*Автоматика и телемеханика, № 10, 2020*

*Стохастические системы*

© 2020 г. **В.М. АЗАНОВ, канд. физ.-мат. наук (azanov59@gmail.com),**
**А.Н. ТАРАСОВ (tarrapid@gmail.com)**
**(Московский авиационный институт)**

# ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УДЕРЖАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ТРУБКЕ ПО КРИТЕРИЮ ВЕРОЯТНОСТИ[1]

Исследуется задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности удержания траекторий системы на заранее заданных множествах. С помощью метода динамического программирования и поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана находятся двусторонние оценки функции правой части соотношения динамического программирования, двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. С помощью этих результатов выводятся выражения для приближенного определения оптимального управления. В качестве примера рассматривается задача удержания перевернутого маятника в окрестности неустойчивого положения равновесия.

*Ключевые слова*: дискретные системы, стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, метод динамического программирования, функция Беллмана, перевернутый маятник.

**DOI:** 10.31857/S0005231020100037

## 1. Введение

Задачи оптимального управления дискретными стохастическими системами с вероятностным критерием представляют интерес в аэрокосмических [1–3], экономических [4–6] и робототехнических [7–9] приложениях. К настоящему моменту качественная теория этих задач проработана в плоскости вопросов существования оптимальных стратегий [1, 10]. В этих работах для случая, когда критерий представляет собой вероятность попадания терминального состояния на некоторое множество, получены достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. В [11] подобные условия получены для случая, когда критерий задан в виде вероятности пребывания траекторий стохастической системы в трубке. В [11] также показано, что указанные случаи являются взаимно приводимыми.

[1] Работа, за исключением раздела 4, выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-00062). Результаты раздела 4 получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00595).

Менее проработанной является методологическая и алгоритмическая сторона вопроса. Метод динамического программирования [1, 10] вычислительно связан с "проклятьем размерности", а в случае его аналитического применения даже для относительно "простых" малоразмерных задач известны результаты в основном для одношаговых [12, 13] и двухшаговых постановок [2, 5, 14]. Впоследствии данное направление получило развитие в [15, 16], где были найдены двусторонние границы функции Беллмана, на основе которых был предложен алгоритм поиска субоптимального управления. В [7–9] для широкого класса систем, точностных функционалов и случайных возмущений предложен численный метод поиска оптимального управления в классе полиномов. Данный результат не связан с методом динамического программирования и основан на сведении исходной задачи к задаче стохастического программирования большой размерности. В [17] этот метод был применен для решения задачи оптимального управления полиномиальной дискретной стохастической системой с критерием вероятности пребывания вектора состояния на заданных множествах, имеющих выпуклую структуру, в каждый момент времени.

В настоящей статье исследуется задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности пребывания ее траекторий в трубке. С помощью метода динамического программирования находятся соотношения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние границы функции правой части уравнения динамического программирования, двусторонние границы функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. С помощью нижней границы функции Беллмана находятся выражения для поиска субоптимального управления. Предлагается оценка точности субоптимального управления, исследуются его свойства. В качестве примера рассматривается задача управления простейшей маятниковой системой.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую управляемую систему с дискретным временем

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{k+1} = f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ – вектор управления, $U_k$ – множество ограничений на управление, $\xi_k$ – вектор случайных возмущений с значениями на $\mathbb{R}^s$ и известным распределением $\mathbf{P}_k$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ – функция перехода (функция системы), $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – горизонт управления.

В отношении системы (1) введем предположения:

1) известна полная информация о векторе состояния $x_k$ (данный факт позволяет строить управление в классе функций $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, где $\gamma_k\left(\cdot\right)$ – некоторая измеримая функция. В данном случае говорят, что "управление ищется в классе полной обратной связи по состоянию";
2) начальное состояние $x_0 = X$ является в общем случае случайным вектором с значениями в $\mathbb{R}^n$ и с известным распределением $\mathbf{P}_X$;

3) функция системы $f_k(x_k, u_k, \xi_k)$ непрерывна для всех $k$;
4) вектор управления $u_k$ формируется следующим образом: $u_k = \gamma_k(x_k)$, где $\gamma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – измеримая функция с ограниченными значениями $u_k \in U_k$, причем $U_k$ – компактное множество;
5) вектор состояния $x_{k+1}$ формируется следующим образом: на шаге $k$ реализуется вектор $x_k$, далее формируется вектор управления $u_k = \gamma_k(x_k)$ и в последнюю очередь реализуется случайное возмущение $\xi_k$;
6) управлением называется набор функций $u(\cdot) = (\gamma_0(\cdot), \dots, \gamma_N(\cdot)) \in \mathcal{U}$, классом допустимых управлений называется множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \ldots \times \mathcal{U}_N$, где $\mathcal{U}_k$ – множество борелевских функций $\gamma_k(\cdot)$ с ограниченными на $U_k$ значениями;
7) случайный вектор $\xi_k$ является непрерывным с значениями в $\mathbb{R}^s$ и известным распределением $\mathbf{P}_k$, причем компоненты вектора $\zeta = (X, \xi_0, \dots, \xi_N)$ независимы.

Заметим, что система (1) является марковской, т.е. ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием.

На траекториях системы (1) определим функционал вероятности

$$P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{x_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\}\right),$$

множества $\mathcal{F}_k$ имеют вид

$$\begin{cases} \mathcal{F}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \Phi_k(x) \leqslant \varphi\}, \quad k = \overline{1, N+1}, \\ \mathcal{F}_0 = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — известный скаляр, $\Phi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, $k = 1, \dots, N+1$, причем $\Phi_{N+1}(x)$ ограничена снизу.

Рассматривается задача

$$P_\varphi(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}, \tag{2}$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \ldots \times \mathcal{U}_N$.

Сформулируем достаточные условия оптимальности для задачи (2), доказанные в [11], имеющие форму метода динамического программирования.

## 3. Условия оптимальности в форме уравнения Беллмана

Определим функцию Беллмана $\mathsf{B}_k : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ в задаче (2) как

$$\mathsf{B}_k(x) = \sup_{\gamma_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k, \dots, \gamma_N(\cdot) \in \mathcal{U}_N} \mathbf{P}\Bigg(\max_{i=\overline{k,N}} \Phi_{i+1}\big(x_{i+1}\big(x_k, \gamma_k(\cdot), \dots \\ \dots, \gamma_i(\cdot), \xi_k, \dots, \xi_i\big)\big) \leqslant \varphi \Big| x_k = x\Bigg).$$

Принимая во внимание сделанные в разделе 2 предположения, сформулируем теорему об уравнении Беллмана для задачи (2) в пространстве состояний размерности $n$.

Теорема 1 [11]. *Пусть выполнены условия:*

1) *функции* $f_k(x_k, u_k, \xi_k)$ *непрерывны для всех* $k = \overline{0, N}$;
2) *функции* $\Phi_k(x_k)$ *непрерывны для всех* $k = \overline{1, N+1}$;
3) *функция* $\Phi_{N+1}(x_{N+1})$ *ограничена снизу*;
4) *случайные векторы* $X, \xi_0, \ldots, \xi_N$ *независимы в совокупности*;
5) *множества* $U_0, \ldots, U_N$ *компактны.*

*Тогда оптимальная стратегия в задаче* (2) *существует в классе измеримых функций* $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ *и определяется в результате решения следующих задач:*

$$u_k^* = \arg\max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k\Big[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k))\,\Big|x_k\Big], \tag{3}$$

$$\mathsf{B}_k(x) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k\Big[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k))\,\Big|x_k = x\Big], \quad k = \overline{0, N}, \tag{4}$$

$$\mathsf{B}_{N+1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_{N+1}}(x). \tag{5}$$

В формулах (3), (4) $\mathbf{M}_k[\cdot]$ означает оператор математического ожидания по распределению $\mathbf{P}_k$. Отличием уравнений (3)–(5) от уравнения Беллмана для задачи с вероятностным терминальным критерием является наличие в правой части сомножителя в виде индикаторной функции $\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)$ множества $\mathcal{F}_k$.

Отметим, что поиск оптимальной стратегии в соответствии с методом динамического программирования (3)–(5) даже для относительно простых примеров, например для задачи оптимальной импульсной коррекции траектории движения искусственного спутника Земли [18], затруднен. Причем трудности вычисления функции Беллмана распространяются как на численный, так и на аналитический пути решения задач. Как правило, удается найти управление, оптимальное лишь на последнем $k = N$ шаге по времени [2, 12, 13], и в более редких случаях так называемое двухшаговое управление $k = \overline{N-1, N}$ [4, 5, 14]. В [15, 16] для задачи оптимального управления дискретной системой с вероятностным терминальным критерием общего вида с помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана найдены двусторонние оценки функции правой части уравнения метода динамического программирования, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. На этом фундаменте предложен алгоритм приближенного поиска оптимального управления, который при определенных условиях дает точное решение. В следующем разделе аналогичные результаты распространяются на настоящую задачу (2).

## 4. Двусторонние оценки функции Беллмана

Введем в рассмотрение поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана

$$\mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k(x) = 1\}, \quad \mathcal{O}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k(x) = 0\}$$

и множество $\mathcal{B}_k = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k\}$. Для удобства введем обозначение $\overline{\mathcal{F}}_k = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}_k$. Нетрудно видеть, что из определения введенных множеств вытекает, что

$$\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k = \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} \mathsf{B}_k(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k, \\ \mathsf{B}_k(x) \in (0,1), & x \in \mathcal{B}_k, \\ \mathsf{B}_k(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. *Справедливы утверждения:*

1. *Множества* $\mathcal{I}_k$, $k=\overline{0,N}$ *удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени*

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cap \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u \in U_k : \quad \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) = 1\Big\}, \quad k=\overline{0,N},$$
$$\mathcal{I}_{N+1} = \mathcal{F}_{N+1};$$

2. *Множества* $\mathcal{O}_k$, $k=\overline{0,N}$ *удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени*

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}}_k \cup \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u \in U_k : \quad \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right) = 1\Big\}, \quad k=\overline{0,N},$$
$$\mathcal{O}_{N+1} = \overline{\mathcal{F}}_{N+1};$$

3. *Для* $x_k \in \mathcal{I}_k$ *оптимальным управлением на шаге* $k$ *является любой элемент из множества* $U_k^{\mathcal{I}}(x_k)$

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \Big\{u \in U_k : \quad \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x_k,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) = 1\Big\}; \tag{6}$$

4. *Для* $x_k \in \mathcal{O}_k$ *оптимальным управлением на шаге* $k$ *является любой элемент из множества* $U_k$*;*

5. *Уравнение Беллмана в области* $x \in \mathcal{B}_k$ *допускает представление*

$$\mathsf{B}_k(x) = \max_{u_k \in U_k} \Big\{\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) + \tag{7}$$
$$+ \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\right) \mathbf{M}_k \Big[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right) \;\Big|\; f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\Big]\Big\};$$

6. *Для* $x \in \mathcal{B}_k$ *и* $u_k \in U_k$ *справедлива система неравенств*

$$\begin{cases} \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] \geqslant \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right), \\ \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] \leqslant \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{F}_{k+1}\right), \\ \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] \leqslant 1 - \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right), \end{cases} \tag{8}$$

*причем*

$$1 - \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right) \leqslant \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{F}_{k+1}\right); \tag{9}$$

7. *Для* $x \in \mathcal{B}_k$ *функция Беллмана удовлетворяет двустороннему неравенству*

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) \leqslant \mathsf{B}_k(x) \leqslant \overline{\mathsf{B}}_k(x) \leqslant F_k(x), \tag{10}$$

*где*

$$F_k(x) = \sup_{u_k \in U_k} \mathbf{P}_k\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1}\right), \tag{11}$$

$\underline{\mathsf{B}}_k(x)$ *– нижняя, а* $\overline{\mathsf{B}}_k(x)$ *– верхняя оценки функции Беллмана:*

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \sup_{u_k \in U_k} \mathbf{P}_k\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right),$$
$$\overline{\mathsf{B}}_k(x) = \sup_{u_k \in U_k} \left\{1 - \mathbf{P}_k\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}\right)\right\},$$

*причем* $\underline{\mathsf{B}}_N(x) = \mathsf{B}_N(x) = \overline{\mathsf{B}}_N(x)$.

Доказательство теоремы 2 вынесено в Приложение.

Отличием правой части соотношений п. 1 теоремы 2 от соотношений для поверхности уровня 1 функции Беллмана в задаче с терминальным вероятностным критерием [15] является наличие операции пересечения с множеством $\mathcal{F}_k$. Для поверхности уровня 0 функции Беллмана отличие заключается в наличии операции объединения с множеством $\overline{\mathcal{F}}_k$. Пп. 3 и 4 устанавливают простейшие (относительно (3)) выражения для определения оптимального управления при $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$, которые с точностью до конструкций множеств $\mathcal{I}_k$ совпадают с аналогичными в задаче с терминальным вероятностным критерием. Пп. 6 и 7 теоремы 2 устанавливают двусторонние оценки функции правой части уравнения динамического программирования и функции Беллмана соответственно. При этом выражения для нижних и верхних границ с точностью до конструкций множеств $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{O}_k$ совпадают с аналогичными в задаче с терминальным критерием [15, 16]. Отличием же является наличие дополнительного неравенства (9) и, как следствие, неравенства $\overline{\mathsf{B}}_k(x) \leqslant F_k(x)$, которые усиливают верхние границы функции правой части уравнения метода динамического программирования и функции Беллмана. Отметим также, что из теоремы 1 и пп. 1 и 2 теоремы 2 следует важное геометрическое свойство множеств $\mathcal{I}_k$, $\mathcal{B}_k$ и $\mathcal{F}_k$, сформулированное в виде следствия.

Следствие. *Для всех* $k = \overline{0, N}$ *выполнено включение* $\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{F}_k$.

В [15, 16, 18] предложена идея поиска управления, которое максимизирует нижнюю границу функции правой части уравнения динамического программирования. В [18] получены условия, при которых такое управление является оптимальным, однако данные условия достаточно трудно проверить. В случае, когда такие условия не выполняются, ставится вопрос о том, насколько "хороша" предлагаемая стратегия и какое значение критерия она обеспечивает. В следующем разделе разъясняются некоторые из этих вопросов.

## 5. Субоптимальная стратегия и оценка точности

Рассмотрим стратегию $\underline{u}(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot), \ldots, \underline{\gamma}_N(\cdot)\right)$, где $\underline{u}_k = \underline{\gamma}_k(x_k)$, которая на каждом шаге $k$ максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения динамического программирования

$$(12) \qquad \underline{u}_k = \underline{\gamma}_k(x_k) = \arg\max_{u \in U_k} \mathbf{P}_k\left(f_k(x_k, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right), \quad k = \overline{0, N}.$$

Ввиду громоздкости выкладок и отсутствия общности опустим важнейшие вопросы существования такой стратегии и далее будем предполагать, что она существует в классе измеримых функций. Отметим, что необходимым условием существования, дополняющим условия 1–5 теоремы 1, является непустота множеств $\mathcal{I}_k$, $k = \overline{0, N}$. Исследования вопросов существования решения задач стохастического программирования с вероятностным критерием можно найти в монографии [19]. Получение таких условий является предметом дальнейших исследований.

Заметим, что из теоремы 1 и пп. 3 и 4 теоремы 2 следует, что такая стратегия является оптимальной при $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$, $k = \overline{0, N}$ и оптимальной для любых $x_k \in \mathbb{R}^n$ при $k = N$. В случае $x_k \in \mathcal{B}_k$, $k = \overline{0, N}$, как было сказано ранее, эта стратегия максимизирует нижнюю границу функции правой части уравнения динамического программирования. В настоящем разделе исследуются вопросы нижней границы значений вероятностного критерия на субоптимальной стратегии $P_\varphi(\underline{u}(\cdot))$.

Т е о р е м а 3. *Пусть стратегия* $\underline{u}(\cdot)$, *определяющаяся в результате решений задач* (12), *существует в классе* $\mathcal{U}$. *Тогда справедливы утверждения*:

1. *Справедливо представление*

$$(13) \qquad \begin{gathered} P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) = \underline{F}(\varphi, N) + \\ + \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{l} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcup_{k=0}^{l} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right), \end{gathered}$$

*где* $\underline{x}_k$ – *вектор состояния системы* (1), *замкнутой управлением* (12),

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = f_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \xi_k), \\ \underline{x}_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N};$$

2. *Справедливо представление*

$$(14) \qquad \begin{gathered} F(\varphi, N) = \underline{F}(\varphi, N) + \\ + \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l} \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{l} \{x_{k+1}^* \in \mathcal{I}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcup_{k=0}^{l} \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{x_{k+1}^* \in \mathcal{F}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcup_{k=0}^{N} \{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\}\right), \end{gathered}$$

*где* $x_k^*$ *– вектор состояния системы* (1), *замкнутой оптимальным управлением,*

$$\begin{cases} x_{k+1}^* = f_k\left(x_k^*, u_k^*, \xi_k\right), \\ x_0^* = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N};$$

3. *Выполнена система неравенств*

$$\underline{F}\left(\varphi, N\right) \leqslant P_\varphi\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) \leqslant F\left(\varphi, N\right) \leqslant \overline{F}\left(\varphi, N\right) \leqslant \mathbf{M}_X\left[F_0\left(X\right)\right], \tag{15}$$

*где* $F_0 : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ *определяется в соответствии с* (11) *и*

$$F(\varphi, N) = \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} P_\varphi(u\left(\cdot\right)), \quad \underline{F}(\varphi, N) = \mathbf{M}_X\left[\underline{\mathsf{B}}_0\left(X\right)\right], \quad \overline{F}(\varphi, N) = \mathbf{M}_X\left[\overline{\mathsf{B}}_0\left(X\right)\right].$$

*Выше* $\mathbf{M}_X\left[\cdot\right]$ *– оператор математического ожидания по распределению* $\mathbf{P}_X$.

Доказательство теоремы 3 вынесено в Приложение.

Из теоремы 3 видно, для субоптимальной стратегии $\underline{u}\left(\cdot\right)$ справедлива оценка точности

$$F\left(\varphi, N\right) - P_\varphi\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) \leqslant \Delta\left(\varphi, N\right), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\left(\varphi, N\right) = \overline{F}\left(\varphi, N\right) - \underline{F}\left(\varphi, N\right) - \\ - \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l} \left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{l} \left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\right\} \middle| \bigcup_{k=0}^{l} \left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) - \\ - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcup_{k=0}^{N} \left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

причем $\Delta\left(\varphi, N\right) \in [0, 1]$. Следует отметить вычислительную простоту получения оценки точности (17) субоптимальной стратегии. А именно, если найдена стратегия $\underline{u}\left(\cdot\right)$ и найдены нижняя $\underline{F}\left(\varphi, N\right)$ и верхняя $\overline{F}\left(\varphi, N\right)$ границы функции оптимальных значений вероятностного критерия, то достаточно воспользоваться методом Монте-Карло для оценки неизвестных вероятностей в правой части (17).

Применим полученные результаты в задаче оптимального управления перевернутым маятником.

## 6. Пример

Рассмотрим простейшую модель управления математическим маятником в окрестности неустойчивого положения равновесия. Динамика системы описывается разностным уравнением

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t_k \dot{\theta}_k, \\ \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + \left(-\gamma \Delta t_k \theta_k + u_k\right) \xi_k, \\ \theta_0 = \Theta, \\ \dot{\theta}_0 = \dot{\Theta}, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{18}$$

где $\theta_k$ – угол отклонения маятника, $\dot{\theta}_k$ – угловая скорость отклонения маятника, $u_k$ – управляющее воздействие, $\xi_k$ – непрерывная случайная величина, распределение которой конкретизируется ниже, $\Delta t_k$ – параметр дискретизации непрерывной системы, $\gamma$ – детерминированный параметр системы, $\left(\Theta, \dot{\Theta}\right)$ – начальные условия.

Пусть на траекториях системы (18) задан функционал вероятности.

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\max_{k=\overline{0,N}} \max\left\{\omega\left|\theta_{k+1}\right|,\ \dot{\omega}\left|\dot{\theta}_{k+1}\right|\right\} \leqslant \varphi\right), \tag{19}$$

где $\omega$, $\dot{\omega}$, $\varphi > 0$ – известные параметры. Ставится задача (2). Ее физический смысл в том, чтобы найти управление, которое удерживает маятник в окрестности неустойчивого положения равновесия, являющейся прямоугольником $\mathcal{F}_k = \left[-\varphi\omega^{-1}, \varphi\omega^{-1}\right] \times \left[-\varphi\dot{\omega}^{-1}, \varphi\dot{\omega}^{-1}\right]$ в пространстве состояний, с максимальной вероятностью. Введем обозначения

$$x_k = \begin{pmatrix}\theta_k\\ \dot{\theta}_k\end{pmatrix},\quad A_k = \begin{pmatrix}1 & \Delta t_k\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A_k^\xi = \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\gamma\Delta t_k & 0\end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad \Omega = \begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \dot{\omega}\end{pmatrix}$$

и запишем систему (18) и функционал вероятности (19) в векторном виде

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + \left(A_k^\xi x_k + B_k u_k\right)\xi_k, \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\max_{k=\overline{0,N}} \left\|\Omega x_{k+1}\right\|_\infty \leqslant \varphi\right).$$

Во введенных в статье обозначениях имеем $n=2$, $m=1$, $s=1$, $f_k(x_k, u_k, \xi_k) = A_k x_k + \left(A_k^\xi x_k + B_k u_k\right)\xi_k$, $U_k = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ \left\|\Omega x\right\|_\infty \leqslant \varphi\right\}$, $\Phi_k\left(x\right) = \left\|\Omega x\right\|_\infty$, где $\left\|x\right\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\left|x^i\right|$ – Гельдерова норма вектора. Заметим также, что несмотря на то, что $U_k$ не является компактом (что является одним из условий теоремы 1), теорема 1 не будет использована непосредственно в данном примере и, более того, условия теоремы 1 являются достаточными. Последнее означает, что если все-таки удается найти стратегию $u^*\left(\cdot\right)$ используя соотношения динамического программирования (3)–(5), то она является оптимальной [1].

Воспользуемся теоремой 2 и найдем поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана и оптимальное управление при $x_k \in \mathcal{I}_k$.

Пусть

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad \beta_k = \left(\prod_{j=k}^{N} A_j^{\mathtt{T}}\right) e_1 = \begin{pmatrix}1\\ \sum\limits_{j=k}^{N}\Delta t_j\end{pmatrix}.$$

*Лемма 1. Справедливы утверждения:*

1. *Поверхность уровня* 1 *функции Беллмана имеет вид*

$$\mathcal{I}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad \max \left\{ \|\Omega x\|_\infty, \ \max_{l=\overline{k,N}} \omega \left| \beta_l^{\mathsf{T}} x \right| \right\} \leqslant \varphi \right\}, \quad k = \overline{0,N};$$

2. *Поверхность уровня* 0 *функции Беллмана имеет вид*

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad \|\Omega x\|_\infty > \varphi \right\}, \quad k = \overline{0,N};$$

3. *Оптимальное управление при* $x_k \in \mathcal{I}_k$ *единственно и имеет вид*

$$u_k^* = -B_k^{\mathsf{T}} A_k^{\xi} x_k = \gamma \Delta t_k \theta_k, \quad x_k \in \mathcal{I}_k, \quad k = \overline{0,N}.$$

Доказательство леммы 1 вынесено в Приложение.

Из леммы 1 видно, что поверхность уровня 0 не меняется со временем, в то время как поверхность уровня 1 "уменьшается" с уменьшением $k$, т.е. $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{I}_N$. Следует также отметить, что в данном примере выполнено $\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k = \mathcal{F}_k$.

Выпишем выражения для нижней и верхней границ функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k$, $k = \overline{0, N-1}$

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \max_u \mathbf{P}\Bigg( \max\left\{ \dot{\omega} \left| e_2^{\mathsf{T}} \left( A_k x + \left( A_k^{\xi} x + B_k u \right) \xi_k \right) \right|, \right. \left. \max_{l=\overline{k,N}} \omega \left| \beta_{l+1}^{\mathsf{T}} \left( A_k x + \left( A_k^{\xi} x + B_k u \right) \xi_k \right) \right| \right\} \leqslant \varphi \Bigg), \tag{20}$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k(x) = F_k(x) = \max_u \mathbf{P}\left( \dot{\omega} \left| e_2^{\mathsf{T}} \left( A_k x + \left( A_k^{\xi} x + B_k u \right) \xi_k \right) \right| \leqslant \varphi \right). \tag{21}$$

Поскольку поиск решений задач (20) и (21) при любом распределении случайного возмущения $\xi_k$ затруднен, рассмотрим случай гауссовского распределения.

*Лемма 2. Пусть* $\xi_k \sim \mathcal{N}\left(m_\xi, \sigma_\xi^2\right)$, *где* $m_\xi > 0$. *Тогда справедливы утверждения:*

1. *Решения задач стохастического программирования* (20) *при* $x_k \in \mathcal{B}_k$, $k = \overline{0, N-1}$ *имеют вид*

$$\underline{u}_k = -2c_k(x_k) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma_\xi^2}{m_\xi^2} \ln\left( \frac{|c_k(x_k)| + r_k(x_k)}{|c_k(x_k)| - r_k(x_k)} \right)} \right)^{-1} - B_k^{\mathsf{T}} A_k^{\xi} x_k, \tag{22}$$

*где функции* $\underline{\varphi}_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\overline{\varphi}_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *имеют вид*

$$\underline{\varphi}_k(x) = \max\left\{ \frac{-\varphi \dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi}, \ \max_{l=\overline{k,N}} \frac{-\varphi \omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi e_2^{\mathsf{T}} \beta_{l+1}} \right\},$$

$$\overline{\varphi}_k(x) = \min\left\{\frac{\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi},\ \min_{l=\overline{k,N}} \frac{\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi e_2^{\mathsf{T}} \beta_{l+1}}\right\},$$

$$c_k(x) = -\frac{1}{2}\left(\underline{\varphi}_k(x) + \overline{\varphi}_k(x)\right), \quad r_k(x) = \frac{1}{2}\left(\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)\right);$$

2. *Нижняя граница функции Беллмана при* $x \in \mathcal{B}_k$ *имеет вид*

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \Phi\left(\frac{r_k(x) + |c_k(x)|}{\sigma_\xi m_\xi^{-1}\left|e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k^\xi x + B_k \underline{u}_k\right)\right|} - \frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(\frac{-r_k(x) + |c_k(x)|}{\sigma_\xi m_\xi^{-1}\left|e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k^\xi x + B_k \underline{u}_k\right)\right|} - \frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right); \tag{23}$$

3. *Решения задач стохастического программирования* (21) *при* $x_k \in \mathcal{B}_k$, $k = \overline{0, N-1}$ *имеют вид*

$$\overline{u}_k = \begin{cases} -B_k^{\mathsf{T}} A_k^\xi x_k, & \left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x_k\right| \leqslant \varphi\dot{\omega}^{-1}, \\ -\dfrac{2e_2^{\mathsf{T}} A_k x_k}{m_\xi}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2\sigma_\xi^2}{m_\xi^2}\ln\left(\dfrac{\left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x_k\right| + \varphi\dot{\omega}^{-1}}{\left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x_k\right| - \varphi\dot{\omega}^{-1}}\right)}\right)^{-1} - B_k^{\mathsf{T}} A_k^\xi x_k, & \\ & \left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x_k\right| > \varphi\dot{\omega}^{-1}; \end{cases} \tag{24}$$

4. *Верхняя граница функции Беллмана при* $x \in \mathcal{B}_k$ *имеет вид*

$$\overline{\mathsf{B}}_k(x) = \tag{25}$$

$$= \begin{cases} 1, & \left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x\right| \leqslant \varphi\dot{\omega}^{-1}, \\ \Phi\left(\dfrac{\varphi\dot{\omega}^{-1} + \left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x\right|}{\sigma_\xi\left|e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k^\xi x + B_k \overline{u}_k\right)\right|} - \dfrac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\varphi\dot{\omega}^{-1} + \left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x\right|}{\sigma_\xi\left|e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k^\xi x + B_k \overline{u}_k\right)\right|} - \dfrac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right), & \\ & \left|e_2^{\mathsf{T}} A_k x\right| > \varphi\dot{\omega}^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 вынесено в Приложение.

В лемме 2 введено обозначение $\Phi(x)$ – функция Лапласса

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{t^2/2} dt.$$

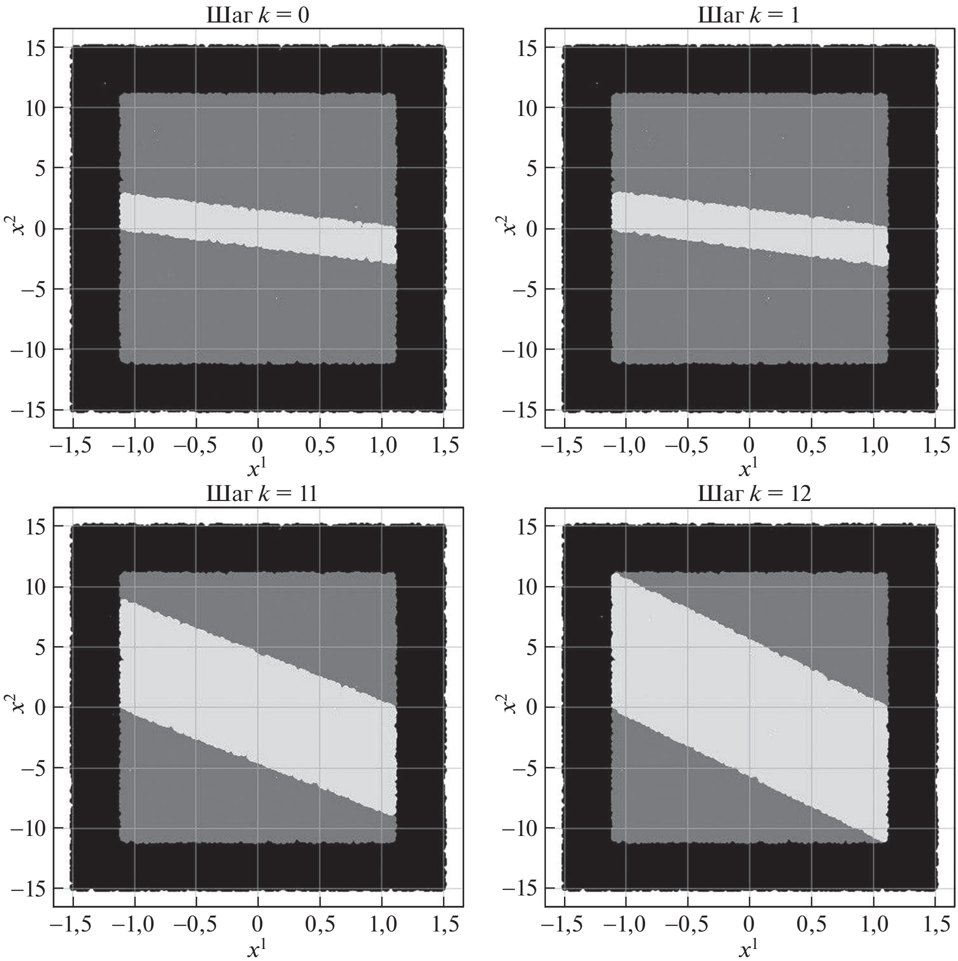


Рис. 1. Множества $\mathcal{O}_k$ (черная область), $\mathcal{B}_k$ (темно-серая область), $\mathcal{I}_k$ (светло-серая область), $k = 0, 1, 11, 12$.

Итого получаем следующее выражение субоптимального управления для всех $k = \overline{0, N}$.

$$
(26)\quad \underline{u}_k = \begin{cases} -B_k^{\mathrm{T}} A_k^{\xi} x_k, & x_k \in \mathcal{I}_k, \\ -2c_k(x_k)\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2\sigma_\xi^2}{m_\xi^2} \ln\left(\dfrac{|c_k(x_k)| + r_k(x_k)}{|c_k(x_k)| - r_k(x_k)}\right)}\right)^{-1} - B_k^{\mathrm{T}} A_k^{\xi} x_k, & \\ & x_k \in \mathcal{B}_k, \\ \text{любое}, & x_k \in \mathcal{O}_k, \end{cases}
$$

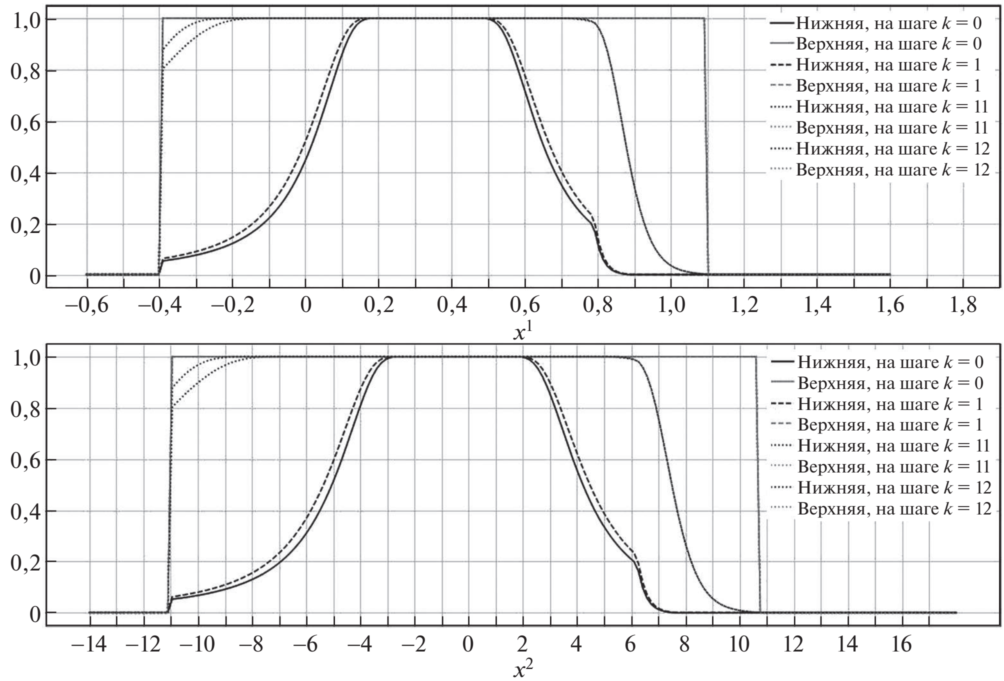


Рис. 2. Нижняя $\underline{\mathsf{B}}_k(x)$ и верхняя $\overline{\mathsf{B}}_k(x)$ границы функции Беллмана при $k = 0, 1, 11, 12$.

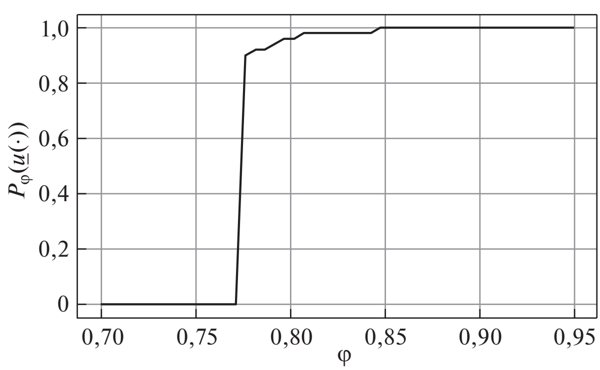


Рис. 3. Значение критериальной функции в зависимости от $\varphi$.

а замкнутая система принимает вид

$$x_{k+1} = \begin{cases} A_k x_k, & x_k \in \mathcal{I}_k, \\ A_k x_k + \left( A_k^{\xi} x_k + B_k \underline{u}_k \right) \xi_k, & x_k \in \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

Отметим интересное свойство найденного управления. При $x_k \in \mathcal{I}_k$ в силу включения $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{F}_k$ (см. следствие к теореме 2) система уже находится в окрестности неустойчивого положения равновесия $\mathcal{F}_k$. Причем режим управления, соответствующий первой ветви (26), "зануляет" стохастическое сла-

Значения параметров системы

| $N$ | $t_k$ | $\varphi$ | $\gamma$ | $\omega$ | $\dot{\omega}$ | $m_\xi$ | $d_\xi$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 0,05 | 1,1 | 0,8 | 1 | 0,1 | 0,9 | 0.1 | [0,65, 2,5] |

гаемое в системе, и она таким образом становится детерминированной при $x_k \in \mathcal{I}_k$.

Проведем численный эксперимент для системы (18), замкнутой управлением (26). Значения параметров системы занесены в таблицу.

На рис. 1 изображены поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана в пространстве состояний на разных шагах дискретного времени. На рис. 2 изображены нижняя и верхняя границы функции Беллмана. На рис. 3 приведен график значений вероятностного критерия при субоптимальном управлении. Оценка точности (17) субоптимального управления равна 0,059, что демонстрирует его близость к оптимальному и обоснованность предлагаемого в статье подхода.

## 7. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности пребывания вектора состояния в каждый момент времени на заданных множествах. С помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана получены двусторонние оценки функции правой части уравнения динамического программирования, двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. Найдены выражения для приближенного поиска оптимального управления. В качестве примера рассмотрена модельная задача удержания перевернутого маятника в неустойчивом положении равновесия. Для данной модели субоптимальное управление найдено в явном виде.

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

*Доказательство теоремы 2.* Из определения множеств $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{O}_k$ и соотношений динамического программирования (3)–(5) имеем:

$$\text{(П.1)}\quad \mathcal{I}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[ \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\, \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \,\middle|\, x_k = x \right] = 1 \right\},$$

$$\text{(П.2)}\quad \mathcal{O}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[ \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\, \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \,\middle|\, x_k = x \right] = 0 \right\}.$$

Рассмотрим некоторый шаг $k$ алгоритма динамического программирования (3)–(5). С учетом базовых свойств множеств $\mathcal{I}_k$, $\mathcal{B}_k$, $\mathcal{O}_k$ выполнено тождество

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_{k+1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k}(x)\, \mathsf{B}_{k+1}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{B}_k}(x)\, \mathsf{B}_{k+1}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{O}_k}(x)\, \mathsf{B}_{k+1}(x) = \\ = \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k}(x)\, \mathsf{B}_{k+1}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{B}_k}(x)\, \mathsf{B}_{k+1}(x).\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий,

$$\{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\}, \quad \{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1}\}.$$

Преобразуем выражение (4) с использованием формулы полного математического ожидания

$$
\text{(П.3)}\qquad \begin{aligned}
\mathsf{B}_k(x) &= \max_{u_k\in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k,u_k,\xi_k))\,\middle|\,x_k=x\right] = \\
&= \max_{u_k\in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\right] = \\
&= \max_{u_k\in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\right] = \\
&= \max_{u_k\in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\Bigg(\mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)\times \\
&\times \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\,\middle|\,f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right] + \\
&+ \mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right)\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\,\middle|\,f_k(x,u_k,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right]\Bigg).
\end{aligned}
$$

С учетом равенства

$$
\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\,\middle|\,f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right] = 1
$$

выражение (П.3) принимает вид

$$
\text{(П.4)}\qquad \begin{aligned}
\mathsf{B}_k(x) &= \max_{u_k\in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\Big(\mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right) + \\
&+ \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1})\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\,\middle|\,f_k(x,u_k,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right]\Big) = \\
&= \max_{u_k\in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\Big(\mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}) + (1-\mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}))\times \\
&\times \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\,\middle|\,f_k(x,u_k,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right]\Big).
\end{aligned}
$$

Поскольку выполнено

$$
\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k))\,\middle|\,f_k(x,u_k,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right] \in [0,1),
$$

то правая часть (П.4) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда

$$
\max_{u_k\in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right) = 1.
$$

Отсюда видно, что (П.1) принимает вид

$$
\text{(П.5)}\qquad \begin{aligned}
\mathcal{I}_k &= \left\{x\in\mathbb{R}^n\colon \max_{u_k\in U_k}\mathbf{M}_k\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k,u_k,\xi_k))\,\middle|\,x_k=x\right]=1\right\} = \\
&= \left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad \max_{u_k\in U_k}\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)=1\right\} = \\
&= \mathcal{F}_k\cap\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad \max_{u_k\in U_k}\mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)=1\right\} = \\
&= \mathcal{F}_k\cap\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad \exists u_k\in U_k:\quad \mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)=1\right\}.
\end{aligned}
$$

Из (П.5) получаем, что при $x_k \in \mathcal{I}_k$ оптимальным управлением является любой элемент из множества

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \{u \in U_k : \ \mathbf{P}(f_k(x_k, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1\}. \tag{П.6}$$

Пп. 1, 3 и 5 теоремы 2 доказаны.

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий,

$$\{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\}, \quad \{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}\}, \quad \{f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}\}.$$

Преобразуем выражение (4) с использованием формулы полного математического ожидания

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_k(x) &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k, u_k, \xi_k))\,\middle|\,x_k = x\right] = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\right] = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\right] = \\ &= \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\Bigg(\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \times \\ &\times \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\,\middle|\,f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right] + \\ &+ \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1})\,\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\,\middle|\,f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}\right] + \\ &+ \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1})\,\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\,\middle|\,f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}\right]\Bigg).\end{aligned} \tag{П.7}$$

С учетом справедливости равенств

$$\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\,\middle|\,f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right] = 1,$$
$$\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\,\middle|\,f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}\right] = 0$$

выражение (П.1) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_k(x) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\Big(&\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \\ &+ \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1})\,\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\,\middle|\,f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}\right]\Big).\end{aligned} \tag{П.8}$$

Поскольку выполнено

$$\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u_k, \xi_k))\,\middle|\,f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}\right] \in (0, 1),$$

то правая часть выражения (П.8) равна 0, если

$$\begin{cases}\max\limits_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 0, \\ \max\limits_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\,\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) = 0\end{cases}$$

или, что то же самое,

$$
\forall u_k \in U_k : \begin{cases} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 0, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)(1 - \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) - \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1})) = 0. \end{cases}
$$

Отсюда с учетом (П.2) получаем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_k &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[ \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x_k)\, \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x_k,u_k,\xi_k)) \,\middle|\, x_k = x \right] = 0 \right\} = \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \max_{u_k \in U_k} \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\, \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \right\} = \\
&= \overline{\mathcal{F}}_k \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \max_{u_k \in U_k} (x)\, \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \right\} = \\
&= \overline{\mathcal{F}}_k \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k \in U_k : \quad (x)\, \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \right\}.
\end{aligned}
\tag{П.9}
$$

Из (П.9) видно, что при $x_k \in \mathcal{O}_k$ любое допустимое управление $u_k \in U_k$ является оптимальным.

Пп. 2 и 4 теоремы 2 доказаны.

Рассмотрим уравнение Беллмана в форме (П.8). Пусть $x \in \mathcal{B}_k$, тогда

$$
\begin{aligned}
\mathsf{B}_k(x) &= \max_{u_k \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \times \\
&\qquad \times \mathbf{M}_k \left[ \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k)) \,\middle|\, f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] \Big\} = \\
&= \max_{u_k \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \\
&\qquad + \Big( 1 - \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) - \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) \Big) \times \\
&\qquad \times \mathbf{M}_k \left[ \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k)) \,\middle|\, f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] \Big\} = \\
&= \max_{u_k \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \times \\
&\qquad \times \Big( 1 - \mathbf{M}_k \left[ \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k)) \,\middle|\, f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] \Big) + \\
&\qquad + (1 - \mathbf{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1})) \times \\
&\qquad \times \mathbf{M}_k \left[ \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u_k,\xi_k)) \,\middle|\, f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] \Big\}.
\end{aligned}
\tag{П.10}
$$

Воспользуемся известным неравенством

$$
\min_{i=\overline{1,n}} z_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} z_i, \quad a_1, \ldots, a_n \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.
$$

Если формально принять, что

$$a_1 = \mathbf{M}_k \left[ \mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right) \middle| f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1} \right],$$

$$a_2 = 1 - \mathbf{M}_k \left[ \mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right) \middle| f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1} \right],$$

$$z_1 = \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right), \quad z_2 = 1 - \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right),$$

то справедлива двусторонняя оценка для функции правой части уравнения Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k$

$$\min_{i=\overline{1,2}} z_i \leqslant \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right] \leqslant \max_{i=\overline{1,2}} z_i.$$

В силу равенства

$$\mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) + \mathbf{P}(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1$$

для $z_2$ справедливо другое представление

$$z_2 = \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) + \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\right).$$

Следовательно $z_2 \geqslant z_1$ и выполнено

$$z_1 \leqslant \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right] \leqslant z_2.$$

Из пп. 1 и 2 теоремы 2 видно, что для всех $k = \overline{0, N}$ выполнено $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{O}_k$, откуда получаем $\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{F}_k$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) + \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{F}_{k+1}\right),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right] \leqslant \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{F}_{k+1}\right).$$

Таким образом, справедлива система неравенств (8). Если взять супремум по $u_k \in U_k$ во всех частях неравенств, то получаем (10). Пп. 6 и 7 теоремы 2 доказаны.

Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Введем систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$\left\{ \bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right\}, \quad \left\{ \bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right\}.$$

Тогда с учетом формулы полной вероятности справедлива цепочка равенств

$$P_\varphi\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left( \bigcap_{k=0}^{N} \left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \right) =$$

$$= \mathbf{P}\left( \bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P}\left( \bigcap_{k=0}^{N} \left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \right) + \tag{П.11}$$

$$+ \mathbf{P}\left( \bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right) \mathbf{P}\left( \bigcap_{k=0}^{N} \left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\} \right).$$

Заметим, что из определения стратегии $\underline{u}(\cdot)$, а также из свойств множества $\mathcal{I}_k$ (п. 1 теоремы 2) следует, что

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\right) = 1 \quad \text{при} \quad \underline{x}_k \in \mathcal{I}_k, \quad k = \overline{0, N}. \tag{П.12}$$

Тогда с учетом включения $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{F}_k$ для всех $k = \overline{1, N+1}$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right) = 1 \quad \text{при} \quad \underline{x}_k \in \mathcal{I}_k, \quad k = \overline{0, N},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) = 1.$$

С учетом последнего равенства выражение (П.11) принимает вид

$$\begin{aligned} P_\varphi\left(\underline{u}(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right). \end{aligned} \tag{П.13}$$

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$\left\{\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right\}, \quad \left\{\bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right\}.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для первого слагаемого в правой части (П.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right). \end{aligned} \tag{П.14}$$

С учетом (П.12) преобразуем правую часть (П.14), откуда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcup_{k=0}^{N-1} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right). \end{aligned} \tag{П.15}$$

Выполним подстановку (П.15) в (П.13)

$$
\begin{aligned}
P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1}\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N-1}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N-1}\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\}\,\middle|\,\bigcup_{k=0}^{N-1}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N}\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\}\,\middle|\,\bigcup_{k=0}^{N}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right).
\end{aligned}
\tag{П.16}
$$

Проводя аналогичные преобразования в отношении первого слагаемого в (П.16), вводя системы гипотез

$$
\left\{\bigcap_{k=0}^{l}\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right\}, \quad \left\{\bigcup_{k=0}^{l}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right\}, \quad l = \overline{1, \ldots, N-2},
$$

получаем следующее выражение для значения вероятностного критерия на стратегии $\underline{u}(\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
P_\varphi(\underline{u}(\cdot)) = \mathbf{P}(\underline{x}_1 \in \mathcal{I}_1) + \\
+ \sum_{l=1}^{N-1}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{l}\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\}\,\middle|\,\bigcup_{k=0}^{l}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N}\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\}\,\middle|\,\bigcup_{k=0}^{N}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right).
\end{aligned}
\tag{П.17}
$$

Заметим теперь, что для первого слагаемого (П.17) справедлива цепочка равенств

$$
\mathbf{P}(\underline{x}_1 \in \mathcal{I}_1) = \mathbf{P}(f_0(X, \underline{u}_0, \xi_0) \in \mathcal{I}_1) = \underline{\mathsf{B}}_0(X),
$$

откуда следует выражение (14).

Первый пункт теоремы 3 доказан.

Для доказательства второго пункта теоремы 3 достаточно заметить, что при $x_k \in \mathcal{I}_k$ выполнено $u_k^* = \underline{u}_k$ для всех $k = \overline{0, N}$, откуда аналогичным способом можно получить выражение (14) для функции оптимального значения вероятностного критерия на траекториях системы $\{x_k^*\}_{k=1}^{N+1}$, замкнутой оптимальным управлением $u^*(\cdot)$.

Второй пункт теоремы 3 доказан.

Третий пункт теоремы 3 непосредственно следует из п. 7 теоремы 2 и п. 1 теоремы 3.

Теорема доказана.

*Доказательство леммы 1.* Воспользуемся п. 1 теоремы 2 и запишем выражение для поверхности уровня 1 функции Беллмана при $k = N$

$$
\mathcal{I}_N = \mathcal{F}_N \cap \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \exists u \in U_N : \mathbf{P}\left(\left\|\Omega\left(A_N x + \left(A_N^\xi x + B_N u\right)\xi_N\right)\right\|_\infty \leqslant \varphi\right) = 1\right\}.
$$

С учетом того, что случайная величина $\xi_N$ имеет неограниченный носитель, оптимальное управление при $k = N$ и $x_{N-1} \in \mathcal{I}_N$ единственно и имеет вид $u_N^* = -B_N^{\mathsf{T}} A_N^{\xi} x_{N-1}$, а поверхность уровня 1 функции Беллмана имеет вид

$$\mathcal{I}_N = \mathcal{F}_N \cap \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|\Omega A_N x\|_\infty \leqslant \varphi \Big\} =$$
$$= \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \max\big\{ \|\Omega x\|_\infty, |\beta_N^{\mathsf{T}} x| \big\} \leqslant \varphi \Big\}.$$

Из п. 2 теоремы 2 получаем поверхность уровня 0 функции Беллмана при $k = N$

$$\mathcal{O}_N = \overline{\mathcal{F}}_N \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \forall u \in U_N : \mathbf{P}\left( \left\| \Omega \left( A_N x + \left( A_N^{\xi} x + B_N u \right) \xi_N \right) \right\|_\infty > \varphi \right) = 1 \right\} =$$
$$= \overline{\mathcal{F}}_N \cup \varnothing = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|\Omega x\|_\infty > \varphi \Big\}.$$

Аналогично шагу $k = N$ при $k = N - 1$ получаем поверхность уровня 1

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{N-1} = \mathcal{F}_{N-1} \cap \Bigg\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \exists u \in U_{N-1} : \\ \mathbf{P}\Bigg( \max\Bigg\{ \left\| \Omega \left( A_{N-1} x + \left( A_{N-1}^{\xi} x + B_{N-1} u \right) \xi_{N-1} \right) \right\|_\infty, \\ \left\| \Omega A_N \left( A_{N-1} x + \left( A_{N-1}^{\xi} x + B_{N-1} u \right) \xi_{N-1} \right) \right\|_\infty \Bigg\} \leqslant \varphi \Bigg) = 1 \Bigg\} = \\ = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \max\left\{ \|\Omega x\|_\infty, \ \max_{j=\overline{N-1,N}} \left| \beta_j^{\mathsf{T}} x \right| \right\} \leqslant \varphi \right\}, \end{aligned}$$

причем, как и при $k = N$, если $x_{N-1} \in \mathcal{I}_{N-1}$, то выполнено

$$u_{N-1}^* = -B_{N-1}^{\mathsf{T}} A_{N-1}^{\xi} x_{N-1},$$

и поверхность уровня 0 функции Беллмана равна

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{N-1} = \overline{\mathcal{F}}_{N-1} \cup \Bigg\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \forall u \in U_{N-1} : \\ \mathbf{P}\left( \left\| \Omega \left( A_{N-1} x + \left( A_{N-1}^{\xi} x + B_{N-1} u \right) \xi_{N-1} \right) \right\|_\infty > \varphi \right) = 1 \Bigg\} = \\ = \overline{\mathcal{F}}_{N-1} \cup \varnothing = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|\Omega x\|_\infty > \varphi \Big\}. \end{aligned}$$

Продолжая аналогичные размышления по индукции, завершаем доказательство леммы 1.

Лемма 1 доказана.

*Доказательство леммы 2.* Проведем серию преобразований правой части выражения (20):

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \max_u \mathbf{P}\Bigg( \max\Big\{ \dot{\omega}\left| e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k x + \left(A_k^{\xi}x + B_k u_k\right)\xi_k\right)\right|, \\ \max_{l=\overline{k,N}} \omega \left|\beta_{l+1}^{\mathsf{T}}\left(A_k x + \left(A_k^{\xi}x + B_k u_k\right)\xi_k\right)\right| \Big\} \leqslant \varphi \Bigg) = \\ = \mathbf{P}\Bigg( \bigcap_{l=k}^{N} \left\{ \omega \left|\beta_{l+1}^{\mathsf{T}}\left(A_k x + \left(A_k^{\xi}x + B_k u_k\right)\xi_k\right)\right| \leqslant \varphi \right\} \cap \\ \cap \left\{ \dot{\omega}\left| e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k x + \left(A_k^{\xi}x + B_k u_k\right)\xi_k\right)\right| \leqslant \varphi \right\} \Bigg) = \\ = \mathbf{P}\Bigg( \bigcap_{l=k}^{N} \left\{ \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \leqslant e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k^{\xi}x + B_k u_k\right)\xi_k \leqslant \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \right\} \cap \\ \cap \left\{ -\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x \leqslant e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k^{\xi}x + B_k u_k\right)\xi_k \leqslant \varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x \right\} \Bigg).$$

Введем замену переменных для управления $\tilde{u}_k = e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k^{\xi}x + B_k u_k\right)$ и обозначение для центрированной случайной величины $\overset{\circ}{\xi}_k = \xi_k - m_{\xi}$. Продолжим преобразования функции правой части выражения (20):

$$\mathbf{P}\Bigg( \bigcap_{l=k}^{N} \left\{ \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \leqslant \tilde{u}_k\xi_k \leqslant \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \right\} \cap \\ \cap \left\{ -\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x \leqslant \tilde{u}_k\xi_k \leqslant \varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x \right\} \Bigg) = \\ = \mathbf{P}\Bigg( \bigcap_{l=k}^{N} \left\{ \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \leqslant \tilde{u}_k\left(\overset{\circ}{\xi}_k + m_{\xi}\right) \leqslant \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \right\} \cap \\ \cap \left\{ -\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x \leqslant \tilde{u}_k\left(\overset{\circ}{\xi}_k + m_{\xi}\right) \leqslant \varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x \right\} \Bigg) = \\ = \mathbf{P}\Bigg( \bigcap_{l=k}^{N} \left\{ \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{m_{\xi}e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \leqslant \tilde{u}_k\left(m_{\xi}^{-1}\overset{\circ}{\xi}_k + 1\right) \leqslant \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}}A_k x}{m_{\xi}e_2^{\mathsf{T}}\beta_{l+1}} \right\} \cap \\ \cap \left\{ \frac{-\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x}{m_{\xi}} \leqslant \tilde{u}_k\left(m_{\xi}^{-1}\overset{\circ}{\xi}_k + 1\right) \leqslant \frac{\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}}A_k x}{m_{\xi}} \right\} \Bigg) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\max\left\{\frac{-\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi}, \max_{l=\overline{k,N}} \frac{-\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi e_2^{\mathsf{T}} \beta_{l+1}}\right\} \leqslant \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1\right) \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \min\left\{\frac{\varphi\dot{\omega}^{-1} - e_2^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi}, \min_{l=\overline{k,N}} \frac{\varphi\omega^{-1} - \beta_{l+1}^{\mathsf{T}} A_k x}{m_\xi e_2^{\mathsf{T}} \beta_{l+1}}\right\}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\underline{\varphi}_k(x) \leqslant \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1\right) \leqslant \overline{\varphi}_k(x)\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(-\frac{\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)}{2} + \frac{\overline{\varphi}_k(x) + \overline{\varphi}_k(x)}{2} \leqslant \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1\right) \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \frac{\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)}{2} + \frac{\overline{\varphi}_k(x) + \overline{\varphi}_k(x)}{2}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(-r_k(x) - c_k(x) \leqslant \tilde{u}_k \left(m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k + 1\right) \leqslant r_k(x) - c_k(x)\right).$$

Для удобства обозначим: $\eta_k = m_\xi^{-1} \overset{\circ}{\xi}_k$, $\eta_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_\eta^2\right)$, $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 m_\xi^{-2}$. Нетрудно видеть, что выражение (20) с учетом сделанных преобразований и введенных функций можно представить в следующем виде

$$\text{(П.18)} \qquad \underline{\mathsf{B}}_k(x) = \max_{\tilde{u}_k} \mathbf{P}\Big(\left|c_k(x) + \tilde{u}_k(1 + \eta_k)\right| \leqslant r_k(x)\Big).$$

Решение задачи стохастического программирования в правой части (П.18) с точностью до параметров $c_k(x)$, $r_k(x)$ известно [2, 15]. При условии $x \in \mathcal{B}_k$ это решение имеет вид

$$\text{(П.19)} \qquad \tilde{u}_k^* = -2c_k(x)\left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma_\eta^2 \ln\left(\frac{|c_k(x)| + r_k(x)}{|c_k(x)| - r_k(x)}\right)}\right)^{-1},$$

откуда с учетом замены переменных для $\underline{u}$ окончательно получаем (22).

Пп. 1 и 2 леммы 2 доказаны.

Для доказательства пп. 3 и 4 леммы 2 достаточно заметить, что по аналогии со сделанными преобразованиями при доказательстве пп. 1 и 2 настоящей леммы можно получить следующее выражение для верхней оценки функции Беллмана (21):

$$\overline{\mathsf{B}}_k(x) = \max_{u_k} \mathbf{P}\left(\dot{\omega}\left|e_2^{\mathsf{T}}\left(A_k x + \left(A_k^\xi x + B_k u_k\right)\xi_k\right)\right| \leqslant \varphi\right) =$$

$$\text{(П.20)} \qquad = \max_{\tilde{u}_k} \mathbf{P}\left(\left|e_2^{\mathsf{T}} A_k m_\xi^{-1} x + \tilde{u}_k\left(m_\xi^{-1}\overset{\circ}{\xi}_k + 1\right)\right| \leqslant \varphi\dot{\omega}^{-1} m_\xi^{-1}\right) =$$

$$= \max_{\tilde{u}_k} \mathbf{P}\left(\left|e_2^{\mathsf{T}} A_k m_\xi^{-1} x + \tilde{u}_k(1 + \eta_k)\right| \leqslant \varphi\dot{\omega}^{-1} m_\xi^{-1}\right).$$

Задача стохастического программирования в правой части (П.20) с точностью до параметров совпадает с задачей стохастического программирования в правой части (П.18), откуда по аналогии с доказательствами пп. 1 и 2 леммы 2 получаем (24) и (25).

Лемма 2 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
2. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ. 2001. № 5. С. 77–88.

   *Kan Yu.S.* Control Optimization by the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 5. P. 746–757.
3. *Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н.* Оптимальная стратегия при корректировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 1. С. 47–50.
4. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // АиТ. 2004. № 2. С. 179–197.

   *Grigor'ev P.V., Kan Yu.S.* Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
5. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // АиТ. 2013. № 5. С. 114–136.

   *Bunto T.V., Kan Yu.S.* Quantile Criterion-based control of the Securities Portfolio with a nonzero ruin Probability // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 5. P. 811–828.
6. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию // АиТ. 2015. № 7. С. 78–100.

   *Kibzun A.I., Ignatov A.N.* The Two-Step Problem of Investment Portfolio Selection from two Risk Assets via the Probability Criterion // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 7. P. 1201–1220.
7. *Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M.* Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // SIAM J. Optim. 2015. No. 25 (3). P. 1411–1440.
8. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex Chance Constrained Model Predictive Control // 2016. arXiv preprint arXiv:1603.07413.
9. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex Relaxations of a Probabilistically Robust Control Design Problem // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. 2013. P. 1892–1897.
10. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О существовании оптимальных стратегий в задаче управления стохастической системой с дискретным временем по вероятностному критерию // АиТ. 2017. № 10. С. 139–154.

    *Kibzun A.I., Ignatov A.N.* On the Existence of Optimal Strategies in the Control Problem for a Stochastic Discrete Time System with Respect to the Probability Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1845–1856.
11. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Об оптимальном удержании траектории дискретной стохастической системы в трубке // АиТ. 2019. № 1. С. 38–53.

    *Azanov V.M., Kan Yu.S.* On Optimal Retention of the Trajectory of Discrete Stochastic System in Tube // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 1. P. 30–42.

12. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление портфелем ценных бумаг // АиТ. 2001. № 9. С. 101–113.

*Kibzun A.I., Kuznetsov E.A.* Optimal Control of the Portfolio // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 9. P. 1489–1501.

13. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Позиционная стратегия формирования портфеля ценных бумаг // АиТ. 2003. № 1. С. 151–166.

*Kibzun A.I., Kuznetsov E.A.* Positional Strategy of Forming the Investment Portfolio // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 1. P. 138–152.

14. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию // Тр. ИСА РАН. 2015. № 2. С. 18–26.

15. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления стохастическими дискретными системами по критерию вероятности // АиТ. 2017. № 6. С. 57–83.

*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.

16. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // АиТ. 2018. № 2. С. 3–18.

*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.

17. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex constrained semialgebraic volume optimization: Application in systems and control, arXiv:1701.08910, 2017.

18. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Однопараметрчиеская задача оптимальной коррекции траектории летательного аппарата по критерию вероятности // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 2. С. 1–13.

19. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В.Назиным.*

Поступила в редакцию 24.12.2019

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020