для обеспечения динамической устойчивости ЭЭС, при этом оптимизация настройки пропорционально-интегрального регулятора FACTS обеспечивает приемлемое демпфирование колебаний в системе, которое контролируется положением собственных значений матрицы линеаризованной модели ЭЭС. В качестве критерия оптимизации рассматривается минимум аварийного недоотпуска электроэнергии потребителям.

Следует обратить внимание также на совместное российско-итальянское исследование медленных межсистемных колебаний в супербольшом энергообъединении, представленном совместно работающими объединенными ЭЭС (ОЭЭС) в составе систем континентальной Европы и ОЭЭС стран бывшего СССР [89]. Особенностью линеаризованной модели этого суперэнергообъединения было представление в ней современных элементов, таких как линии электропередачи и вставки постоянного тока, устройства FACTS, системные стабилизаторы и др. Исследования показали, что внутри ОЭЭС континентальной Европы и бывшего СССР могут возникать слабо-демпфированные низкочастотные моды колебаний, они также возникают между зонами разных ОЭЭС в сценарии совместной работы двух ОЭЭС на переменном токе. Использование устройств FACTS при соответствующих законах их регулирования позволяет демпфировать эти колебания.

В [90] авторы предлагают общее нелинейное модальное представление крупномасштабных ЭЭС. Показаны возможности использования для моделирования нелинейных систем методологии нормальных форм векторного поля. Для корректного представления поведения ЭЭС, ее колебаний и взаимодействия мод используется новый для электроэнергетики так называемый метод модальных рядов в форме рядов Тэйлора, имеющих полиномиальные нелинейности, которые характеризуют отклики нелинейной системы посредством соотношений в замкнутой форме. Этот метод развивает концепции теории линейных систем для понимания и анализа нелинейных систем, а также для конструирования систем управления ими.

Вследствие нестабильности рынка электроэнергии и растущего спроса на электроэнергию современные ЭЭС вынуждены работать все ближе к пределам своей устойчивости. В свою очередь, это делает систему более уязвимой и увеличивает риски потери устойчивости. Обычная практика оценки устойчивости и противоаварийного управления при планировании режимов и анализе возможных аварийных ситуаций (contingency analysis) включает задачу выявления и оценки критических колебаний и соответствующих им сечений сети, опасных с точки зрения потери устойчивости (слабых сечений – см. раздел 3). При этом критические колебания определяются на основе анализа собственных чисел, а для нахождения критических линий и узлов используются собственные векторы и матрицы чувствительностей токов и напряжений к соответствующим изменениям переменных состояния (sensitivity analysis). Пример методологии анализа чувствительностей для системы противоаварийного управления в случае неожиданного возникновения межрайонных колебаний описан в [91], где также приводятся результаты тестирования этой системы в большой реальной ЭЭС в Китае. Анализ чувствительностей к собственным модам позволяет также выявлять на графе электрической сети центры и “коридоры” критических качаний, опасных для устойчивости системы [92].

Традиционно устойчивость ЭЭС оценивается с помощью численного интегрирования ее модели в режиме офлайн для разных сценариев аварий, режимов функционирования и топологий сети. Существенно ускорить такие расчеты (как в режиме офлайн, так и в режиме реального времени) можно с помощью селективного модального анализа (СМА), который позволяет в итерационном процессе уменьшать размерность модели ЭЭС [12, 13] (см. раздел 4). На каждой итерации отбор генераторов для сокращенной модели происходит на основе величины соответствующих факторов участия. Например, в [93] СМА позволяет настолько уменьшить модель ЭЭС, чтобы к ней можно было применить метод линейных матричных неравенств (LMI) и построить робастный стабилизатор для подавления межрайонных колебаний.

Повышенное использование пропускных способностей линий электропередачи в последние десятилетия делает актуальной проблему неустойчивости по напряжению, которая развивается в лавину напряжения (voltage collapse). Для анализа устойчивости по напряжению факторы участия (ФУ) были определены для системы алгебраических уравнений потокораспределения как показатели, которые измеряют вклад критической моды Якобиана уравнений потокораспределения (power flow Jacobian) в переменную состояния системы [94] (см. (17)).

Кроме того, для задачи потокораспределения были определены как ФУ “мод в состояниях”, так и ФУ “состояний в модах” (ФУСМ) [24]. При этом ФУСМ зависят не только от переменных состояния в узлах сети, но и от вводимых активных и реактивных мощностей на линиях. Поэтому ФУСМ непосредственно показывают, какое необходимо сделать добавление активной мощности и компенсацию реактивной мощности, чтобы повысить устойчивость системы по напряжению.

Традиционно устойчивость "в малом" обеспечивается оптимальным размещением системных стабилизаторов (PSS) и настройкой их управляющих сигналов. В последние десятилетия контроллеры FACTS также признаны эффективным инструментом демпфирования слабо затухающих низкочастотных электромеханических колебаний, которые обычно имеют место в ЭЭС с длинными линиями передачи в условиях их сильной нагрузки. Тем не менее известно, что демпфирующий эффект контроллеров FACTS сильно зависит от их размещения и от настройки их систем управления. Соответствующие задачи могут эффективно решаться методами модального анализа. По-видимому, впервые метод факторов участия был применен для определения оптимального размещения PSS на графе электрической сети в [95]. В [96] факторы участия для критических мод используются для определения оптимального размещения статических регулируемых компенсаторов (staticvar-compensators — SVCs) с целью стабилизации напряжения. В [97] решается аналогичная задача оптимального расположения SVC и выбора управляющих сигналов в ЭЭС. Обширный обзор литературы на тему применения модального анализа для определения оптимального расположения и настройки управления контроллеров FACTS и PSS приведен в [26, раздел 3.1].

Особый вид управления в ЭЭС связан с разбиением больших взаимосвязанных электрических сетей на слабо связанные зоны, которыми можно было бы легче и эффективнее управлять (см. также раздел 3 данной статьи). Такое разбиение основано на теории графов и логически приводит к методу спектральной кластеризации [98, 99]. Как правило, разделение сети может обеспечить гибкое, распределенное и адаптивное управление системой электроснабжения крупного региона в рамках концепции интеллектуальных ЭЭС. Это позволяет одновременно представлять различные уровни кластеризации и выявлять количественную зависимость параметров получаемых моделей графов. Для организации и визуального представления иерархической структуры электрической сети используют дендрограммы, т.е. графический метод представления результатов иерархической кластеризации, который показывает степень близости отдельных энергетических объектов и кластеров, а также наглядно демонстрирует в графическом виде последовательность их объединения или разделения. Дендрограммы хранят информацию о дальнейших разделениях (или объединениях) электрической сети на более мелкие (более крупные) острова. В методе спектральной кластеризации используются собственные числа и векторы лапласовской матрицы электрической сети, описывающие ее электрическую связность и потокораспределение. Нормализованные координаты дендрограммы позволяют географически привязать вершины и ребра графа к структуре электрической сети. В [99] технологии спектральной кластеризации были продемонстрированы на примерах тестовой модели IEEE со 118 узлами, а также на модели ЭЭС Польши.

В [100] рассматривается задача построения модели ЭЭС пониженного порядка для настройки параметров системных стабилизаторов в крупных ЭЭС. Для решения этой задачи реализуются алгоритмы оптимизации, применяемые для упрощенной модели ЭЭС, в том числе модели с неустойчивыми полюсами. Метод построения упрощенной модели использует решение матричного уравнения Ляпунова высокой размерности на основе метода расширенных подпространств Крылова, а также разреженные матрицы Якоби линеаризованной модели системы. В [101] рассматривается задача создания глобального демпфирующего регулятора для демпфирования межрайонных колебаний в крупных континентальных ЭЭС. Особенностью подхода является использование систем мониторинга переходных режимов (СМПР) в качестве устройств измерения состояний энергетической системы и интеграция в регулятор существующих систем регулирования частоты в отдельных районах ЭЭС. Центральный регулятор построен по архитектуре LQG (Linear Quadratic Gaussian architecture) многосвязного регулятора, осуществляющего координирующее управление регуляторами частоты отдельных энергорайонов. Для настройки последних используется система оптимизации на принципах систем искусственного интеллекта — оптимизации роя частиц (Particle Swarm Optimization). Следует отметить, что в литературе известны и другие подходы к решению данной задачи, начиная от адаптивного робастного ПИД-регулятора и заканчивая сложными H2/Hinf регуляторами [102].

Работа [103] посвящена анализу устойчивости торсионных субсинхронных колебаний генераторов основной электрической сети, вызванных присоединением к ней ветропарков. Показано, что причиной появления слабодемпфированных и даже неустойчивых торсионных колебаний турбин генераторов является резонансное взаимодействие мод отдельных генераторов основной сети с модами генераторов ветропарков. В работе предложен критерий оценки риска угрозы потери устойчивости колебаний, который основан на вычислении вычетов передаточных функций объединенной ЭЭС.

В [55] метод спектральных разложений грамианов был применен для анализа статической устойчивости ЭЭС. На простом примере двухрайонной ЭЭС с четырьмя электростанциями было показано, что нормы членов спектрального разложения позволяют идентифицировать как локальные электромеханические моды, так и неустойчивости, вызванные межрайонными колебаниями. Работа [104] посвящена анализу устойчивости ЭЭС, основанному на спектральном разложении квадрата H_2-нормы передаточной функции системы. Поведение отдельных компонентов разложения позволяет на ранней стадии выявить и локализовать угрозу нарушения устойчивости. В тестовом численном эксперименте показано, что слабозатухающие низкочастотные колебания являются результатом взаимодействия между локальной подсистемой острова Русский и материковой энергетической системой. Такие колебания могут представлять наибольшую опасность для развития каскадной аварии и создавать биения с характерной разностной частотой.

6. Метод спектральных разложений функций Ляпунова в исследованиях электроэнергетических систем

В этом разделе рассматривается метод спектральных разложений функций Ляпунова, предложенный в [54, 55], и его применение для исследования динамического поведения ЭЭС. Интерес к этому методу обусловлен тем, что он имеет хорошую перспективу, чтобы стать основой для естественного объединения двух основных методологий при исследовании устойчивости ЭЭС, а именно, модального анализа и методов Ляпунова.

Рассмотрим динамическую систему (3) или (5) и алгебраическое уравнение Ляпунова (13), которое используется для анализа ее стационарного состояния. Для простоты дальнейшего изложения будем считать, что матрица системы A имеет простой спектр $\sigma(A)$. Определим матричные вычеты R_i как коэффициенты в разложении резольвенты матрицы A:

$$(Is - A)^{-1} = \frac{R_1}{s-\lambda_1} + \frac{R_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{R_n}{s-\lambda_n}. \tag{36}$$

Если $\lambda_i^* + \lambda_j \neq 0$ для всех $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$, то для любой матрицы Q существует единственное решение уравнения Ляпунова (13), которое можно представить в виде [56]

$$P = \sum_{i=1}^{n} \tilde{P}_i = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}, \quad \tilde{P}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}, \tag{37}$$

$$\tilde{P}_i = -\left\{ R_i^* Q (\lambda_i^* \ I + A)^{-1} \right\}_{Herm}, \quad P_{ij} = \left\{ \frac{-1}{\lambda_i^* + \lambda_j} R_i^* Q R_j \right\}_{Herm}, \tag{38}$$

где $\{\cdots\}_{Herm}$ – эрмитовая часть матрицы, а R_i и R_j – матричные вычеты, определенные в (36) и соответствующие собственным числам $\lambda = \lambda_i$ и $\lambda = \lambda_j$. Каждый член $\tilde{P}_i$ или P_{ij} в разложениях (37), (38) называется *субграмианом*. Он характеризует вклад соответствующих собственных мод или их пар в вариацию энергии системы, определяемую соответствующим грамианом на бесконечном интервале времени. В частности, нормы субграмианов увеличиваются, если частоты соответствующих им колебательных мод сближаются. Таким образом, найденные разложения открывают возможность количественной оценки резонансных модальных взаимодействий, происходящих в системе.

Спектральные разложения вида (37) для уравнения (13) были обобщены в [56] на более широкий класс решений матричных уравнений М.Г. Крейна, который в качестве частных случаев включает непрерывные и дискретные уравнения Ляпунова и Сильвестра. В [105] эти разложения были также распространены на случай обобщенных уравнений Ляпунова вида

$$A^{\mathrm{T}} P + PA + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma^{\mathrm{T}} P N_\gamma = -Q, \quad \text{где} \ \ Q = Q^{\mathrm{T}} > 0, \tag{39}$$

которые характеризуют свойства управляемости и наблюдаемости вектора состояний детерминированной билинейной системы [48], а матрицы $N_\gamma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ учитывают билинейные компоненты. Такие же уравнения (39) возникают при анализе устойчивости и стабилизации стохастических линейных систем [49, 106].

В [104, 107] метод субграмианов был применен для исследования устойчивости модели линейных непрерывных динамических систем, функционирующих вблизи границы устойчивости. Эффективным методом анализа статической устойчивости ЭЭС является выделение доминирующих слабоустойчивых мод и построение асимптотических моделей субграмианов для групп мод. Получены асимптотические выражения субграмианов в случае наличия одной, двух или трех доминирующих слабоустойчивых мод. Разработанный метод был применен для анализа статической устойчивости модели реальной ЭЭС на острове Русский. При этом была подтверждена принципиальная возможность использования субграмианов для идентификации резонансного взаимодействия между слабоустойчивыми собственными осцилляциями в системе, находящейся вблизи границы устойчивости.

В статье [108] были получены спектральные разложения для решения дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра с учетом ненулевых начальных условий. Эти решения называются конечными грамианами. В отличие от спектральных разложений бесконечных грамианов в (37) полученные разложения зависят от времени и позволяют анализировать устойчивость нестационарных систем, а также развитие неустойчивости в системе, потерявшей устойчивость. В численном эксперименте с моделью электросистемы острова Русский было показано, что предложенные разложения можно использовать для предсказания промежутка времени, в течение которого медленные переходные процессы приведут систему к нарушению устойчивости. Таким образом, спектральный анализ конечных грамианов позволяет получить прогноз риска на заданном временном отрезке и оценивать устойчивость ЭЭС в случае медленных переходных процессов.

В [109] сформулирована и решена задача разработки принципов построения и алгоритмов иммунной интеллектуальной системы мониторинга статической устойчивости ЭЭС на основе методов ассоциативного поиска, мультиагентного управления и спектральных разложений грамианов. Основная идея данного подхода состоит в формировании текущей дискретной динамической модели на основе методов ассоциативного поиска, основанного на использовании технологических архивов и интеллектуального анализа данных, и формировании оценки риска потери устойчивости ЭЭС с помощью спектральных разложений грамианов для текущей модели. Виртуальный анализатор риска потери устойчивости реализуется на основе использования современных методов идентификации и современных технологий обработки данных.

В статье [110] сформулирована и решена задача спектрального разложения решения дискретных матричных уравнений Ляпунова для дискретных билинейных динамических систем. Для построения решения использована предложенная в [111] итеративная процедура, состоящая в том, что на каждой итерации решается линейное матричное уравнение Ляпунова. Грамиан билинейной системы, являющийся решением обобщенного уравнения Ляпунова, представляет собой матричный ряд Вольтерра. Выведены формулы спектральных разложений итеративного процесса вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости дискретных билинейных систем. Полученные спектральные разложения дают возможность реализовать процедуры сбалансированного отсечения в задаче упрощения математической модели билинейной системы с учетом спектральных свойств матрицы динамики ее линейного приближения, а также вычислять энергетические функционалы с помощью предложенных итеративных процедур.

В [113] впервые субграмианы были соотнесены с переменными состояния системы и проведено их сравнение с соответствующими факторами участия. В численном эксперименте факторы участия и субграмианы были применены для селективного модального анализа тестовой модели IEEE с 57 узлами. Было отмечено, что наиболее влиятельные моды в смысле факторов участия необязательно важны в смысле их участия в усилении энергии возмущений в системе и наоборот. Это наблюдение открывает возможность создания нового направления в модальном анализе, который бы включал в себя принципы устойчивости Ляпунова на основе метода субграмианов [113]. Рассмотренные первые результаты использования метода субграмианов дают представление о перспективности этого направления применительно к задачам исследования устойчивости ЭЭС.

7. Заключение

Статья содержит обзор общего развития спектральных и модальных методов для оценки устойчивости динамических систем, а также их применения для мониторинга и управления устойчивостью больших сложных ЭЭС. Рассмотрены практические задачи мониторинга ЭЭС, такие как выявление критических межрайонных колебаний, неоднородностей структуры, слабых узлов и линий в сети, исследование когерентности движения генераторов и упрощение моделей ЭЭС. Рассмотрены также основные задачи управления устойчивостью в ЭЭС, такие как синтез и настройка автоматических регуляторов, их оптимальное размещение в сети для подавления межрайонных колебаний, координация противоаварийного управления между разными устройствами, управление устойчивостью по напряжению путем компенсации активной и реактивной мощностей на линиях, оптимальное разбиение сети на острова при авариях. Помимо традиционных подходов, основывающихся на линеаризованной модели системы, в обзоре также приводятся их расширения, позволяющие учитывать разные нелинейные эффекты. Например, рассматривается использование квадратичной проблемы собственных чисел и псевдоспектра матрицы динамики, метод нормальных форм Пуанкаре, использование спектральных разложений функций Ляпунова в модальном анализе. Приведенные в данной статье материалы демонстрируют интенсивное развитие методов модального анализа динамических систем вообще и активное применение и модернизацию этих методов для решения проблем анализа структурных свойств сложных ЭЭС, упрощения моделей динамики рассматриваемых систем, оценки их статической устойчивости и управления такими системами. Представленный обзор новейших разработок в части развития методов модального анализа с распространением его на нелинейные системы показывает потенциальные возможности эффективного решения проблем устойчивости сложных ЭЭС.

В качестве основного объекта приложения спектральных и модальных методов настоящий обзор рассматривает большие ЭЭС. При этом за пределами анализа остаются мини- и микросистемы, формируемые соответственно на основе распределительных электрических сетей напряжениями 6 – 10 – 20 – 35 кВ и 0,4 кВ. Эти системы, работающие изолированно или совместно с большими ЭЭС, имеют специфические структуру и свойства, порождающие специфику проблем их устойчивости и ее обеспечения [1, 114] и др. Анализ этих проблем и соответствующих методов их преодоления является предметом отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Milano F., Dörfler F., Hug G., et.al.* Foundations and challenges of low-inertia systems (invited paper) // Proc. 20 Power Systems Computation Conf. (PSCC). Manchester, UK, June 11–15, 2018.
2. *Воропай Н.И., Осак А.Б.* Электроэнергетические системы будущего // Энергетическая политика. 2014. Вып. 5. С. 60–63.
3. *Горев А.А.* Переходные процессы в синхронной машине. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1950.
4. *Жданов П.С.* Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1989.
5. *Kimbark E.W.* Power system stability. Books I, II, III. N.Y.: Wiley, 1948.
6. *Sylvester J.* Sur l'equation en matrices px = xq // Comptes Rendus de l'Acad. Sci., 1884.
7. *Lyapunov A.* Probleme general de la stabilite du movement / Commun. Soc. Math. Kharkov, 1893.
8. *Saad Y.* Numerical methods for large eigenvalue problems / Society for Industrial and Applied Mathematics. N.Y.: Wiley, 2011.
9. *Porter B., Crossley R.* Modal control. Theory and applications. London: Taylor and Fransis, 1972.
10. *Баринов В.А., Совалов С.А.* Анализ статической устойчивости электроэнергетических систем по собственным значениям матриц // Электричество. 1983. № 2. С. 8–15.
11. *Веников В.А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высш. шк., 1985.
12. *Perez-Arriaga I.J., Verghese G.C., Schweppe F.C.* Selective modal analysis with applications to electric power systems. Part I: Heuristic introduction // IEEE Trans. Power Apparat. Syst. 1982. V. 101. No. 9. P. 3117–3125.
13. *Verghese G.C., Perez-Arriaga I.J., Schweppe F.C.* Selective modal analysis with application to electric power systems. Part II: The dynamic stability problem // IEEE Trans. Power Apparat. Syst. 1982. V. 101. No. 9. P. 3126–3134.
14. *Pierre J.W., Trudnowski D., Donnelly M., et. al.* Overview of system identification for power systems from measured responses // IFAC Proc. Volumes. July 2012. V. 45. No. 16. P. 989–1000.
15. CIEE Final Project Report. Oscillation detection and analysis. 2010. Available at: http://www.uc-ciee.org/downloads/ODA Final Report.pdf [Accessed on 26 February 2018].
16. *Arnoldi W.E.* The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem // Quarterly Appl. Math. 1951. No. 9. P. 17–29.
17. *Wang L., Semlyen A.* Application of sparse eigenvalue techniques to the small signal stability analysis of large power systems // IEEE Trans. Power Syst. 1990. V. 5. No. 2. P. 635–642.

18. *Angelidis G., Semlyen A.* Improved methodologies for the calculation of critical eigenvalues in small signal stability analysis // IEEE Trans. Power Syst. 1996. V. 11. No. 3. P. 1209–1217.
19. *Rommes J.* Arnoldi and Jacobi-Davidson methods for generalized eigenvalue problems $Ax = \lambda Bx$ with singular B // Math. Comput. 2008. V. 77. No. 262. P. 995–1015.
20. *Rommes J., Martins N., Freitas F.* Computing rightmost eigenvalues for small-signal stability assessment of large-scale power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2010. V. 25. No. 2. P. 929–938.
21. *Martins N.* The dominant pole spectrum eigen-solver [for power system stability analysis] // IEEE Trans. Power Syst. 1997. V. 12. No. 1. P. 245–254.
22. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Матричная сигнум-функция в задачах анализа и синтеза линейных систем // АиТ. 2008. № 2. С. 26–51.

    Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Matrix sign function in the problems of analysis and design of the linear systems // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 2. P. 198–222.
23. *Pagola F.L., Pérez-Arriaga I.J., Verghese G.C.* On sensitivities, residues and participations: applications to oscillatory stability analysis and control // IEEE Trans. Power Syst. 1989. V. 4. No. 1. P. 278–285.
24. *Song Y., Hill D.J., Liu T.* State-in-mode analysis of the power flow Jacobian for static voltage stability // Int. J. Electric.Power Energy Syst. 2019. V. 105. P. 671–678.
25. *Chow J.H.* (Ed.) Power system coherency and model reduction. Heidelberg: Springer, 2013.
26. *Singh B., Sharma N.K., Tiwari A.N.* A Comprehensive Survey of Optimal Placement and Coordinated Control Techniques of FACTS Controllers in Multi-Machine Power System Environments // J. Electric. Engineer. Technol. 2010. V. 5. No. 1. P. 79–102.
27. *Genc I., Schattler H., Zaborszky J.* Clustering the bulk power system with applications towards Hopf bifurcation related oscillatory instability // Electric Power Components Syst. 2005. V. 33. No. 2. P. 181–198.
28. *Hamdan A.M.A., Nayfeh A.H.* Measures of modal controllability and observability for first and second order linear systems // J. Guidance, Control, Dynam. 1989. V. 12. No. 3. P. 421–428.
29. *Tawalbeh N.I., Hamdan A.M.* Participation factors and modal mobility // Engineer. Sci. 2010. V. 37. No. 2. P. 226–232.
30. *Hashlamoun W.A., Hassouneh M.A., Abed E.H.* New results on modal participation factors: Revealing a previously unknown dichotomy // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. V. 54. No. 7. P. 1439–1449.
31. *Hamzi B., Abed E.H.* Local modal participation analysis of nonlinear systems using Poincare linearization // Nonlinear Dyn. 2020. V. 99. P. 803–811.
32. *Vittal V., Bhatia N., Fouad A.A.* Analysis of the inter-area mode phenomenon in power systems following large disturbances // IEEE Trans. Power Syst. 1991. V. 6. No. 4. P. 1515–1521.
33. *Tian T., Kestelyn X., Thomas O., et.al.* An accurate third-order normal form approximation for power system nonlinear analysis // IEEE Trans. Power Syst. 2018. V. 33. No. 2. P. 2128–2139.
34. *Sanchez-Gasca J.J., Vittal V., Gibbard M.J., et. al.* Inclusion of higher order terms for small-signal (modal) analysis: committee report-task force on assessing the need

to include higher order terms for small-signal (modal) analysis // IEEE Trans. Power Syst. 2005. V. 20. No. 4. P. 1886–1904.

35. *Williams M.O., Kevrekidis I.G., Rowley C.W.* A Data-driven approximation of the Koopman operator: extending dynamic mode decomposition // J. Nonlinear Sci. 2015. V. 25. No. 6. P. 1307–1346.
36. *Netto M., Susuki Y., Mili L.* Data-driven participation factors for nonlinear systems based on Koopman mode decomposition // IEEE Control Syst. Lett. 2019. DOI: 10.1109/LCSYS.2018.2871887.
37. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
38. *Годунов С.К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002.
39. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
40. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
41. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
42. *Демиденко Г.В.* Матричные уравнения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос.ун-та, 2009.
43. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
44. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 50–22.
45. *Simoncini V.* Computational methods for linear matrix equations // SIAM Rev. 2014. V. 58. No. 3. P. 377–441.
46. *Shokoohi S., Silverman L.M., Van Dooren P.* Linear time-variable systems: balancing and model reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1983. V. AC-28. No. 8. P. 810–822.
47. *Verriest E., Kailath T.* On generalized balanced realizations // IEEE Trans. Automat. Control. 1983. Vol. AC-28. No. 8. P. 833–844.
48. *Gray W.S., Mesko J.* Energy functions and algebraic Gramians for bilinear systems // Preprints 4 IFAC Nonlinear Control Syst. Design Sympos. Enschede. The Netherlands, 1998.
49. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, energy functionals, and model order reduction of bilinear and stochastic systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. No. 2. P. 686–711.
50. *Moore B.C.* Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. AC-26. P. 17–32.
51. *Fernando K.V., Nicholson H.* On a fundamental property of the cross-Gramian matrix // IEEE Trans. Circuits Syst. 1984. V. CAS-31. No. 5. P. 504–505.
52. *Baur U., Benner P., Feng L.* Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective // Archiv. Comput. Method. Engineer. 2014. V. 21. No. 4. P. 331–358.
53. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM, Philadelphia, PA, USA. 2005.

54. *Ядыкин И.Б.* О свойствах грамианов непрерывных систем управления // АиТ. 2010. № 6. С. 39–50.

Yadykin I.B. On properties of gramians of continuous control systems // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 1011–1021.

55. *Yadykin I.B., Iskakov A.B., Akhmetzyanov A.V.* Stability analysis of large-scale dynamical systems by sub-Gramian approach // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2014. V. 24. P. 1361–1379.

56. *Yadykin I.B., Iskakov A.B.* Spectral decomposition for the solutions of Sylvester, Lyapunov, and Krein equations // Dokl. Math. 2017. V. 95. No. 1. P. 103–107.

Yadykin I.B., Iskakov A.B. Spectral decompositions for the solutions of Sylvester, Lyapunov, and Krein equations // Dokl. Math. 2017. V. 95. P. 103107.

57. *Гамм А.З., Голуб И.И.* Сенсоры и слабые места электроэнергетических систем. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1996.

58. *Войтов О.Н., Воропай Н.И., Гамм А.З. и др.* Анализ неоднородностей электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 1999.

59. *Абраменкова Н.А., Воропай Н.И., Заславская Т.Б.* Структурный анализ электроэнергетических систем: В задачах моделирования и синтеза. Новосибирск: Наука, 1990.

60. *Воропай Н.И., Гамм А.З., Голуб И.И., Ефимов Д.Н.* Предыстория и развитие исследований неоднородностей и слабых мест систем энергетики // Системные исследования в энергетике: Ретроспектива научных направлений СЭИ-ИСЭМ. Новосибирск: Наука, 2010.

61. *Малышев А.Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991.

62. *Гусейнов Ф.Г.* Упрощение расчетных схем электрических систем. М.: Энергия, 1978.

63. *Воропай Н.И.* Упрощение математических моделей динамики электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 1981.

64. *Dorsey J., Schlueter R.A.* Global and local dynamic equivalents based on structural archetypes for coherency // IEEE Trans. Power Apparat.Syst. 1983. V. 102. No. 6. P. 1793–1801.

65. *Eremia M., Shahidehpour M.* (Eds.) Handbook of electrical power system dynamics: Modeling, stability and control. Hoboken: Wiley – IEEE Press, 2013.

66. *Stanton K.M.* Dynamic energy balance studies for simulation of power-frequency transient // IEEE Trans. Power Apparat. Syst. 1972. V. 91. No. 1. P. 110–117.

67. *Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И.* Идеализация сложных динамических систем. М.: Наука, 1976.

68. *Chow J.H.* (Ed.) Time-scale modeling of dynamic networks with application to power systems. N.Y.: Lect. Notes Contr. Inf. Sci., 1982.

69. *Winkelman J.K., Chow J.H., Avramovich B., et. al.* An analysis of interarea dynamics of multimachine systems // IEEE Trans. Power Apparat. Syst. 1981. V. 100. No. 2. P. 754–763.

70. *Peponides G., Kokotovic P.V., Chow J.H.* Singular perturbations and time scales in nonlinear models of power systems // IEEE Trans. Circuits Syst. 1982. V. 29. No. 11. P. 758–767.

71. *Stadler J., Renner H., Koeck K.* An inter-area oscillation based approach for coherency identification in power systems // Proc. 18 Power Syst. Comput. Conf. Wroclaw. Poland. August 18–22, 2014.

72. *Kundur P.* Power system stability and control. N.Y.: McGraw-Hill, Inc., 1994.

73. *Wu J.* Advances in k-means clustering: A data mining thinking. Heidelberg: Springer, 2012.

74. *Stadler J., Renner H.* Application of dynamic REI reduction // Proc. 4 IEEE PES Innovat. Smart Grid Technol. Europe, Copenhagen, Denmark, October 6–9. 2013.

75. *Annakkage U.D., Nair N.K.C., Liang Yu., et al.* Dynamic system equivalents: A survey of available technique; IEEE PES Task Force on Dynamic Systems Equivalents // IEEE Trans. Power Delivery. 2012. V. 27. No. 1. P. 411–420.

76. *Singh R., Elizondo M., Lu Shuai.* A review of dynamic generator reduction methods for transient stability studies // Proc. 2011 IEEE PES General Meeting. Detroit, Michigan, USA. July 24–28, 2011.

77. *Kim H., Jang G., Song K.* Dynamic reduction of large-scale power systems using relation factor // IEEE Trans. Power Syst. 2004. V. 19. No. 3. P. 1696–1699.

78. *Milano F., Srivastava K.* Dynamic REI equivalents for short circuit and transient stability analyses // Electric Power Syst. Res. 2009. V. 79. No. 2. P. 878–887.

79. *Ramaswamy G.N., Rouco L., Filiatre O., Verghese G.C., et al.* Synchronic modal equivalencing (SME) for structure-preserving dynamic equivalents // IEEE Trans. Power Syst. 1996. V. 11. No. 1. P. 19–29.

80. *Paternina M.R.A., Zamora A., Chow J.H., Ramires J.M.* Power system coherency based on modal characteristics and hierarchical agglomerative clustering // Proc. 2017 IEEE Power Tech. Manchester, UK. June 18–22, 2017.

81. *Zhu Q., Chen J., Duan X., Sun X., Li Y., Shi D.* A method for coherency identification based on singular value decomposition // Proc. IEEE PES General Meeting. Boston, Massachusets, USA. July 17–21, 2016.

82. *Zali S.M., Milanovic J.V.* Dynamic equivalent model of distribution network cell using Prony analysis and nonlinear least square optimization // Proc. 2009 IEEE Bucharest Power Tech. Bucharest, Romania. June 28–July 2, 2009.

83. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Квадратическая проблема собственных значений в электроэнергетических системах // АиТ. 2006. № 5. С. 24–47.

Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. The quadratic eigenvalue problem in electric power systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. P. 698–720.

84. *Мисриханов М.Ш., Шаров Ю.В.* Оценка влияния возмущений на устойчивость электроэнергетической системы // Вестн. МЭИ. 2009. № 5. С. 42–48.

85. *Шаров Ю.В.* Нелинейное модальное взаимодействие в электроэнергетических системах // Электричество. 2016. № 12. С. 13–20.

86. *Шаров Ю.В.* О развитии методов анализа статической устойчивости электроэнергетических систем // Электричество. 2017. № 1. С. 12–17.

87. *Шаров Ю.В.* Применение модального подхода для решения проблемы обеспечения статической устойчивости электроэнергетических систем // Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 2. С. 13–29.

88. *Etingov P.V., Voropai N.I.* Power system stability enhancement using advanced automatic technology // Proc. Int. Conf. Advanced Power System Automation and Protection. Jeju, Korea. April 24–27, 2007.

89. *Gaglioti E., Iaria A., Panasetsky D., et al.* Inter-area oscillations in the CT/Turkey and IPS/UPS power systems // Proc. CIGRE Sympos. “Electric Power System for the Future – Integrating Supergrids and Microgrids”. Bologna, Italy. September 13–15, 2011.

90. *Shanechi H.M., Pariz N., Vaahedi E.* General nonlinear modal representation of large scale power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2003. V. 18. No. 3. P. 1103–1109.
91. *Cao J., Du W., Wang H., et. al.* A novel emergency damping control to suppress power system inter-area oscillations // IEEE Trans. Power Syst. 2013. V. 28. No. 3. P. 3165–3173.
92. *Chompoobutrgool Y., Vanfretti L.* Identification of Power System Dominant Inter-Area Oscillation Paths // IEEE Trans. Power Syst. 2013. V. 28. No. 3. P. 2798–2807.
93. *Pal A., Thorp S.* Co-ordinated control of inter-area oscillations using SMA and LMI // In: 2012 IEEE PES Innovat. Smart Grid Technolog. (ISGT). DOI: 10.1109/ISGT.2012.6175535.
94. *Gao B, Morison G, Kundur P.* Voltage stability evaluation using modal analysis // IEEE Trans. Power Syst. 1992. V. 7. No. 4. P. 1529–1542.
95. *Hsu Yuan-Yih, Chen Chern-Lin.* Identification of optimum location for stabilizers application using participation factors // IEE Proc. 1987. Pt. C. V. 134. No. 3. P. 238–244.
96. *Mansour Y., Xu W., Alvarado F., Rinzin Ch.* SVC placement using critical modes of voltage stability // IEEE Trans. Power Syst. 1994. V. 9. No. 2. P. 757–763.
97. *Farsangi M.M., Nezamabadi-pour H., Song Y.-H., Lee K.Yu.* Placement of SVCs and selection of stabilizing signals in power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2007. V. 22. No. 3. P. 1061–1071.
98. *Sánchez-Garcia R.J., Fennelly M., Norris S., Wright N., Niblo G., Brodzki J., Bialek J.W.* Hierarchical spectral clustering of power grids // IEEE Trans. Power Syst. 2014. V. 29. No. 5. P. 2229–2237.
99. *Wang C., Zhang B., Hao Z., Shu J., Li P., Bo Z.* A novel real-time searching method for power system splitting boundary // IEEE Trans. Power Syst. 2010. V. 25. No. 4. P. 1902–1909.
100. *Zhu Z., Geng G., Jiang Q.* Power system dynamic model reduction based on extended Krylov subspace method // IEEE Trans. Power Syst. 2016. V. 31. No. 6. P. 4483–4494.
101. *Dobrowolski J., Korba P., Segundo F.R., Sattinger W.* Centralized wide area damping controller for power system oscillation problems // HAL Id: hal01975194, https://hal-iogs.archives-ouvertes.fr/hal-01975194 Submitted on 9 Jan 2019.
102. *Беляев А.Н., Ядыкин И.Б., Смоловик С.В., Спиридонов С.В., Григорьев А.А.* Робастный адаптивный регулятор для демпфирования межрайонных колебаний в электроэнергетической системе // Электричество. 2011. № 6. С. 2–10.
103. *Du W., Fu Q., Wang H., Wang Y.* Concept of modal repulsion for examining the subsynchronous oscillations caused by wind farms in power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2019. V. 34. No. 1. P. 518–526.
104. *Yadykin I.B., Kataev D.E., Iskakov A.B., Shipilov V.K.* Characterization of power systems near their stability boundary using the sub-Gramian method // Control Eng. Practice. 2016. V. 53. P. 173–183.
105. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Спектральные разложения решений уравнений Ляпунова для билинейных динамических систем // ДАН. 2019. Т. 488. № 6. С. 599–603.

Yadykin I.B., Iskakov A.B. Spectral Decompositions for the Solutions of Lyapunov Equations for Bilinear Dynamical Systems // Dokl. Math. 2019. V. 100. P. 501–504.
106. *Damm T.* Direct methods and ADI-preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations // Numer. Linear Algebra Appl. 2008. V. 15. No. 9. P. 853–871.

107. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // АиТ. 2016. № 12. С. 37–58.

Yadykin I.B., Iskakov A.B. Energy approach to stability analysis of the linear stationary dynamic systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2132–2149.

108. *Yadykin I.B., Grobovoy A.A., Iskakov A.B., Kataev D.E., Khmelik M.S.* Stability analysis of electric power systems using finite Gramians // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 30. P. 548–553.

109. *Моржин Ю.Н., Ядыкин И.Б., Бахтадзе Н.Н.* Мультиагентная интеллектуальная иммунная система ИЭС ААС // Автоматизация в промышленности. 2012. № 4. С. 57–60.

110. *Yadykin I., Lototsky V., Bakhtadze N., Maximov Eu., Nikulina I.* Soft sensors of power systems stability based on predictive models of dynamic discrete bilinear systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 11. P. 897–902.

111. *Zhang L., Lam J.* On H_2 model order reduction of bilinear systems // Automatica. 2002. V. 38. No. 2. P. 205–216.

112. *Vassilyev S.N., Yadykin I.B., Iskakov A.B., Kataev D.E., Grobovoy A.A., Kiryanova N.G.* Participation factors and sub-Gramians in the selective modal analysis of electric power systems // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 14806–14811.

113. *Iskakov A.B., Yadykin I.B.* Lyapunov modal analysis and participation factors with applications to small-signal stability of power systems, arXiv:1909.02227 [math.OC], 2019.

114. *Huang Po-Hsu, Vorobev P., Al Hosani M., Kirtley J.L., Turitsyn K.* Plug-and play compliant control for inverter-based microgrids // IEEE Trans. Power Syst. 2019. V. 34. No. 4. P. 2901–2913.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 02.08.2019

После доработки 28.02.2020

Принята к публикации 25.05.2020