Автоматика и телемеханика, № 10, 2020

© 2020 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ТЕРМИНАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ[1]

Полученные ранее условия терминальной инвариантности стохастических систем диффузионного типа конкретизируются для квазилинейных систем нелинейных по управлению и даются рекомендации по синтезу управлений, обеспечивающих терминальную инвариантность.

Ключевые слова: стохастическая система, управление, терминальная инвариантность.

DOI: 10.31857/S0005231020100049

1. Введение

Важной задачей теории управления динамическими системами является задача синтеза стратегии управления, обеспечивающей постоянное значение терминального критерия (в общем случае векторного) независимо от действующих на систему детерминированных, но заранее не известных, переменных во времени возмущений. Эту задачу Л.И. Розоноэр назвал задачей слабой инвариантности и получил для нее локальные необходимые условия [1]. Однако более естественен для этого вида инвариантности термин — «терминальная инвариантность», соответствующий термину «терминальное управление» в работах по управлению конечным состоянием объекта. В этой задаче автором были получены необходимые и одновременно достаточные условия, а в ее обобщении — задаче абсолютной инвариантности — достаточные условия [2].

В [3, 4] была поставлена новая задача теории инвариантности – задача о терминальной инвариантности управляемых стохастических динамических систем диффузионного типа. Для этой задачи были получены общие достаточные условия инвариантности [3, 4]. В [5] эти условия исследованы для простого случая линейных стохастических систем. Данная работа является непосредственным продолжением работ [3, 4]. В ней условия работ [3, 4] конкретизируются для квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению. Для этого класса систем они доводятся до достаточно конструктивных алгоритмов синтеза стратегий управления, обеспечивающих инвариантность. Так как будет изучаться только терминальная инвариантность, слово «терминальная» далее будем опускать.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

2. Формулировка задач терминальной инвариантности

Будем предполагать, что управляемая динамическая система описывается векторным дифференциальным уравнением Ито:

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t), u(t))dw(t), \tag{1}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $t \in [t_0, t_1]$ — время ($t_{\min} \leq t_0 < t_1$); $x := (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$ — состояние системы; $w(t) := (w_1(t), \ldots, w_q(t))^{\mathrm{T}} \in R^q$, $w(t) = \tilde{w}(t - t_0)$, где $\tilde{w}(\cdot)$ — q-мерный стандартный винеровский процесс; $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ — операция транспонирования. Управление $u(t) \in R^m$ представляет собой сужение на интервал $[t_0, t_1]$ фиксированной, непрерывной на полуоткрытом интервале $[t_{\min}, t_1)$ функции $t \to \tilde{u}(t) : [t_{\min}, t_1] \to R^m$. Далее, что не вызовет недоразумений, функцию $\tilde{u}(t)$ также будем называть управлением и использовать для нее обозначение $u(t)$. Начальная точка (t_0, x_0) и момент t_1 заданы. Моменты времени $t_{\min}, t_1$ фиксированы в отличие от момента t_0, который может принимать различные значения.

Здесь будет рассматриваться частный случай системы (1), в которой функция $f(t, x, u)$ имеет вид $f(t, x, u) = A_0(t, u)x + B_0(t, u)$, а столбцы матрицы $g(t, x, u)$ задаются равенствами $g_k(t, x, u) = A_k(t, u)x + B_k(t, u)$, $k = \overline{1, q}$. Матрицы $A_k(t, u)$, $B_k(t, u)$, $k = \overline{0, q}$, имеют соответствующие размеры, их элементы — заданные на $[t_{\min}, t_1] \times R^m$ непрерывные функции. В результате рассматриваемая система (1) имеет вид

$$dx(t) = A_0(t, u(t))x(t) + B_0(t, u(t)) + \sum_{k=1}^{q} (A_k(t, u(t))x(t) + B_k(t, u(t)))dw_k(t).$$

Более общий вид системы в форме (1) приведен здесь для того, чтобы удобно было привести формулировки соответствующих теорем из [4], конкретизированные для рассматриваемого здесь случая, необходимые для получения результатов данной работы.

Частным случаем системы является система с афинной по состоянию стратегией управления:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\alpha_0(t)x(t) + \beta_0(t)v(t, x(t)) + \gamma_0(t))dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{q} (\alpha_k(t)x(t) + \beta_k(t)v(t, x(t)) + \gamma_k(t))dw_k(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$v(t, x) = -L(t)x + L^0(t) \in R^{m_v} \tag{3}$$

– афинная стратегия управления.

Если через $u(t)$ обозначить совокупность компонент матриц $L(t)$ и $L^0(t)$ и положить $A_k(t, u) = \alpha_k(t) - \beta_k(t)L$, $B_k(t, u) = \beta_k(t)L^0 + \gamma_k(t)$ при $k = \overline{0, q}$, то система (2) примет вид системы (1).

Этот частный случай приведен, чтобы подчеркнуть, что для достижения инвариантности системы исследуемого здесь типа иногда можно использовать и афинную по состоянию обратную связь.

При сделанных выше предположениях в случае, когда управление $u(t)$ непрерывно на замкнутом интервале $[t_{\min}, t_1]$, уравнение (1) для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in B^0$, где $B^0 = [t_{\min}, t_1) \times R^n$, имеет сильное решение [6, с. 484, теорема 1]. Действительно, условия указанной теоремы заведомо выполнены, так как функции $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$ в системе (1) непрерывны и линейны по x. Если же управление $u(t)$ непрерывно лишь на полуоткрытом интервале $[t_0, t_1)$, то факт существования решения уравнения (1) (сильного или слабого) на интервале $[t_0, t_1]$, как и в общих теоремах из [4], приходится постулировать. Детальный комментарий по этому вопросу будет приведен в разделе 3 после формулировки теорем из [4].

Далее всюду в теоретических построениях будем предполагать, что управление $u(t)$ в системе (1) фиксировано. Для фиксированной начальной точки через $D(t_0, x_0)$ обозначим множество реализаций $x(\cdot)$ случайного процесса, описываемого уравнением (1). Пусть также $D_\Sigma = \bigcup D(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in B^0$.

На множестве D_Σ определим функционал (терминальный критерий):

$$J(x(\cdot)) = F(x(t_1)), \quad F(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} G x + Q^{\mathrm{T}} x, \tag{4}$$

где G, Q– заданные постоянные матрицы соответствующих размеров (в [4] считается, что $F(x)$ — произвольная функция из $C^2(R^n)$).

Определение 1. Динамическую систему (1) *при фиксированном управлении $u(t)$ будем называть инвариантной по возмущениям, если для любой фиксированной начальной точки $(t_0, x_0) \in B^0$ критерий* (4) *принимает постоянное значение $J_c(t_0, x_0)$ с вероятностью* 1 *на множестве $D(t_0, x_0)$.*

Определение 2. Динамическую систему (1) *при фиксированном управлении $u(t)$ будем называть абсолютно инвариантной, если критерий* (4) *принимает одно и то же постоянное значение J_c^a на множестве D_Σс вероятностью* 1 *для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in B^0$.*

Целью выбора управления $u(t)$ является обеспечение инвариантности системы (1) в смысле определения 1 или 2.

3. Достаточные условия терминальной инвариантности

Следуя [4], введем в рассмотрение множество Φ функций $(t,x) \to \varphi(t,x) : [t_{\min}, t_1] \times R^n \to R^1$, имеющих непрерывные производные φ_t, $\varphi_x = (\varphi_{x_1}, \ldots$ $\ldots, \varphi_{x_n})^{\mathrm{T}} \in R^n$, $\varphi_{xx} = \{\varphi_{x_i x_j}\}$, $i,j = \overline{1,n}$, множество M непрерывных функций $t \to \mu(t) : [t_{\min}, t_1] \to R^1$ и обозначим:

$$K(t,x,u) = \varphi_t(t,x) + \varphi_x^{\mathrm{T}}(t,x) f(t,x,u) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)\varphi_{xx}(t,x)],$$
$$S(t,x,u) = \varphi_x^{\mathrm{T}}(t,x) g(t,x,u),$$

где

$$\sigma(t,x,u) = g(t,x,u)g^{\mathrm{T}}(t,x,u).$$

В [4] получены достаточные условия инвариантности (по возмущениям и абсолютной) для управляемых стохастических систем диффузионного типа с позиционными стратегиями управления и дополнительным детерминированным возмущением, которые без изменений справедливы и в случае программного управления при отсутствии детерминированных возмущений. Приведенные ниже теоремы 1, 2 являются формальной конкретизацией теорем из [4] на изучаемый здесь случай. Следствие из теоремы 2 и замечания 1–3 также перенесены из [4].

Теорема 1. 1. *Для того чтобы система* (1) *была инвариантна по возмущениям, достаточно существования функций* $\varphi \in \Phi$, $\mu \in \mathrm{M}$, *таких что*

1) $\varphi(t_1, x) = F(x)$, $x \in R^n$,

для всех $x \in R^n$, $t \in [t_{\min}, t_1)$ *выполнены условия*:

2) $K(t, x, u(t)) = \mu(t)$,

3) $S(t, x, u(t)) = 0$.

2. *Если условия п.* 1 *теоремы выполнены, то для любой фиксированной начальной точки* $(t_0, x_0) \in B^0$ *критерий* (4) *принимает постоянное значение*

$$J_c(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \mu(t)dt$$

с вероятностью 1 *на множестве* $D(t_0, x_0)$.

Теорема 2. 1. *Для того чтобы система* (1) *была абсолютно инвариантна, достаточно существования функции* $\varphi \in \Phi$, *функции* $\mu \in \mathrm{M}$ *и постоянной* $A > 0$, *таких что*

1) $\varphi(t_1, x) = F(x)$, $x \in R^n$,

для всех $x \in R^n$, $t \in [t_{\min}, t_1)$ *выполнены условия*:

2) $K(t, x, u(t)) = (\mu(t) - A\varphi(t, x))(t_1 - t)^{-1}$,

3) $S(t, x, u(t)) = 0$.

2. *Если условия п.* 1 *теоремы выполнены, то для всех* $(t_0, x_0) \in B^0$ *с вероятностью* 1 *на множестве* $D(t_0, x_0)$ *справедливо равенство*:

$$J(x(\cdot)) = F(x(t_1)) = J_c^a, \quad J_c^a = \frac{\mu(t_1)}{A}.$$

В [4, с. 85, следствие 3], кроме теорем 1, 2, имеется следующий результат.

Следствие. Если в теореме 2 $A > 1$ *и* $\mu(t) \equiv 0$, *то для каждой точки* $(t_0, x_0) \in B^0$ *с вероятностью* 1 *для реализаций* $x(\cdot) \in D(t_0, x_0)$ *при почти всех* $t \in [t_0, t_1]$ *справедливо равенство:*

$$K(t, x(t), u(t)) = -A\varphi(t_0, x_0)(t_1 - t_0)^{-A}(t_1 - t)^{A-1},$$

или, что то же самое,

$$\varphi(t, x(t)) = C(t_0, x_0)(t_1 - t)^A, \quad C(t_0, x_0) = A\varphi(t_0, x_0)(t_1 - t_0)^{-A}. \tag{5}$$

Этот результат понадобится при анализе примеров в разделе 5.

Замечание 1. Если терминальных условий несколько, можно считать, что критерий (4) векторный, и записать условия теоремы 1 или 2 для каждой компоненты критерия.

Замечание 2. В [4, с. 85, замечание 4] отмечается, что при достаточно слабых предположениях без уменьшения общности можно считать, что $\mu(t) \equiv \equiv 0$.

Замечание 3. Из самого определения абсолютной инвариантности следует, что для наличия этого свойства у системы (1) достаточно, чтобы условия теоремы 2 выполнялись для почти всех реализаций случайного процесса лишь в моменты времени малого интервала $[t_1 - \varepsilon, t_1)$. Величина числа $\varepsilon > 0$ может быть различной для каждой реализации.

Замечание 4. Как указывалось в разделе 2, в случае, когда управление $u(t)$ непрерывно лишь на полуоткрытом интервале $[t_{\min}, t_1)$, возникает проблема с доказательством существования решения (сильного или слабого) системы (1).

Общая рекомендация следующая. В каждой прикладной задаче или модельном примере следует пытаться провести такое доказательство. Особенно плохая ситуация возникает в случае теоремы 2 об абсолютной инвариантности в связи с тем, что условие 2) теоремы содержит сингулярность в точке $t = t_1$, которая приведет к сингулярности управления. Однако здесь может помочь тот факт, что существование решения нужно доказать при фиксированной начальной точке (t_0, x_0). В этом случае использование равенства (5) позволяет при $A > 1$ ликвидировать сингулярность в условии 2) теоремы 2. Во всех приведенных в разделе 6 примерах соответствующее обоснование выполнено.

Если такое обоснование существования решения в сложных прикладных задачах провести не удается, то условия теорем можно использовать, как эвристическое средство синтеза инвариантной системы и проверять ее работоспособность численным моделированием.

Замечания 3, 4 справедливы и в отношении ниже следующих теорем 2а, 2б, 2в, конкретизирующих теорему 2.

Конкретизируем теоремы 1, 2 для рассматриваемой здесь задачи с квазилинейным уравнением системы (1). Функцию $\varphi(t, x)$ возьмем в виде

$$\varphi(t, x) = \psi^{\mathrm{T}}(t)x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\Lambda(t)x + \xi(t), \tag{6}$$

где векторная функция $\psi(t) \in R^n$, матричная функция $\Lambda(t)$ и скалярная функция $\xi(t)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми на интервале $[t_{\min}, t_1]$. Тогда условие 1) теорем 1, 2 приобретает форму $\psi(t_1) = Q$, $\Lambda(t_1) = G$, $\xi(t_1) = 0$; а функции $K(t, x, u)$ и $S(t, x, u)$ в условиях 2), 3) этих теорем имеют вид

$$K = \frac{d\xi}{dt} + \psi^{\mathrm{T}} B_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q} B_k^{\mathrm{T}} \Lambda B_k + \left(\frac{d\psi^{\mathrm{T}}}{dt} + \psi^{\mathrm{T}} A_0 + B_0^{\mathrm{T}}\Lambda + \sum_{k=1}^{q} B_k^{\mathrm{T}}\Lambda A_k\right) x +$$

$$+ \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \left(\frac{d\Lambda}{dt} + \Lambda A_0 + A_0^{\mathrm{T}}\Lambda + \sum_{k=1}^{q} A_k^{\mathrm{T}}\Lambda A_k\right) x,$$

$$S = (S_1, S_2, \ldots, S_q),$$

$$S_k = \psi^{\mathrm{T}} B_k + (\psi^{\mathrm{T}} A_k + B_k^{\mathrm{T}}\Lambda)x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(\Lambda A_k + A_k^{\mathrm{T}}\Lambda)x, \quad k = \overline{1,q}.$$

В результате теоремы 1 и 2 принимают следующий вид.

Т е о р е м а 1а. *Пусть система* (1), *функция* φ *вида* (6) *и функция* $\mu \in \mathrm{M}$ *таковы, что*:

1. а) $\psi(t_1) = Q$,

   б) $\Lambda(t_1) = G$,

   в) $\xi(t_1) = 0$;

при всех $t \in [t_{\min}, t_1)$ *выполнены условия*:

2. а) $\dfrac{d\xi(t)}{dt} + B_0^{\mathrm{T}}(t, u(t))\psi(t) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} B_k^{\mathrm{T}}(t, u(t))\Lambda(t) B_k(t, u(t)) = \mu(t)$,

   б) $$\frac{d\psi(t)}{dt} + A_0^{\mathrm{T}}(t, u(t))\psi(t) + \Lambda(t) B_0(t, u(t)) + \sum_{k=1}^{q} A_k^{\mathrm{T}}(t, u(t))\Lambda(t) B_k(t, u(t)) = 0,$$

   в) $$\frac{d\Lambda(t)}{dt} + \Lambda(t) A_0(t, u(t)) + A_0^{\mathrm{T}}(t, u(t))\Lambda(t) + \sum_{k=1}^{q} A_k^{\mathrm{T}}(t, u(t))\Lambda(t) A_k(t, u(t)) = 0;$$

при всех $k = \overline{1,q}$ *справедливы равенства*:

3. а) $B_k^{\mathrm{T}}(t, u(t))\psi(t) = 0$,

   б) $A_k^{\mathrm{T}}(t, u(t))\psi(t) + \Lambda(t) B_k(t, u(t)) = 0$,

   в) $\Lambda(t) A_k(t, u(t)) + A_k^{\mathrm{T}}(t, u(t))\Lambda(t) = 0$.

Тогда система (1) *инвариантна по возмущениям, при этом*

$$J_c(t_0, x_0) = \psi^{\mathrm{T}}(t_0) x_0 + \frac{1}{2} x_0^{\mathrm{T}} \Lambda(t_0) x_0 + \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(t) dt. \tag{7}$$

Т е о р е м а 2а. *Пусть система* (1), *функция* φ *вида* (6), *функция* $\mu \in \mathrm{M}$ *и постоянная* $A > 0$ *таковы, что выполнены условия 1, 3 теоремы 1*а *и при всех* $t \in [t_{\min}, t_1)$ *условия*:

2. а) $\dfrac{d\xi(t)}{dt}+B_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{q}B_k^{\mathrm{T}}(t,u(t))\Lambda(t)B_k(t,u(t))=\dfrac{\mu(t)-A\xi(t)}{t_1-t}$,

б) $\dfrac{d\psi(t)}{dt}+A_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)+\Lambda(t)B_0(t,u(t))+\sum\limits_{k=1}^{q}A_k^{\mathrm{T}}(t,u(t))\Lambda(t)B_k(t,u(t))=$
$=-\dfrac{A}{t_1-t}\psi(t)$,

в) $\dfrac{d\Lambda(t)}{dt}+\Lambda(t)A_0(t,u(t))+A_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\Lambda(t)+\sum\limits_{k=1}^{q}A_k^{\mathrm{T}}(t,u(t))\Lambda(t)A_k(t,u(t))=$
$=-\dfrac{A}{t_1-t}\Lambda(t)$.

Тогда система (1) *абсолютно инвариантна, при этом*

$$J_c^a=\frac{\mu(t_1)}{A}. \tag{8}$$

4. Частные случаи — линейный критерий, линейная система

Рассмотрим частный случай, когда критерий инвариантности линеен по состоянию:

$$J(x(\cdot))=Q^{\mathrm{T}}x. \tag{9}$$

Он получается, если в (4) положить $G=0$. В этом случае функцию φ также можно взять линейной:

$$\varphi(t,x)=\psi^{\mathrm{T}}(t)x+\xi(t), \tag{10}$$

положив в (6) $\Lambda(t)\equiv 0$. В результате условия инвариантности сильно упрощаются. Эти условия содержатся в нижеследующих теоремах 1б, 2б, непосредственно вытекающих из теорем 1а, 2а.

Теорема 1б. *Пусть система* (1), *функция* φ *вида* (10) *и функция* $\mu\in\mathrm{M}$ *таковы, что*:

1. а) $\psi(t_1)=Q$,

б) $\xi(t_1)=0$;

при всех $t\in[t_{\min},t_1)$ *выполнены условия*:

2. а) $\dfrac{d\xi(t)}{dt}+B_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=\mu(t)$,

б) $\dfrac{d\psi(t)}{dt}+A_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=0$;

при всех $k=\overline{1,q}$ *справедливы равенства:*

3. а) $B_k^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=0$,

б) $A_k^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=0$.

Тогда система (1) *инвариантна по возмущениям, при этом*

$$J_c(t_0,x_0)=\psi^{\mathrm{T}}(t_0)x_0+\xi(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t_1}\mu(t)dt. \tag{11}$$

Т е о р е м а 2б. *Пусть система* (1), *функция* φ *вида* (10), *функция* $\mu\in\mathrm{M}$ *и постоянная* $A>0$ *таковы, что выполнены условия 1, 3 теоремы 1*б *и при всех* $t\in[t_{\min},t_1)$ *условия*:

2. а) $\dfrac{d\xi(t)}{dt}+B_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=\dfrac{\mu(t)-A\xi(t)}{t_1-t}$,

   б) $\dfrac{d\psi(t)}{dt}+A_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=-\dfrac{A}{t_1-t}\psi(t)$.

Тогда система (1) *абсолютно инвариантна, при этом* $J_c^a=\dfrac{\mu(t_1)}{A}$.

Рассмотрим еще более частный случай, когда система (1) не содержит мультипликативных возмущений – линейна по состоянию и винеровскому процессу, но в общем случае нелинейна по управлению. Такая система получается, если положить $A_k(t,u)=0$, $k=\overline{1,q}$. Критерий инвариантности также линеен вида (9). Результат представлен в теоремах 1в, 2в.

Т е о р е м а 1в. *Пусть система* (1), *функция* φ *вида* (10) *и функция* $\mu\in\mathrm{M}$ *таковы, что*:

1. а) $\psi(t_1)=Q$,

   б) $\xi(t_1)=0$;

при всех $t\in[t_{\min},t_1)$ *выполнены условия*:

2. а) $\dfrac{d\xi(t)}{dt}+B_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=\mu(t)$,

   б) $\dfrac{d\psi(t)}{dt}+A_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=0$;

при всех $k=\overline{1,q}$ *справедливы равенства*:

3. $B_k^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=0$.

Тогда система (1) *инвариантна по возмущениям, при этом*

$$J_c(t_0,x_0)=\psi^{\mathrm{T}}(t_0)x_0+\xi(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t_1}\mu(t)dt.$$

Т е о р е м а 2в. *Пусть система* (1), *функция* φ *вида* (10), *функция* $\mu\in\mathrm{M}$ *и постоянная* $A>0$ *таковы, что выполнены условия* 1, 3 *теоремы 1*в *и при всех* $t\in[t_{\min},t_1)$ *условия*:

2. а) $\dfrac{d\xi(t)}{dt}+B_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=\dfrac{\mu(t)-A\xi(t)}{t_1-t}$,

   б) $\dfrac{d\psi(t)}{dt}+A_0^{\mathrm{T}}(t,u(t))\psi(t)=-\dfrac{A}{t_1-t}\psi(t)$.

Тогда система (1) *абсолютно инвариантна, при этом* $J_c^a=\dfrac{\mu(t_1)}{A}$.

Доказательства теорем 1а, 2а, 1б, 2б, 1в, 2в состоят в записи условий теорем 1, 2 для соответствующих частных случаев. При этом видно, что при сужении общности задачи количество условий теорем сокращается.

5. Рекомендации по конструированию алгоритмов синтеза инвариантных систем

Сначала рассмотрим случай инвариантности по возмущениям (теорема 1а).

Если компоненты управления $u(t)$, входящие в условия 2 теоремы 1а, и функция $\mu(t)$ заданы, то условия 2 совместно с граничными условиями 1 однозначно определяют функции $\xi(t)$, $\psi(t)$ и $\Lambda(t)$. Остается выполнить условия 3 теоремы. Их можно выполнить за счет выбора компонент управления $u(t)$, входящих в условия 3.

В частности, когда система (1) линейна ($A_k(t,u)=0$, $k=\overline{1,q}$), критерий инвариантности имеет вид (9) (линеен) и матрицы $B_k(t,u)$, $k=\overline{1,q}$, линейны по u, условия 3 теорем 1в, 2в имеют вид системы линейных уравнений относительно u. В этом случае нетрудно записать условия разрешимости этой системы уравнений [5] и тем самым условия выполнимости условия 3 в теоремах 1в, 2в.

Однако, если указанных компонент управления $u(t)$ не достаточно для выполнения условий 3, то задача усложняется. В этом случае приходится использовать компоненты матрицы $\Lambda(t)$ и вектора $\psi(t)$, и тогда связи, наложенные на функции $\Lambda(t)$, $\psi(t)$ в условиях 2, приходится компенсировать за счет компонент вектора управления $u(t)$, входящих в функцию $f(t,x,u)$. Такая схема применяется в примере 2, приведенном в разделе 6.

Особенно сложен для синтеза инвариантной системы случай линейно-квадратичного критерия инвариантности вида (6) ($G\neq 0$). В этом случае условие 3 теорем 1а, 2а содержит $1+n(n+3)/2$ условий и создается впечатление, что единственный случай, когда условия 3 можно выполнить, — это случай, когда за счет управления $u(t)$ можно обнулить диффузионный член уравнения (1), $g(t,x,u(t))=0$. Однако удалось привести нетривиальные примеры, рассеивающие это опасение (примеры 4, 4.1–4.5, 5 в разделе 6).

Выполнение условий теоремы 2а можно обеспечивать по описанной выше схеме для теоремы 1а. Однако, здесь все намного сложнее в связи с тем, что условия 2 теоремы 2а содержат сингулярности, которые приходится компенсировать соответствующими сингулярностями в компонентах управления $u(t)$, входящих в функцию сноса $f(t,x,u)$ (примеры 3, 5 в разделе 6).

6. Примеры

Пример 1.

$$\begin{aligned} dx_1 &= u_4^2(x_2-x_3)dt + x_2dw,\\ dx_2 &= (x_1-x_3)dt - x_1dw, \qquad (12)\\ dx_3 &= (-x_2+u_4x_1)dt + vdw. \end{aligned}$$

Здесь

$$v(t,x)=u_1(t)x_1+u_2(t)x_2+u_3(t)x_3,\quad u_4=u_4(t),\quad t\in[t_{\min},0],\quad t_{\min}<0, \tag{13}$$

— стратегии управления. Критерий инвариантности по возмущениям имеет вид

$$J = x_3(0). \tag{14}$$

Заметим, что в соответствии с общей постановкой задачи в этом примере и всех последующих начальная точка (t_0, x_0) выбирается произвольно из множества $B^0 = [t_{\min}, t_1) \times R^n$ и система должна быть инвариантна для всех таких начальных точек. В этом примере $t_1 = 0$, $n = 3$.

Применим теорему 1б. Функцию $\mu(t)$ положим тождественно равной нулю, $\mu(t)\equiv 0$. Так как в этом примере $B_0(t,u)\equiv 0$, то из условий 1, 2 теоремы следует, что $\xi(t)\equiv 0$.

Стратегии управления

$$v(t,x) = \frac{1}{\psi_3(t)}(\psi_2(t)x_1 - \psi_1(t)x_2),\quad u_4(t) = 1 \tag{15}$$

и функции

$$\psi_1(t) = 1 - e^t,\quad \psi_2(t) = -1 + e^t,\quad \psi_3(t) = 1 \tag{16}$$

обеспечивают выполнение всех условий теоремы 1б. Подставляя выражения (16) в (15), получим окончательные выражения для стратегий $v(t,x)$ и $u_4(t)$:

$$v(t,x) = (e^t - 1)(x_1 + x_2),\quad u_4(t) = 1. \tag{17}$$

Терминальное значение критерия вычисляется по формуле (11): $J_c = (1 - e^{t_0})(x_{10} - x_{20})$.

Пример 2. Рассмотрим ту же управляемую систему (12), (13), что и в примере 1, с тем же критерием инвариантности по возмущениям (14). Решение задачи терминальной инвариантности как правило не единственно, и это можно использовать для выполнения дополнительных условий на стратегии управления. В примере 1 стратегия управления $v(t,x)$ зависит от переменных состояния x_1 и x_2. Оказывается можно дать другое решение задачи с зависимостью $v(t,x)$ только от переменной x_1.

Функции $\mu(t)\equiv 0$, $\xi(t)\equiv 0$, $\psi_1(t) = 0$, $\psi_2(t) = \operatorname{sh}(t)$, $\psi_3(t) = \operatorname{ch}(t)$ и стратегии $v(t,x) = \frac{\psi_2(t)}{\psi_3(t)}x_1 = x_1 \operatorname{th}(t)$, $u_4(t) = -\frac{\psi_2(t)}{\psi_3(t)} = -\operatorname{th}(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1б.

Инвариантное значение критерия вычисляется по формуле (11):

$$J_c(t_0,x_0) = x_{20}\operatorname{sh}(t_0) + x_{30}\operatorname{ch}(t_0).$$

Пример 3 (абсолютная инвариантность).

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= (x_2 - x_3 + v_2)dt + x_2 dw,\\
dx_2 &= (x_1 - x_3)dt - x_1 dw,\\
dx_3 &= (x_1 - x_2)dt + v_1 dw.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Здесь

$$v_1(t,x) = u_1(t)x_1 + u_2(t)x_2 + u_3(t)x_3, \quad v_2(t,x) = u_4(t)x_1 + u_5(t)x_2 + u_6(t)x_3$$

— стратегии управления. Критерий терминальной инвариантности имеет тот же вид, что и в примерах 1, 2, но здесь требуется обеспечить абсолютную инвариантность.

Для решения задачи применим теорему 2б. Здесь, как и в предыдущих примерах, положим $\mu(t) \equiv 0$, и тогда, как и в примерах 1, 2, $\xi(t) \equiv 0$. Компоненты вектор-функции $\psi(t)$ возьмем такими же, как в примере 1 (равенства (16)), так что функция $\varphi(t,x)$ имеет вид (10):

$$\varphi(t,x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2 + \psi_3(t)x_3 = (1 - e^t)(x_1 - x_2) + x_3. \tag{19}$$

В этом случае условие 3 будет выполнено, если стратегию $v_1(t,x)$ выбрать совпадающей со стратегией $v(t,x)$ в примере 1 (равенства (15), (17)):

$$v_1(t,x) = (e^t - 1)(x_1 + x_2). \tag{20}$$

Для выполнения векторного дифференциального уравнения 2б) теоремы 2б следует выбрать стратегию $v_2(t,x)$ в виде

$$v_2(t,x) = \frac{A}{t\psi_1(t)}(\psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2 + \psi_3(t)x_3). \tag{21}$$

Если в (21) подставить выражения (16) для $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, то стратегия $v_2(t,x)$ приобретает следующий конкретный вид:

$$v_2(t,x) = \frac{A}{t}x_1 - \frac{A}{t}x_2 + \frac{A}{t(1-e^t)}x_3. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что стратегия $v_2(t,x)$ имеет сингулярность в окрестности конечной точки движения $t_1 = 0$. Однако, если использовать следствие из теоремы 2, конкретизацией которой является теорема 2б, то можно установить, что почти для всех реализаций случайного процесса $x(\cdot)$, исходящих из начальной точки (t_0, x_0), функция $v_2(t, x(t))$ одна и та же:

$$v_2(t, x(t)) = \bar{v}(t; t_0, x_0) \tag{23}$$

и эта функция при $A \geq 2$ ограничена, а при $A > 2$

$$\lim_{t \to -0} \bar{v}(t; t_0, x_0) = 0. \tag{24}$$

Действительно, учитывая (19), (21), стратегию $v_2(t,x)$ можно представить в виде

$$v_2(t,x) = \frac{A}{t\psi_1(t)}\varphi(t,x).$$

А тогда, учитывая равенство (5) и вид функции $\psi_1(t)$ (равенства (16)), будем иметь:

$$v_2(t,x(t)) = \frac{A}{t(1-e^t)}C(t_0,x_0)(-t)^A. \tag{25}$$

Из равенства (25) следует справедливость равенства (23), ограниченность функции $\bar{v}(t;t_0,x_0)$ при $A \geq 2$ и выполнение равенства (24) при $A > 2$.

В результате сильное решение системы (18) при фиксированном начальном условии $x(t_0) = x_0$ существует [6, стр. 484] и полученные стратегии управления (20), (22) обеспечивают абсолютную инвариантность относительно критерия (14). Терминальное значение критерия для всех начальных точек $(t_0,x_0) \in (-\infty,0) \times R^3$ одно и то же и равно нулю (с вероятностью 1).

Пример 4.

$$\begin{aligned} dx_1 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)dt + (b_{11}x_1 + b_{12}x_2)dw,\\ dx_2 &= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)dt + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)dw. \end{aligned} \tag{26}$$

Система (26) не содержит управлений в явном виде. Считается, что векторное управление $u(t)$ уже подставлено в систему. Используя соответствующие теоремы из разделов 3, 4, запишем условия на коэффициенты системы, которые обеспечат инвариантность. Имеющиеся в этих коэффициентах управления должны обеспечить выполнение этих условий. Коэффициенты системы (26) в общем случае могут быть функциями переменной t.

Критерий инвариантности (по возмущениям или абсолютной) имеет вид

$$J = \frac{1}{2}x_1^2(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0), \quad t \in [t_{\min}, 0], \quad t_{\min} < 0. \tag{27}$$

Критерий (27) квадратичен. В связи с этим будем использовать теоремы 1а и 2а. Сначала исследуем более простой случай инвариантности по возмущениям (теорема 1а).

Выпишем условия теоремы 1а для системы (26), положив $\mu(t) \equiv 0$. Условие 1 примет вид: 1. а) $\psi_1(0) = 0$, $\psi_2(0) = 0$, б) $\Lambda_{11}(0) = 1$, $\Lambda_{12}(0) = 0$, $\Lambda_{22}(0) = 1$, в) $\xi(0) = 0$. Нетрудно установить, что из этих условий и условий 2а), 2б) следует, что $\xi(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv 0$ и условия 3а), 3б) выполняются тривиально.

В результате остаются следующие условия:

$$\Lambda_{11}(0) = 1, \quad \Lambda_{12}(0) = 0, \quad \Lambda_{22}(0) = 1; \tag{28}$$

$$\frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + 2a_{21}\Lambda_{12} + b_{21}^2\Lambda_{22} = 0,$$

$$(29)\qquad \frac{d\Lambda_{12}}{dt} + a_{12}\Lambda_{11} + (a_{11} + a_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\Lambda_{12} + a_{21}\Lambda_{22} = 0,$$

$$\frac{d\Lambda_{22}}{dt} + b_{12}^2\Lambda_{11} + 2a_{12}\Lambda_{12} + 2a_{22}\Lambda_{22} = 0;$$

$$b_{11}\Lambda_{11} + b_{21}\Lambda_{12} = 0,$$

$$(30)\qquad b_{12}\Lambda_{11} + (b_{11} + b_{22})\Lambda_{12} + b_{21}\Lambda_{22} = 0,$$

$$b_{12}\Lambda_{12} + b_{22}\Lambda_{22} = 0.$$

Пример 4.1. Пусть в задаче примера 4

$$(31)\qquad b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad \Lambda_{12}(t) \equiv 0.$$

Тогда для инвариантности по возмущениям должны быть выполнены условия:

$$\frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + b_{21}^2\Lambda_{22} = 0, \quad \frac{d\Lambda_{22}}{dt} + b_{12}^2\Lambda_{11} + 2a_{22}\Lambda_{22} = 0;$$

$$a_{12}\Lambda_{11} + a_{21}\Lambda_{22} = 0, \quad b_{12}\Lambda_{11} + b_{21}\Lambda_{22} = 0.$$

Пример 4.2. Пусть дополнительно к условиям (31) примера 4.1 выполнены условия: $a_{12} = -a_{21}$, $a_{11} = a_{22}$, $b_{12} = -b_{21}$. Тогда можно положить $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda$, и для инвариантности по возмущениям должно быть выполнено единственное условие:

$$\frac{d\Lambda}{dt} + (2a_{11} + b_{12}^2)\Lambda = 0, \quad \Lambda(0) = 1.$$

Пример 4 .3. Наложим на коэффициенты системы (26) следующие условия: $b_{11} = -\alpha\Lambda_{12}$, $b_{12} = -\alpha\Lambda_{22}$, $b_{21} = \alpha\Lambda_{11}$, $b_{22} = \alpha\Lambda_{12}$, где α — постоянная или заданная функция переменной t.

В этом случае условия (30) будут выполнены, и для инвариантности по возмущениям достаточно, чтобы функции $\Lambda_{11}(t)$, $\Lambda_{12}(t)$, $\Lambda_{22}(t)$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + 2a_{21}\Lambda_{12} - \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{12}^2 + \alpha^2\Lambda_{11}^2\Lambda_{22} = 0,$$

$$(32)\qquad \frac{d\Lambda_{12}}{dt} + a_{12}\Lambda_{11} + (a_{11} + a_{22})\Lambda_{12} + a_{21}\Lambda_{22} - \alpha^2\Lambda_{12}^3 + \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{12}\Lambda_{22} = 0,$$

$$\frac{d\Lambda_{22}}{dt} + 2a_{22}\Lambda_{22} + 2a_{12}\Lambda_{12} - \alpha^2\Lambda_{22}\Lambda_{12}^2 + \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{22}^2 = 0$$

с граничными условиями

$$(33)\qquad \Lambda_{11}(0) = 1, \quad \Lambda_{12}(0) = 0, \quad \Lambda_{22}(0) = 1.$$

Сложность в этом примере состоит в том, что уравнения (32) нелинейны и их решение может существовать не для любого интервала $[t_{\min}, 0]$, $t_{\min} < 0$. Тем не менее для достаточно близкого к нулю $t_{\min}$ оно обязательно существует.

Пример 4.4. Дополнительно к условиям примера 4.3 потребуем, чтобы $\Lambda_{12}(t) \equiv 0$, тогда нужно считать, что $b_{11} = b_{22} = 0$. В этом случае условия (32), (33), гарантирующие инвариантность, примут более простой вид:

$$\begin{gathered}\frac{d\Lambda_{11}}{dt} + 2a_{11}\Lambda_{11} + \alpha^2\Lambda_{11}^2\Lambda_{22} = 0,\\ a_{12}\Lambda_{11} + a_{21}\Lambda_{22} = 0,\\ \frac{d\Lambda_{22}}{dt} + 2a_{22}\Lambda_{22} + \alpha^2\Lambda_{11}\Lambda_{22}^2 = 0;\end{gathered} \tag{34}$$

$$\Lambda_{11}(0) = 1, \quad \Lambda_{22}(0) = 1. \tag{35}$$

Пример 4.5. Условия (34), (35) можно упростить еще больше, потребовав в дополнение к условиям примера 4.4 выполнение следующих условий: $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$. В этом случае $\Lambda_{11}(t) = \Lambda_{22}(t) = \Lambda(t)$, $b_{12} = -\alpha\Lambda$, $b_{21} = \alpha\Lambda$ и функция $\Lambda(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d\Lambda}{dt} + 2a_{11}\Lambda + \alpha^2\Lambda^3 = 0, \quad \Lambda(0) = 1. \tag{36}$$

Если $a_{11} < 0$ и $d = -\frac{2a_{11}}{\alpha^2} \geq 1$, то решение уравнения (36) существует, определено на интервале $(-\infty, 0]$ и имеет вид:

$$\Lambda(t) = \sqrt{\frac{d}{1 + (d-1)e^{4a_{11}t}}}.$$

При $a_{11} < 0$ и $d < 1$ решение определено на интервале $(t^*, 0]$, где $t^* = -\frac{1}{4a_{11}}\ln(1-d)$. При $a_{11} < 0$ и $d = 1$ $\Lambda(t) \equiv 1$. Терминальное значение критерия определяется равенством (7): $J_c(t_0, x_0) = \Lambda(t_0)(x_{10}^2 + x_{20}^2)$.

Пример 4. 6 (абсолютная инвариантность).

Пусть в системе (26) $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = -b_{21}$, $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$.

Модифицируем полученную систему, добавив в первое и второе уравнения управления $v_1(t, x)$, $v_2(t, x)$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} dx_1 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1)dt + b_{12}x_2dw,\\ dx_2 &= (-a_{12}x_1 + a_{11}x_2 + v_2)dt - b_{12}x_1dw.\end{aligned} \tag{37}$$

Критерий абсолютной инвариантности по-прежнему имеет вид (27).

Функцию $\varphi(t, x)$ возьмем в виде $\varphi(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2}\Lambda(t)(x_1^2 + x_2^2)$, где $\Lambda(t)$ удовлетворяет уравнению: $\frac{d\Lambda}{dt} + (2a_{11} + b_{12}^2)\Lambda = 0$, $\Lambda(0) = 1$. Если положить

$$v_1 = \frac{1}{2}\frac{A}{t}x_1, \quad v_2 = \frac{1}{2}\frac{A}{t}x_2, \quad A > 2, \tag{38}$$

то все условия теоремы 2а будут выполнены.

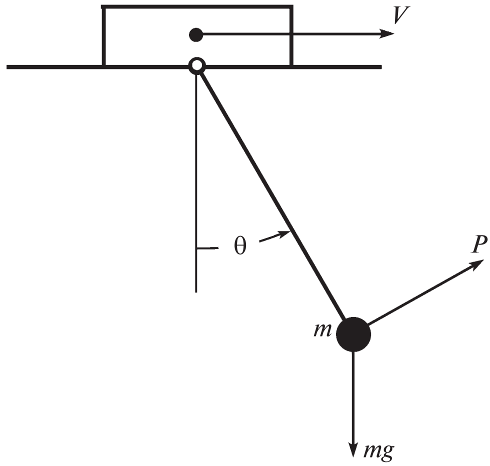

Рис. 1. Физическая интерпретация примера 4.6 – колебания маятника с подвижным основанием.

Однако управления (38) содержат сингулярность в точке $t = t_1 = 0$ и возникает вопрос, обсуждавшийся в замечании 4, о существовании решения системы (37). Для разрешения этого вопроса подставим управления (38) в систему (37) и сделаем в ней замену переменных:

$$x_1 = \frac{1}{2}Aty_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}Aty_2.$$

В результате для переменных y_1, y_2 получим линейную систему уравнений

$$dy_1 = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)dt + b_{12}y_2dw, \quad dy_2 = (-a_{12}y_1 + a_{11}y_2)dt - b_{12}y_1dw,$$

которая, естественно, имеет сильное решение на интервале $[t_{\min}, 0]$, где $t_{\min}$ — любое отрицательное число. А тогда и система (37) имеет решение на том же интервале.

Как следует из формулы (8), терминальное значение критерия (27) равно нулю. Из этого очевидно следует, что для любых начальных условий с вероятностью 1 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

Для этого примера 4.6 можно дать физическое истолкование.

Рассмотрим процесс колебаний в вертикальной плоскости маятника (рис. 1), состоящего из груза массы m, подвешенного на невесомом стержне длины l, точка подвеса которого a может перемещаться горизонтально со скоростью $V(t)$. На груз m действует сила тяжести mg и перпендикулярная к стержню l сила $P(t)$ (например, тяга реактивного двигателя или механизм, создающий момент силы относительно точки подвеса).

Величины $V(t)$ и $P(t)$ играют роль управлений и могут менять знак.

Линеаризованные уравнения движения маятника имеют вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{V}{l}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{P}{ml} - \frac{g}{l}\theta. \tag{39}$$

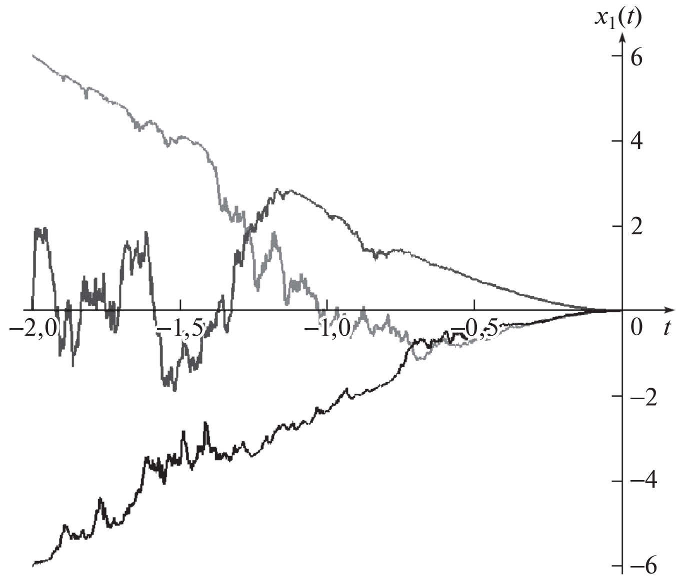

Рис. 2. Результаты моделирования трех реализаций случайного процесса для различных начальных точек в примере 4.6, демонстрирующие абсолютную инвариантность величины $x_1(0)$.

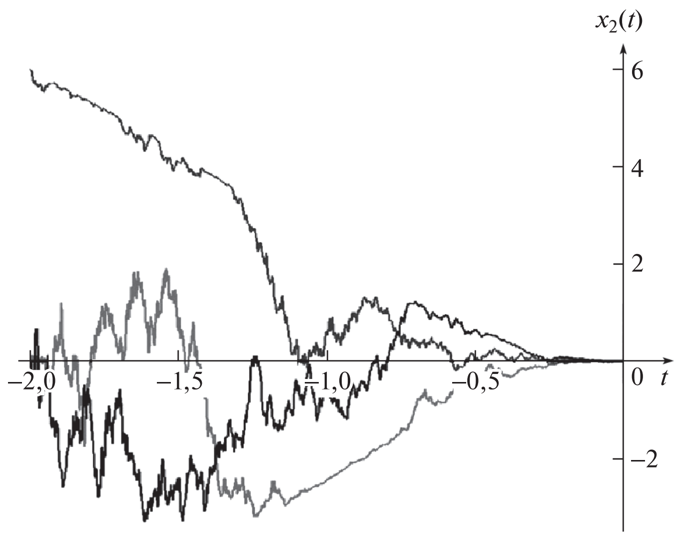

Рис. 3. Результаты моделирования трех реализаций случайного процесса для различных начальных точек в примере 4.6, демонстрирующие абсолютную инвариантность величины $x_2(0)$.

Линейная замена переменных $\theta = x_1,\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}x_2,\ t = \sqrt{\frac{l}{g}}\tau,\ V = -\sqrt{gl}v_1,$ $P = mgv_2$ приводит систему (39) к виду

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2 + v_1, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 + v_2. \tag{40}$$

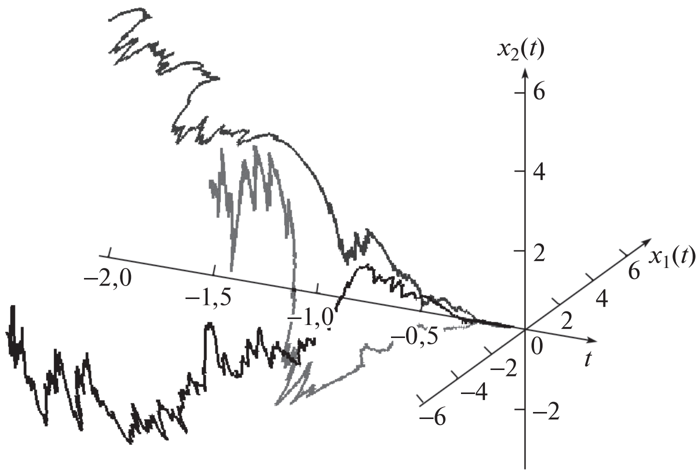

Рис. 4. Результаты моделирования трех реализаций случайного процесса для различных начальных точек в примере 4.6 – пространственная картина поведения переменных состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$ во времени.

Предположим, что на предложенную механическую систему действует случайное возмущение в виде винеровского процесса, так что система (40) с учетом возмущения имеет вид системы уравнений Ито:

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= (x_2 + v_1)dt + bx_2 dw,\\
dx_2 &= (-x_1 + v_2)dt + ux_1 dw.
\end{aligned} \tag{41}
$$

Здесь для удобства использования теории переменная τ заменена на t. Переменная $u = u(t)$ — дополнительное управление, позволяющее изменять характер действующих возмущений, а $b \neq 0$ – постоянная величина.

Если управление $u(t)$ взять в виде

$$
u(t) = -b, \tag{42}
$$

то система (41) представляет собой частный случай системы (37) и управления (38), (42) обеспечивают абсолютную инвариантность системы (41) по критерию (27). Физически это означает, что управления (38), (42) гасят колебания маятника в терминальный момент времени $t_1 = 0$.

На рис. 2, 3 показаны результаты моделирования реализаций случайного процесса $x(t) = (x_1(t),\, x_2(t))^{\mathrm{T}}$, $t \in [-2, 0]$ для трех различных начальных точек $x_0 = x(-2) = (6, 0)$, $x_0 = x(-2) = (0, 6)$, $x_0 = x(-2) = (-6, 0)$ (по одной реализации для каждой точки), демонстрирующие абсолютную инвариантность величин $x_1(0)$, $x_2(0)$. Величина A была выбрана равной 4. На рис. 4 показано поведение маятника в пространстве координат и времени.

Моделирование проводилось в системе MAPLE. Численное интегрирование системы уравнений Ито выполнялось классическим методом Эйлера [7]. Интервал интегрирования $[-2, 0]$ разбивался на 500 шагов. Величины $x_1(0)$, $x_2(0)$ на всех трех реализациях равны нулю с точностью до пятого знака после запятой. Их малое отличие от нуля обусловлено ошибкой численного счета реализаций случайного процесса. Численный расчет реализаций имеет чисто демонстрационный характер.

7. Заключение

Условия терминальной инвариантности работ [3, 4] конкретизированы для квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению, и приобрели достаточно конструктивный вид.

В настоящее время достаточно интенсивно развивается и используется в приложениях теория робастности — ограниченности действия возмущений. На этом фоне возможность добиться полной компенсации возмущений (инвариантности) выглядит весьма привлекательно.

Следует отметить, что, несмотря на трудности синтеза систем, обладающих свойством терминальной инвариантности (по возмущениям или абсолютной), эта задача намного "мягче" аналогичной задачи классической теории инвариантности, когда нужно синтезировать систему, в которой при заданном начальном условии $(t_0,\ x_0)$ изменение во времени заданной функции $\alpha(t,x)$ не зависит от возмущений. В стохастическом варианте в случае, когда с вероятностью единица $\alpha(t,x(t)) = \mathrm{const}$, такая функция по аналогии с детерминированными системами называется первым интегралом стохастической системы [8].

"Мягкость" задачи терминальной инвариантности состоит в том, что в ней первый интеграл $\alpha(t,x) = \varphi(t,x)$ не задается априори, а выбирается в процессе решения задачи, в результате ее решение зачастую не единственно. Используя это, часто можно выполнить дополнительные требования к алгоритму управления. Например, в случае, когда система имеет вид (2) и ищется линейная стратегия управления (3), можно потребовать, чтобы стратегия управления не зависела от некоторых компонент вектора состояния x не доступных измерению (пример 2 в разделе 6).

Абсолютная терминальная инвариантность не имеет аналогов в классической теории инвариантности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розоноэр Л.И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности // АиТ. 1963. № 6. С. 744–756; № 7. С. 17–22.

   Rozonoer L.I. A Variational Approach to the Problem of Invariance of Automation Control Systems // Autom. Remote Control. 1963. V. 24. No. 6. P. 680–743; No. 7. P. 793–800.

2. *Хрусталев М.М.* Необходимые и достаточные условия слабой инвариантности // АиТ. 1968. № 4. С. 17–22.

   Khrustalev M.M. Necessary and Sufficient Conditions of Invariance // Autom. Remote Control. 1968. V. 29. No. 4. P. 540–544.

3. *Хрусталев М.М.* Инвариантность стохастических систем диффузионного типа // ДАН. 2017. Т. 476. № 2. С. 148–150.

   Khrustalev M.M. Invariance of Stochastic Diffusion Systems // Dokl. Math. 2017. V. 96. No. 2. P. 535–537.

4. *Хрусталев М.М.* Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионного типа // АиТ. 2018. № 8. С. 81-100.

   Khrustalev M.M. Terminal Invariance of Stochastic Diffusion Systems // Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 8. C. 1434–1449.

5. *Хрусталев М.М.* Терминальная инвариантность линейных стохастических систем диффузионного типа // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1305–1309.
6. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
7. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988.
8. *Карачанская Е.В.* Построение множества дифференциальных уравнений с заданным набором первых интегралов // Вестн. ТОГУ. 2011. № 3 (22). С. 47–56.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я.Рубиновичем.

Поступила в редакцию 28.02.2020

После доработки 11.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020