

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2020 г. В.М. МАКСИМОВ, (vladislav.maksimov@phystech.edu)
(Московский физико-технический институт),
П.Ю. ЧЕБОТАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (pavel4e@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СОЦИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ ГОЛОСОВАНИЕМ: КВАРТИЛЬНЫЙ УЧЕТ ОСОБЕННОСТЕЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

В рамках модели социальной динамики, определяемой голосованием в стохастической среде (модель ViSE), исследуется влияние тяжести хвостов распределения на эффективность эгоистической и альтруистических стратегий в отношении максимизации двух критериев: среднего приращения капитала и числа неразорвавшихся участников. Рассмотрены однородные общества и четыре типа распределений, генерирующих предложения: нормальные, логистические, Стьюдента с тремя степенями свободы и симметризованные распределения Парето. Для оценки влияния тяжести хвостов стандартизация распределений по разбросу проводится на основе квартилей. Это позволяет отобрать для сопоставления распределения с тяжелыми хвостами, сравнимые по плотности с другими рассматриваемыми распределениями на интервале, включающем 90 % наблюдений.

Ключевые слова: модель ViSE, социальная динамика, динамическое голосование, стохастическая среда, яма ущерба, эгоизм, альтруизм, распределения с тяжелыми хвостами.

DOI: 10.31857/S0005231020100062

1. Введение

Основные положения модели ViSE (Voting in Stochastic Environment), предложенной для анализа полезности коллективных решений, состоят в следующем [1, 2].

Общество исходно состоит из n участников (агентов), каждый из которых характеризуется текущим значением капитала (его отрицательное значение — долг), или полезности. Задается вектор неотрицательных начальных значений капитала участников. На каждом шаге $t = 1, \dots, M$ на голосование ставится предложение, и участники голосуют, руководствуясь определенными стратегиями, за или против его принятия. Предложение есть вектор алгебраических приращений капиталов участников. Предложения, одобренные посредством принятой процедуры голосования, реализуются. Один из вариантов модели предполагает выбывание разорвавшихся участников, т.е. участников, чей капитал стал отрицательным (вариант “с вымиранием”). Анализ

динамики капиталов участников позволяет сравнивать стратегии голосования и процедуры принятия коллективных решений и выбирать среди них оптимальные в отношении максимизации того или иного критерия.

Предполагается, что каждое предложение формируется стохастически: его компоненты есть реализации случайных величин, в простейшем случае независимых и одинаково распределенных, с заданными математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ . Поэтому предложения, выносимые на голосование, могут быть также названы *предложениями стохастической среды*, или *предложениями среды*. Среда *благоприятна* при $\mu > 0$, *нейтральна* при $\mu = 0$ и *неблагоприятна* при $\mu < 0$.

Пусть $\mathbf{c}(m)$ — вектор капиталов участников по окончании шага $m \geq 0$; $\mathbf{c}(0)$ — вектор начальных значений капитала. В случае модели с вымиранием в число этих участников входят лишь те, чей капитал по окончании шага m неотрицателен. В случае без вымирания число компонент вектора $\mathbf{c}(m)$ остается равным n . Тогда

$$(1) \quad \mathbf{c}(m) = r(\mathbf{c}(m-1) + \boldsymbol{\zeta}(m) I(m)), \quad 0 < m \leq M,$$

где $\boldsymbol{\zeta}(m)$ — вектор предложения среды на шаге m ; M — общее число предложений;

$$I(m) = \begin{cases} 1, & \text{если предложение } \boldsymbol{\zeta}(m) \text{ принято голосованием;} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$r(\cdot)$ — оператор, исключающий из вектора отрицательные компоненты в модели с вымиранием и тождественный оператор в модели без вымирания.

Сравнение эффективности индивидуальных стратегий голосования и процедур принятия коллективных решений проводится на основании анализа статистических закономерностей изменения вектора капиталов (1) в разных средах, т.е. при различных распределениях, используемых для генерации предложений.

В данной работе статье исследуются решения, принимаемые простым большинством голосов, и следующие принципы голосования участников. *Эгоист* поддерживает предложение тогда и только тогда, когда оно увеличивает его капитал. Рассматриваются *альтруисты* со следующей стратегией. Участники упорядочиваются по возрастанию текущего значения капитала. Фиксируется $\delta \in [\frac{1}{n}; 1]$, и для текущего предложения среды находится сумма приращений капиталов $[\delta n]$ беднейших¹ участников, где $[\cdot]$ — целая часть. Альтруист поддерживает предложение тогда и только тогда, когда эта сумма положительна. *Окном поддержки* альтруистов называется отрезок $[0; \delta]$; δ может выражаться в процентах.

В [2] для нескольких типов стохастических сред исследовалось влияние социальных установок (эгоизм, альтруизм) на динамику благосостояния общества. Для анализа влияния типа распределения необходимо унифицировать

¹ Уже после первого принятого предложения капиталы участников можно считать различными, т.к. предложения генерируются случайными величинами с непрерывным распределением. Если в начальном состоянии капиталы не различаются, то до принятия первого предложения альтруисты находят сумму приращений капитала участников с порядковыми номерами $1, \dots, [\delta n]$.

распределения по параметрам положения и масштаба. Предложения генерировались посредством симметричных распределений, поэтому в качестве параметра положения использовалась медиана (совпадавшая со средним, поскольку для рассматриваемых распределений оно существовало). Масштаб оценивался стандартным отклонением, однако был сделан вывод, что это приводит к не совсем естественным результатам, а именно, к сопоставлению распределений, кардинально различающихся на интервале, где сосредоточена почти вся вероятность. Поэтому было указано на необходимость проведения нового исследования с использованием меры масштаба, более адекватной решаемой задаче.

Эта программа реализована в настоящей статье. В разделах 2 и 3 обсуждаются модель ViSE и недостатки унификации распределений по дисперсии при ее исследовании. В разделе 4 приведены основания другого подхода к стандартизации распределений – по квантилям. В разделе 5 этот подход применен для анализа социальной динамики при генерации предложений посредством нормального распределения и симметризованных распределений Парето. В разделе 6 в сравнение включены логистическое распределение и распределение Стьюдента. В разделах 5 и 6 формулируются качественные выводы о влиянии социальных установок участников и типа стохастической среды на динамику капиталов и скорость разорения. Получение этих выводов составляет главную цель статьи. Исследование проводится посредством имитационного моделирования, поскольку аналитические методы, разработанные в [1], не позволяют получить конечные выражения исследуемых величин для участников с альтруистическими стратегиями. В разделе 7 сформулированы основные результаты статьи.

2. Модель ViSE: основания и связь с реальностью

Модель ViSE — вариант развития модели голосования, предложенной А.В. Малишевским (см., например, [3], глава 2, раздел 1.3). А.В. Малишевский первым показал, что, лицо, обладающее монопольным правом ставить предложения на голосование (назовем его “предлагающим”), может за несколько шагов провести через голосующий орган фактически любое решение. В модели каждый голосующий поддерживает любое предложение, увеличивающее его индивидуальную полезность, при этом процедура голосования — квалифицированное большинство, но не единогласие. Для достижения своей цели предлагающий использует алгоритм “мелких подачек большинству”. Каждое предложение, которое он ставит на голосование, выгодно некоторому большинству, достаточному для принятия решения, но дает этому большинству суммарно меньше, чем отнимает у меньшинства. Ясно, что если в меньшинстве хотя бы по одному разу окажется каждый, то совокупный результат серии таких предложений можно сделать сколь угодно невыгодным для всех голосующих. Настолько невыгодным, что намеченное исходно “предлагающим” решение будет одобрено единогласно.

Как “снять” этот парадокс, демонстрирующий уязвимость демократических процедур? Можно попытаться исключить его, сделав модель более жесткой. В исходной модели “предлагающий” обладает огромной свободой: ему доступны любые предложения из пространства, размерность которого

равна числу голосующих. На практике предложения обычно принадлежат пространству более низкой размерности. Сохранится ли парадокс, если размерность пространства предложений равна, например, 2 или 3? Из работ Ч. Плотта, Р. Маккельви, Н. Скофилда, Д. Саари и др. [4–8] следует, что во многих случаях сохранится, хотя и необходимо выполнить определенные условия, в частности, связывающие порог большинства с размерностью пространства.

Как же реабилитировать демократию? Ясно, что необходимо ограничить монополию “предлагающего” либо изменить стратегии² голосования. Например, пусть предлагать могут сами участники голосования. Но в каком порядке? Одновременно (чтобы был выбор из нескольких проектов) или попеременно? Поодиночке или группами? Альянсы постоянны или ситуативны? Есть ли внешние предлагающие и сколько? Какой информацией обладают участники о предложениях и стратегиях остальных? Могут ли стратегии строиться рефлексивно? В зависимости от деталей процедуры, объема прав участников и их информированности возникает множество игровых постановок и... довольно хаотическая ситуация. Ряд задач такого рода можно решить [9–14], но результаты разнородны и локальны. Итог — скорее мозаика, чем общая система закономерностей. Причина, главным образом, в том, что постановки не образуют иерархической структуры, дерева. Нет основного “нулевого” варианта, после исследования которого можно было бы двигаться по боковым ветвям к все более изощренным постановкам.

Модель ViSE — это возможный нулевой вариант. Нет “предлагающего” со своей стратегией, вместо него внешняя среда, благоприятная, нейтральная или неблагоприятная, наделенная прерогативой предлагать. Разнообразие предложений обеспечивается ее стохастической природой. В простейшем варианте среда характеризуется *благоприятностью* — это μ/σ , где μ — среднее значение индивидуального предложения, σ — стандартное отклонение. Последнее можно рассматривать как масштаб, единицу измерения μ . Наиболее естественное распределение в нулевом варианте — нормальное.

Сохранится ли при этом парадокс Малишевского? Иными словами, могут ли серии решений, принимаемых большинством, быть в конечном счете невыгодны для всех? Причем невыгодны не иногда, а при определенных условиях систематически, “как правило”.

Этот вопрос фундаментален, поскольку касается самой природы коллективных решений, а не внешнего манипулирования ими. Иначе его можно сформулировать так: служит ли голосование эффективным фильтром при взаимодействии общества с неблагоприятной (но не изощренно-изобретательной) средой, требующей от него бинарных решений?

Этот вопрос нетривиален, и ответ в нулевом варианте таков [15]: да, в умеренно неблагоприятной среде реализуется парадокс “ямы ущерба” (вариант парадокса Малишевского). А именно: решения, принятые большинством голосов, как правило, невыгодны для общества.

² Под стратегией в моделях голосования рассматриваемого типа понимается алгоритм использования агентом имеющейся у него информации для принятия индивидуальных решений о поддержке предложений/кандидатов.

Не продолжая обсуждение этой темы в деталях, коснемся теперь жизненных прототипов модели ViSE. Представим себе страну, где решения принимает парламент, назовем его Госдумой. Предложения исходят от внешней по отношению к ней среды, например, ОПЕК+ предлагает соглашение об ограничении добычи нефти. Это предложение одни акторы внутри страны готовы поддержать, другие – нет. Одним силам (в том числе лоббистским), представленным в Госдуме, оно выгодно, другим нет. И его надо принять или отвергнуть. Другой пример: США или НАТО предлагают подписать новое соглашение о контроле над вооружениями. Та же ситуация. Или решение Гаагского окружного суда предписывает выплатить компенсации семьям погибших пассажиров сбитого Боинга. Надо решить, выполнить его или нет. Разные политические силы придерживаются разных мнений. Или может поступить предложение об участии в новом соглашении по ограничению выбросов парниковых газов. Если внешнеполитическая конъюнктура для страны благоприятна, то будет больше выгодных предложений, если нет, то наоборот.

Далее, поскольку решения принимает Госдума, предложения, приходящие из администрации президента или из правительства, для нее тоже внешние. И они отражают определенную внешнюю конъюнктуру: во-первых, насколько президент и/или правительство действуют в интересах страны, во-вторых, эти предложения неизбежно транслируют общие экономические, социальные, политические тенденции и вызовы. В качестве актуальных примеров можно привести предложение о поправках в Конституцию или предложение о введении экстренных мер в связи с пандемией коронавируса. Общая ситуация влияет на страну и помимо решений Госдумы, но предметом изучения является не это безусловное воздействие, а эффективность и рациональность коллективных решений.

Другой класс примеров. Представим себе совет директоров компании. Менеджмент или отдел планирования предлагает новую стратегию развития компании. Нужно ее принять либо отвергнуть, отправить на доработку и пока двигаться прежним курсом. При этом у каждого члена совета директоров есть свое мнение и свои интересы. Можно рассмотреть “игры” с менеджментом или отделом планирования, но есть другой важный круг вопросов, связанный с эффективностью процедуры голосования и стратегиями его участников. Либо другая компания – потенциальный партнер – предлагает нашей компании сделку. В чем-то сделка выгодна, в чем-то нет. Нужно принять или отклонить предложение. А если оно не отклонено безусловно, его можно послать на доработку. Причем чем лучше идут дела у компании (и чем лучше экономическая ситуация), тем благосклоннее к ней “среда”, тем более выгодные предложения потенциальных партнеров она в среднем генерирует и предлагает для голосования.

Разумно ли полагать компоненты комплексного предложения, относящиеся к разным агентам, статистически независимыми? Поскольку предложения достаточно разнородны, из выгодности предложения для политических сил (или членов совета директоров) А и В не следует ни выгодность, ни невыгодность его для силы С. Как известно, в политике по разным поводам могут возникать неожиданные альянсы: левых с ультраправыми и т.п. Поэтому независимость — вполне допустимый нулевой вариант. Если рассматривает-

ся класс ситуаций, в которых выигрыши разных сил имеют фиксированную сумму или жестко связаны иным образом, в рамках модели могут быть наложены соответствующие дополнительные ограничения.

Позволяет ли модель ViSE получать выводы, приложимые к реальности? Приведем несколько примеров.

1. В модели реализуется [16] известный “эффект малой партии”, состоящий в том, что в присутствии двух больших партий, ни одна из которых не имеет большинства, малая партия, образующая большинство с любой из больших, получает преимущество, а иногда, когда большие партии выступают с противоположных позиций, — и положение, сравнимое с диктаторским.
2. Модель ViSE выявляет [16] один из механизмов устойчивости двухпартийной системы с почти равными по силе партиями.
3. В модели реализуется [16, 17] механизм “снежного кома кооперации”: поскольку принадлежность к группе обычно выгоднее, чем индивидуальная защита своих интересов, участники присоединяются к группе, и по мере ее роста групповой эгоизм становится все ближе к альтруизму.
4. Давно является классическим такой инструмент анализа, как индексы влияния фракций в парламенте. Исследование зависимости приращений полезности в модели ViSE и индексов влияния приводит к следующему выводу: при простейшем наборе параметров средние приращения полезностей линейно связаны (после естественной нормировки) со значениями индекса Банцафа. Это, с одной стороны, дает новую интерпретацию полезностям модели ViSE, с другой — позволяет среди разнообразия индексов влияния выделить индекс Банцафа как имеющий “внешние” интерпретацию и подтверждение. Таким образом, модель влияния Банцафа и модель ViSE подкрепляют друг друга (это вывод еще не опубликованной работы).
5. Обсуждавшийся выше результат анализа модели ViSE — парадокс “ямы ущерба”. Он имеет [15] механизм, несомненно, реализующийся на практике. А именно: в неблагоприятной среде выигрыши в среднем меньше, а проигрыши больше, чем в нейтральной среде с тем же разбросом, тем самым средняя разность модулей выигрыша и проигрыша отрицательна. Поэтому предложения, принятые простым большинством с малым перевесом голосов “за”, будут чаще давать суммарный проигрыш, чем выигрыш. Этот механизм едва ли четко выявляется другими моделями. Практическое следствие: чем среда менее благоприятна, тем выше в ней должен быть порог голосования для принятия новых предложений.
6. Вывод предыдущего пункта 5 допускает исключения. Последние связаны с распределениями с тяжелыми хвостами, которые в ряде случаев адекватно описывают политико-экономическую неопределенность. Изучение данного круга вопросов позволяет ввести понятие оптимального порога голосования [15] и выразить его общей формулой [18].
7. Сравнение распределений с легкими и тяжелыми хвостами в качестве генераторов неопределенности в модели ViSE и альтруистических стратегий с разными окнами поддержки позволяет [2] указать эффекты, соотносимые с явлением “антихрупкости”, и “стратегией штанги”, обсуждаемыми Н. Талебом.

8. Кроме парадокса “ямы ущерба”, анализ модели ViSE позволяет выявить еще один интересный парадокс голосования: в действительно благоприятной среде при определенных условиях голосование большинством может давать худшие в среднем результаты для общества, чем принятие всех предложений “не глядя”. Численно данный парадокс симметричен парадоксу “ямы ущерба”, что кажется на первый взгляд простым фактом, но имеет нетривиальное доказательство.
9. Одна из ключевых проблем не только общественных наук, но и общественной практики — сравнение рациональности (с позиций индивидуума и общества) социальных стратегий — узкоэгоистических и просоциальных, включая коллективистские, ориентированные на общее благо, предполагающие филантропию и т.д. Одна из возможных целей таких исследований — показать гражданину, что он не проиграет, если будет придерживаться просоциальных стратегий. А точнее — выяснить, в каких условиях какая стратегия что ему принесет. Численный анализ проблем такого рода традиционно проводится на материале матричных игр. Но совокупность получаемых результатов, как и в стратегических задачах голосования, больше похожа на мозаику, чем на общие закономерности. Модель ViSE дает необыкновенную гибкость задания внешних условий, структур общества и социальных установок. Например, в ее рамках можно описать большое разнообразие просоциальных стратегий, причем выводы из анализа имеют форму закономерностей. Эти выводы можно соотнести с реальностью и оценить, насколько жизненны модельные механизмы, к ним приводящие. Данный пункт перечисления применений модели ViSE объемнее предыдущих, поэтому продолжим его обсуждение отдельно.

Итак, исследование феноменов кооперации, коллективизма и альтруизма, как отмечено выше, часто ведется посредством изучения динамики простых игр с использованием имитационного моделирования и “лабораторных” экспериментов с людьми. Одна из наиболее популярных среди этих игр — дилемма заключенного.

Однако достаточно очевидна метафорическая условность данного подхода. Жизненные ситуации, в которых человек выбирает линию социального поведения, не так уж часто похожи на дилемму заключенного. Ее ключевое условие — недостаток информации: игрок не знает, какую стратегию выберет визави, а именно этим во многом определяется его выигрыш/проигрыш. Если другой также протянет ему руку, оба выиграют по сравнению с индивидуализмом каждого, а если откажет, то отказавший “сорвет банк”, а тот, чья рука повиснет в воздухе, проиграет. Особенность реальной жизни в том, что люди могут *договариваться*³ и в существенной мере контролировать соблюдение договоренностей. То есть ключевой элемент данной модели не всегда отвечает реальности. Кроме того, дилемма заключенного — это игра двух лиц, а в жизни в кооперацию вовлечено обычно большее число агентов, причем механизм ее не сводится к попарным взаимодействиям. Несмотря на то, что лишь малая часть проблем реальной кооперации адекватно описывается моделями, основанными на дилемме заключенного (а в остальных случаях

³ Не учитывается это и в таких играх, как “Ультиматум”, “Диктатор”.

связь этих моделей с реальностью лишь метафорическая), соответствующие модели ценны и интересны. Они затрагивают важный аспект реальности — влияние информационной неопределенности на кооперацию двух лиц, и в их рамках можно получать нетривиальные результаты.

Отмеченная ограниченность дилеммы заключенного как модели кооперации — “парность” взаимодействий — снимается рассмотрением других игр, таких, например, как Public Goods (общественные блага). Но и здесь выгода участника всецело зависит от соотношения его стратегии и неизвестных ему стратегий других игроков, и в центре оказывается проблема “фрирайдерства” (безбилетничества, паразитизма).

В жизни также есть “фрирайдерство”, затрудняющее кооперацию, но проблематика кооперации не сводится к этому феномену.

Проблема реального человека, определяющего степень кооперативности своего поведения, главным образом, не в незнании, как поступят другие, а в том, что “своя рубашка ближе к телу”. Он может пойти и купить себе и своим детям рубашки, и, надев их, они будут рады. А может вложить свои деньги / усилия в более или менее абстрактное общее благо, но его дети продолжат ходить в старых рубашках. Общее благо принесет, скорее всего, пользу со временем всем, либо незащищенным уже сегодня, но оптимальная пропорция вложений в общее и индивидуальное благо для каждого своя и зависит от обстоятельств.

Важно отметить, что в жизни даже адекватная информация о поведении других агентов (нередко имеющаяся) не устраняет сложности выбора стратегии. Она в том, что эффект вложений в общее благо отложен и трудно прогнозируем. Потому что, образно говоря, агенты плывут на общем корабле (или на разных лодках) по бурному морю, где их ждут различные сюрпризы. Новая рубашка уже сейчас полезна, а что и когда вернется ему с рубля, вложенного в общее благо, оценить трудно. Таким образом, источником неоднозначности служат не только (а часто не столько) неизвестные стратегии “коллег”, но и неопределенность *внешней среды* (не говоря о непростой проблеме дисконтирования).

Именно такая внешняя среда является одним из основных элементов модели ViSE. Участник может вложить свой ресурс (голос при голосовании) в свое благо или в благо всего общества или какой-либо его страты, ему небезразличной (куда сам он может и не входить, например, это может быть группа беднейших). Кроме того, у него может быть сколь угодно сложная “комбинированная” стратегия голосования, с разными весами учитывающая его благо, благо всего общества и благо любого числа групп. Это дает большую гибкость задания стратегий поведения, похожих по структуре на стратегии в реальном мире. Например, используя комбинированные стратегии, можно моделировать такую страту общества, как *ответственная элита* [19]. Включение комбинированных функций полезности в модели игр типа Public Goods не представляется столь же естественным.

Выше отмечалось, что анализ модели ViSE с альтруистическими агентами позволяет сформулировать определенные закономерности. Перечислим некоторые из простейших выводов [2, 19, 20]. 1. “Принципиальный” (“hard-core”

по терминологии Эдварда Уилсона [21]) альтруизм, являющийся относительной редкостью, может быть в ряде случаев заменен рациональной стратегией, исходящей из подтверждаемой теоретически выгоды коллективизма, что может вести к восприятию все большей части общества как своего коллектива. 2. Обществу, вообще говоря, не обязательно, чтобы большинство его членов были альтруистами: к сопоставимому результату приводит наличие весьма умеренной их доли. В частности, сравнительно небольшая альтруистическая фракция может защитить общество от разорения, но сама эта фракция оказывается в наиболее уязвимом положении. 3. Если альтруистическая фракция достигает определенной критической массы, ее уязвимость снижается до допустимых границ. 4. Полезность для общества тех или иных альтруистических стратегий сильно зависит от свойств внешней среды: так, в благоприятной среде рациональна благотворительность по отношению к сравнительно немногим, но в неблагоприятной среде правильнее помогать всем, поскольку все находятся в зоне риска. 5. Поскольку обществу весьма полезно наличие участников с просоциальной стратегией голосования, но сами эти участники наименее защищены, обществу имеет смысл оказывать этим участникам дополнительную поддержку; при этом польза для остальных оказывается выше их издержек на поддержку.

Исследование модели позволяет проследить теоретические механизмы реализации этих и других выводов. Указанные механизмы могут быть соотнесены с реальностью, что позволяет оценить адекватность выводов определенным жизненным ситуациям.

Последний (5-й) вывод определяет подход к сравнению схем налогообложения. Поэтому в перечисление применений обсуждаемой модели можно добавить следующий пункт.

10. Модель ViSE может быть состыкована с финансовыми моделями налогообложения, распределяемого в пользу участников, работающих на общество. Использование для той же цели игровых моделей кооперации представляется менее продуктивным.

Элементом применения математических моделей нередко является их идентификация, т.е. определение значений параметров, соответствующих наблюдениям.

Идентификация модели ViSE в принципе возможна. Так, для совета директоров фирмы или парламента, где представлены разные силы, можно пытаться оценить выгодность серии вносимых извне проектов для отдельных голосующих / политических сил и тем самым оценить μ , σ и вид распределения-генератора. В свою очередь, это даст возможность найти оптимальный порог голосования для предложений исследуемого типа, а также оценить динамику полезностей и выраженность различных эффектов.

Однако, как и в случае ряда игровых моделей, применение модели ViSE не сводится к расчету параметров и эффектов по наблюдениям. Ценность представляет также выявление феноменов и механизмов, которые без модели выявить трудно. Один из простых примеров, уже обсуждавшихся выше, — разнородное меньшинство, которое систематически теряет больше, чем приобретает большинство. Это фундаментальный и очень важный фено-

мен, который можно назвать основным пороком голосования. Его всегда, при любом принятии коллективных решений, нужно иметь в виду, и он требует применения конкретных мер, которые могут быть сначала опробованы на модели. А пример механизма, который можно использовать на практике, — “снежный ком кооперации”, т.е. приближение группового эгоизма успешной и открытой (для вступления в нее) группы — к альтруизму. Этот образ использовался в статье [22], где на материале исследования модели ViSE обсуждались механизмы развития гражданского общества, а именно, речь шла о выстраивании сети взаимоподдержки его ячеек. При этом решение о поддержке любого запроса принимается каждой ячейкой самостоятельно, но те ячейки, которые систематически отказывают другим в поддержке, исключаются из сети. В приведенном выше перечислении приложений (в частности, в п. 9) отмечено также несколько других феноменов и механизмов. Их можно соотносить с реальностью, оценивая их действенность в конкретных условиях.

3. Унификация распределений по дисперсии при анализе модели ViSE

В [2] в числе прочих рассматривались среды, генерирующие предложения, подчиняющиеся симметризованному распределению Парето (*СП-распределению*) со сверхтяжелыми хвостами.

СП-распределение с параметрами $k > 0$, $a > 0$ и μ имеет [2] плотность

$$(2) \quad f(x) = \frac{k}{2a} \left(\frac{|x - \mu|}{a} + 1 \right)^{-(k+1)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

среднее μ при $k > 1$ и дисперсию $\sigma^2 = 2a^2 / ((k - 1)(k - 2))$ при $k > 2$. При невыполнении указанных неравенств соответствующие интегралы расходятся. При $k \rightarrow \infty$ СП-распределение сходится к распределению Лапласа с плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\sigma} \sqrt{2}\right)$ (лемма 3 в [2]).

В [2] сравнивались средние значения капитала участника за один шаг голосования для нескольких симметричных распределений, имеющих одинаковые математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . При этом было отмечено, что два симметричных распределения с совпадающими μ и σ могут отличаться кардинально. Так, помимо непрерывности, симметричности, инфинитности и общей моды, у распределений, плотности которых показаны на рис. 1, сложно обнаружить какую-либо общность. В точке моды $x = 1$ их плотности относятся как 20 к 1, а в точке $x = 0$ — как 1 к 43.

По рис. 1 трудно предположить, что эти два распределения имеют равную дисперсию: “на глаз” типичные отклонения от $\mu = 1$ для распределения с $k = 1000$ существенно выше. Объяснить равенство их дисперсий позволяет рис. 2, где те же две плотности (при $x \geq 1$) показаны в логарифмических шкалах. Хвосты распределения с $k = 2,01$, кажущиеся “легкими” в пределах рис. 1, на большом удалении от среднего (при $|x - \mu| > 8$) оказываются значительно более тяжелыми, чем хвосты распределения с $k = 1000$. Поскольку $P(|x - \mu| > 8) \approx 7,4 \cdot 10^{-5}$, наблюдения, относящиеся к столь отдаленным

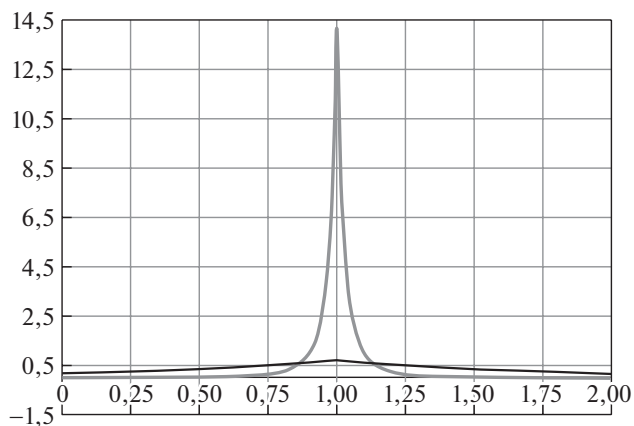


Рис. 1. Плотности двух симметризованных распределений Парето с $\mu = 1$, $\sigma = 1$. Серая линия: $k = 2,01$; черная линия: $k = 1000$.

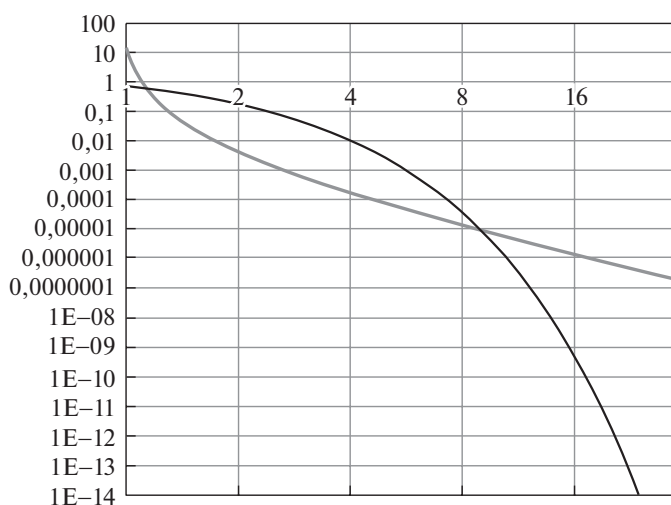


Рис. 2. Плотности двух симметризованных распределений Парето с $\mu = 1$, $\sigma = 1$ в логарифмических шкалах при $x \geq 1$. Серая линия: $k = 2,01$; черная линия: $k = 1000$.

хвостам, встречаются крайне редко. Влияние относительной тяжести этих хвостов в экспериментах небольшого объема может быть описано в терминах отличия понятий “почти невероятно” и “практически невероятно”.

Однако благодаря этим хвостам СП-распределение с $k = 2,01$ имеет единичную дисперсию, как и показанное на рис. 1 распределение Парето с $k = 1000$. Таким образом, слабо влияющие на результаты экспериментов (во всяком случае, при исследовании модели ViSE) хвосты заставляют сравнивать СП-распределение с $k = 2,01$ с не похожими на него другими распределениями — если стандартизация распределений производится по μ и σ . Тем самым возникает потребность в ином принципе установления соответствия

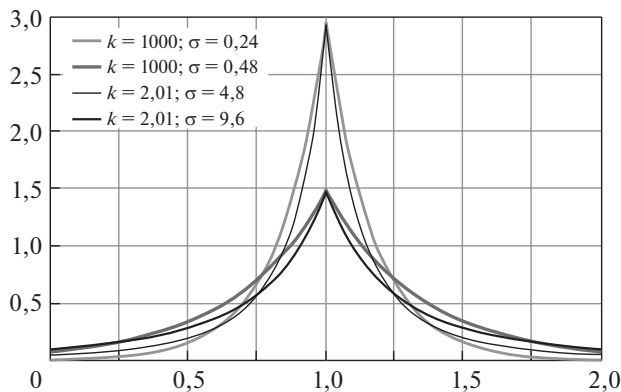


Рис. 3. Примеры функций плотности симметризованных распределений Парето с $\mu = 1$.

между распределениями. Такой принцип обсуждается в следующем разделе 4.

Спорность в данном контексте соответствия, установленного по среднему и дисперсии, была отмечена в [2]: “В статье анализируется социальная динамика в модели ViSE при разнотипных вероятностных распределениях, имеющих одинаковые математическое ожидание и дисперсию. Такая стандартизация по параметрам часто используется и представляется естественной. Однако обратимся к рис. 3 [нумерация приведена в соответствии с настоящей статьей], где показаны две пары СП-распределений, сравнительно близких в большой окрестности моды — точки μ .

Как было отмечено, распределения, входящие в каждую пару, отличаются по σ в 20 раз. Если привести распределения со сверхтяжелыми хвостами ($k = 2,01$) к той же дисперсии, что и распределения с $k = 1000$, то первые “сконцентрируются” в 20 раз, и никакого сходства в окрестности моды уже не будет. Вопрос: какое из распределений с $k = 2,01$ имеет смысл сопоставлять с распределением, у которого $k = 1000$? Исходное, близкое к нему при заметных значениях плотности, но с большей в 400 раз дисперсией, или имеющее ту же дисперсию и при этом плотность, очень быстро убывающую при удалении от μ ? Есть сильные аргументы, свидетельствующие в пользу первого ответа. Это указывает на осмысленность иных подходов к стандартизации распределений. Так, аналогичными можно считать распределения, одинаковые по μ и по ширине интервала с центром в μ , содержащего “половину” или “большую часть” распределения. Тогда [...] выводы проведенного исследования дополнятся новыми”.

Тот факт, что стандартизация по дисперсии чрезмерно сосредотачивает распределения Парето с тяжелыми хвостами вблизи моды, объясняется тем, что любое увеличение вероятности больших выбросов (учитываемых при вычислении дисперсии квадратично) должно быть уравновешено снижением вероятности отклонений среднего диапазона, превосходящих σ , и/или увеличением вероятности отклонений, меньших σ . Тем самым утяжеление хвостов при фиксированной дисперсии приводит к ускорению убывания плотности

при удалении от среднего (совпадающего с модой) и, возможно, к увеличению плотности в самой моде.

В настоящей статье в рамках модели ViSE сопоставляются несколько симметричных непрерывных распределений с равными значениями среднего μ и ширины интервала с центром в μ , содержащего “половину” распределения, т.е. интервала, интеграл по которому от плотности равен 0,5. Данный подход будем называть стандартизацией симметричных распределений *по квартилям*, или *по математическому ожиданию и односторонней медиане*.

4. Стандартизация распределений по квартилям для анализа модели ViSE

При исследовании модели ViSE большой интерес представляет анализ влияния на социальную динамику *типа распределения*, посредством которого генерируются предложения. Рассматриваемые распределения унимодальны и симметричны относительно моды. При этом понятие типа распределения включает, в частности, тяжесть хвостов и вид функции плотности вблизи моды, но исключает [23, 24] параметры положения (среднее, в данном случае совпадающее с модой и медианой) и разброса/масштаба (к которым относится дисперсия). Для симметризованных распределений Парето [2] тип распределения задается параметром $k > 0$: чем меньше k , тем тяжелее хвосты распределения. При $k \leq 2$ распределение Парето не имеет дисперсии, а при $k \leq 1$ не имеет и математического ожидания.

Мерой, часто используемой для характеристики тяжести хвостов распределения (и одновременно формы его пика), является предложенный К. Пирсоном эксцесс: $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, где $\mu_4 = E[(X - EX)^4]$ — четвертый центральный момент распределения, σ — его стандартное отклонение. Однако в данном случае эксцесс неприменим, поскольку для распределений Парето он существует лишь при $k > 4$, а в [2] и данной статье рассматриваются в числе прочих распределения Парето со значениями k , близкими к 2. Альтернативные меры, как правило, определяются через квантили распределения (см., например, [23]).

Для оценки влияния типа распределения на социальную динамику будем сравнивать распределения, имеющие одинаковые значения квартилей Q_1 , Q_2 и Q_3 , отсекающих $1/4$, $1/2$ и $3/4$ единичной вероятности соответственно: $Q_s = F^{-1}(\frac{s}{4})$, $s = 1, 2, 3$, где $F(\cdot)$ — непрерывная функция распределения. Такие распределения будем считать аналогичными по моде (ею в силу симметрии и унимодальности является медиана — центральный квартиль), и масштабу (разбросу).

Таким образом, условием включения двух симметричных функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в один класс является выполнение равенств

$$(3) \quad F_1^{-1}(0,25) = F_2^{-1}(0,25); \quad F_1^{-1}(0,5) = F_2^{-1}(0,5),$$

из которых в силу симметрии распределений следует $F_1^{-1}(0,75) = F_2^{-1}(0,75)$. Отметим, что данный способ сопоставимого шкалирования распределений рассматривался как наиболее приемлемый в [23, 25] и ряде других публикаций.

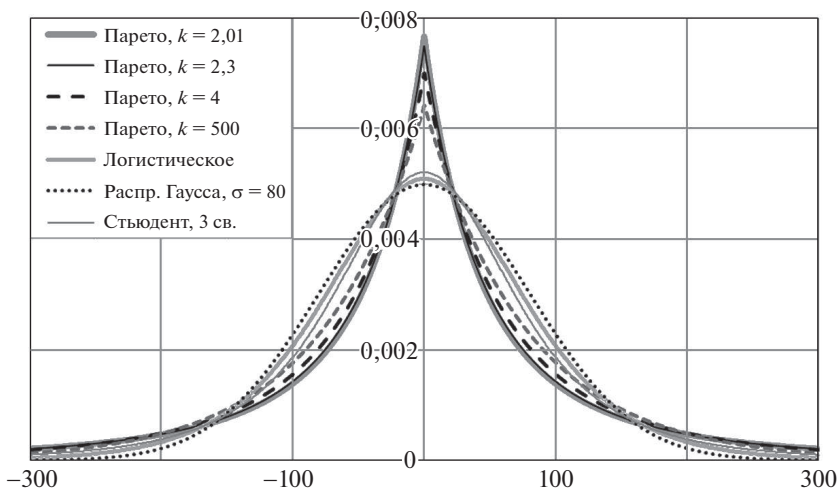


Рис. 4. Плотности рассматриваемых распределений, для которых $\mu = 0$ и $Q_3 \approx 53,95918$: нормального ($\sigma = 80$), логистического, распределения Стьюдента с 3 степенями свободы (“3 св.”) и симметризованных распределений Парето с разными k .

Для определенности будем рассматривать классы распределений, включающие распределение Гаусса (нормальное распределение) с параметром $\sigma = 80$. Каждый такой класс характеризуется медианой $F^{-1}(0,5)$ всех входящих в него распределений. На рис. 4 плотность нормального распределения с параметром $\sigma = 80$ представлена наряду с плотностями нескольких других распределений: Стьюдента с тремя степенями свободы, логистического и симметризованного Парето с четырьмя значениями параметра k .

Распределения с $k = 2,1$ и $k = 2,01$ можно назвать распределениями со *сверхтяжелыми хвостами*, поскольку при еще большей тяжести хвостов ($k \leq 2$) параметры социальной динамики не удастся оценить усреднением результатов имитационного моделирования из-за отсутствия дисперсии. В “худшем случае” при $k = 2,01$ в интервал $[-281; 281]$ попадает 90 % наблюдений.

Следует заметить, что квантильный подход служит основой разработки семейства мер тяжести хвостов, предложенных в [25]. Эти меры оценивают распределение по отношению к его квантилям и в свою очередь восходят к мерам Хинкли [26]. Так, левый квантильный вес (LQW) и правый квантильный вес (RQW) определяются формулами

$$\text{LQW}_F(p) = \frac{F^{-1}\left(\frac{p}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right) - 2F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)}{F^{-1}\left(\frac{p}{2}\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)},$$

$$\text{RQW}_F(q) = \frac{F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) + F^{-1}\left(1 - \frac{q}{2}\right) - 2F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{F^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{q}{2}\right)},$$

где $0 < p < 0,5 < q < 1$. Для оценки тяжести левого и правого хвоста распределения используются, в частности, $\text{LQW}_F(0,25)$ и $\text{RQW}_F(0,75)$.

Стандартизация (3), в отличие от использованной в [2], где разброс оценивался среднеквадратичным отклонением, приводит к сопоставлению функций плотности, сравнимых по значениям в окрестности среднего, включающей большую часть распределения. Это позволяет получить выводы о зависимости динамических свойств модели ViSE от типа распределений, лучше интерпретируемые в терминах приложений.

5. Исследование социальной динамики при стандартизации распределений по квартилям

Перейдем к анализу результатов исследования социальной динамики в модели ViSE при стандартизации распределений по квартилям. На рис. 5,а графики среднего приращения капитала за один шаг голосования (СПК; см. [2]) эгоистов при СП-распределении не имеют (в отличие от распределения Гаусса) существенной “ямы ущерба” [2], т.е. участка по μ , где голосование в среднем приводит к невыгодным для общества решениям. В обществе, состоящем из эгоистов, при отсутствии вымирания утяжеление хвостов симметризованного распределения Парето приводит к большим значениям СПК при тех же μ .

В обществе из альтруистов с окном поддержки [0; 65 %] (рис. 5,б), если k достаточно велико (в данном случае — при $k > 2,3$), то график СПК имеет заметную яму ущерба; при увеличении k она сдвигается вправо. Чем тяжелее хвосты распределения, тем выше положительные значения СПК. При отрицательных СПК (в яме ущерба) это утверждение выполняется не всегда. Наличие ямы ущерба связано с тем, что альтруисты поддерживают лишь 65 % общества; при окне поддержки [0; 100 %] она невозможна по определению альтруистической стратегии.

Положительное влияние тяжести хвостов на скорость роста СПК — свойство, ярко проявляющееся именно при стандартизации распределений по квартилям. При содержательно неоправданной стандартизации по среднему и дисперсии реализуется обратная закономерность (см. рис. 5 в [2]), поскольку увеличивающие СПК большие выбросы получают при k , близких к 2, очень низкую вероятность, и их присутствие компенсируется малостью типичных положительных отклонений от среднего (см. рис. 1).

В случае с вымиранием (рис. 5,в) тяжесть хвостов также увеличивает СПК — как эгоистов, так и альтруистов с окном [0; 65 %], но на СПК альтруистов влияет намного сильнее. При фиксированном k СПК альтруистов существенно выше, чем у эгоистов; СПК альтруистов при $k = 20$ сравнимо с СПК эгоистов при $k = 2,1$. Таким образом, альтруистические общества с вымиранием эффективнее эгоистических по критерию СПК.

На рис. 5,г показаны линии относительной численности (в случае с вымиранием) участников после 500-го хода: эгоистов и альтруистов с окнами поддержки [0; 65 %] и [0; 100 %] при значениях k , равных 2,01, 2,1 и 200. Все рассматриваемые функции численности при $\mu = -10$ принимают значения на небольшом отрезке [0,15; 0,16]. При $\mu < -13$ и фиксированном k лучше всех сохраняют численность эгоисты, затем альтруисты с окном [0; 100 %] и, наконец, альтруисты с окном [0; 65 %], но при $\mu > -2$ порядок обратный! В рамках

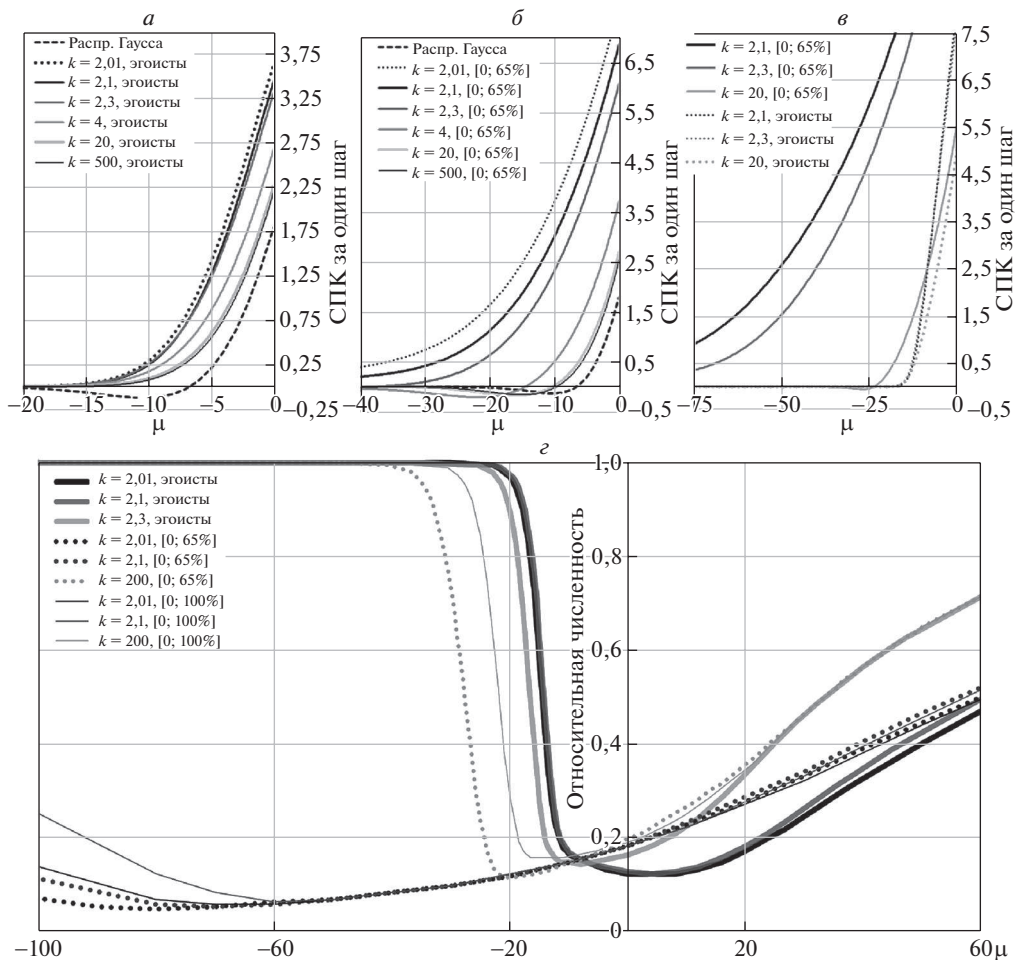


Рис. 5. СП-распределения с $k \in (2; 2,3]$ в сравнении с другими распределениями. СПК за один шаг без вымирания: *а* — эгоисты, *б* — альтруисты с окном $[0; 65\%]$. Эгоисты и альтруисты с вымиранием: *в* — СПК за 1 шаг, *г* — доля участников после 500 шагов. Начальное число участников $n = 201$; начальный капитал участника $C_0 = 40$; стандартизация по квартилям; для распределения Гаусса $\sigma = 80$.

этой закономерности различия в численности в одних случаях почти отсутствуют, в других — весьма велики. То, что при заметных отрицательных μ и симметризованных распределениях Парето эгоисты лучше сохраняют численность, чем альтруисты с окном $[0; 100\%]$, уже отмечалось ранее (в связи с рис. 3,б в [2]).

При $\mu < -6,6$ численность эгоистов лучше сохраняется в случае распределений с тяжелыми хвостами; при $\mu > -6,6$ — напротив, для распределений с более легкими хвостами. Скорости разорения при распределениях с $k = 2,01$ и $k = 2,1$ отличаются незначительно, однако при $k = 200$ отличие от распределений с тяжелыми хвостами значимо.

На численность альтруистов тяжесть хвостов распределения влияет отрицательно и весьма существенно. Так, для альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ при $k = 200$ и $\mu = -50$ после 500-го шага общество сохраняется практически полностью, а при $k = 2,1$ остается лишь 7% участников. В случае $\mu > 20$ такое общество также заметно лучше сохраняется при высоких k . Лишь в интервале $-20 < \mu < 5$ (особенно в слабо неблагоприятной среде, при $\mu \in [-20; -3]$) значение k почти не влияет на финальную относительную численность, растущую с увеличением μ от 0,12 до 0,22. При $\mu \in [-20; -10]$ в среде с $k = 200$ разорение даже чуть быстрее, чем в средах с $k = 2,1$ и $k = 2,01$. Для альтруистов с окном поддержки $[0; 100\%]$ в целом наблюдаются те же качественные закономерности, причем на луче $\mu < -10$ численность сохраняется лучше, чем при окне $[0; 65\%]$, а на луче $\mu > 0$ — хуже.

Таким образом, наличие больших выбросов заметно интенсифицирует процесс разорения альтруистов, а при достаточно высоких μ (в данном случае при $\mu > -6,6$) также и эгоистов. При стандартизации распределений по среднему и дисперсии, приводящей к сопоставлению очень непохожих распределений, этот эффект не проявляется и численность, напротив, лучше сохраняется при распределениях с тяжелыми хвостами (рис. 5,2 в [2]).

Быстрее всего общество разоряется при умеренных отрицательных значениях μ ; исключения составляют общества из эгоистов при распределениях со сверхтяжелыми хвостами ($k = 2,01$, $k = 2,1$), еще интенсивнее разоряющиеся в слабо благоприятной среде. Отклонение μ от указанных значений ослабляет разорение: при уменьшении μ — из-за отказа от большей части разоряющих предложений, при увеличении μ — за счет повышения благоприятности предложений.

Сравнение графиков на рис. 5,6 и 5,2 приводит к следующим выводам. СПК всегда растет с тяжестью хвостов, но этот рост сопровождается (для альтруистов, а при $\mu > -6,6$ и для эгоистов) увеличением темпов разорения. Исключения составляют эгоисты при $\mu < -6,6$: для них с увеличением тяжести хвостов разорение замедляется одновременно с ростом СПК. Однако при увеличении μ от этих значений растет доля принятых предложений. В результате заметной величины достигает частота больших разорительных потерь, внедряемых в принятые предложения распределениями с тяжелыми хвостами. Поэтому рост μ увеличивает сравнительную опасность таких распределений в отношении разорения.

Рисунки 6,а и 6,б представляют (в более мелком масштабе, чем на рис. 5) линии СПК эгоистов и альтруистов при отрицательных и положительных μ в модели с вымиранием. В случае $\mu > 0$ СПК также растет с убыванием k , т.е. с увеличением тяжести хвостов.

В благоприятной среде (как и в умеренно неблагоприятной) самое высокое СПК имеют альтруисты с окном поддержки $[0; 100\%]$, ниже СПК альтруистов с окном $[0; 65\%]$, еще ниже СПК эгоистов, причем этот порядок, разумеется, не зависит от стандартизации распределений, поскольку не требует сравнения распределений друг с другом.

Графики численности (рис. 6,в) на дополнительном материале (добавлено СП-распределение с $k = 3$) подтверждают выводы, полученные при анализе

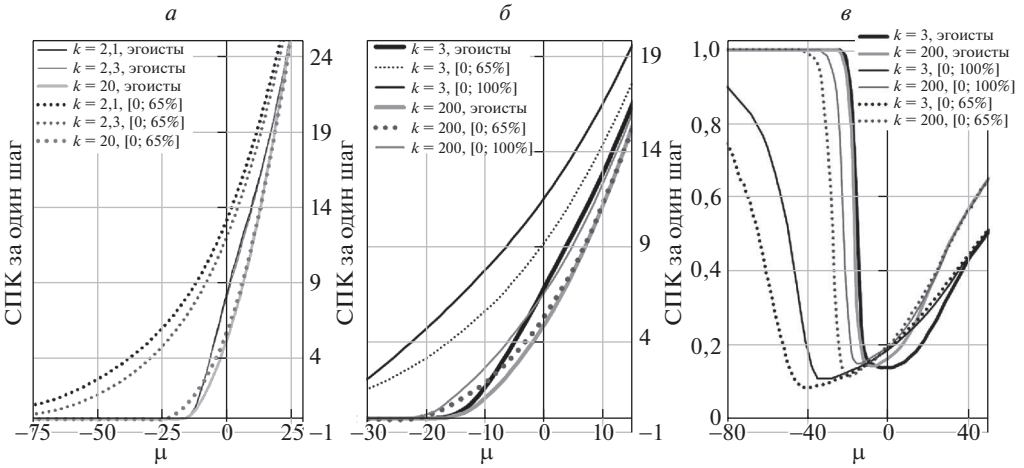


Рис. 6. Показатели социальной динамики при СП-распределениях и вымирании; $n = 201$; начальный капитал $C_0 = 40$; стандартизация по квартилям; распределения из класса, включающего распределение Гаусса с $\sigma = 80$. *а*, *б* — СПК, *в* — доля участников после 500 шагов.

рис. 5,г: при распределениях с тяжелыми хвостами общество сохраняется хуже (исключение — общество из эгоистов при $\mu < -6$), достигая при этом, однако, более высокого среднего приращения капитала участников. Отметим близость значений остаточной численности альтруистов и эгоистов в случаях слабо неблагоприятной и благоприятной ($\mu > -12$) среды при сравнительно легких ($k = 200$) хвостах распределения, генерирующего предложения.

На рис. 6,а графики обществ из эгоистов при $k = 2,1$ и $k = 2,3$ почти не отличаются. На представленном диапазоне изменения μ СПК альтруистов с окном $[0; 65\%]$ и теми же k положительно и значительно выше, чем СПК эгоистов. Последнее почти не отличается от нуля при $\mu < -15$, а при больших значениях μ положительно. В случае $k = 20$ разница между графиками СПК альтруистов с окном $[0; 65\%]$ и эгоистов гораздо меньше: первые заметно отличаются (и опережают) лишь при $-23 < \mu < 5$, а при $\mu < -23$ СПК и тех, и других близко к нулю. Альтруисты не опережают эгоистов значительно, в частности, из-за того, что при окне поддержки $[0; 65\%]$ они игнорируют приращения капитала 35% участников. Общий простой вывод: тяжелые хвосты распределения повышают СПК как эгоистов, так и альтруистов, но альтруистов заметно сильнее. Перечень основных выводов будет приведен в разделе 6.

6. Логистическое распределение и распределение Стьюдента

В предыдущем разделе 5 представлен анализ динамики капиталов при генерации предложений посредством распределения Гаусса и симметризованных распределений Парето. Эти два генератора контрастны по двум признакам: классическое колоколообразное распределение с легкими ($\sim e^{-x^2}$) хвостами и распределения с тяжелыми хвостами и острым пиком. Разумеется, класс симметричных унимодальных распределений на прямой включает

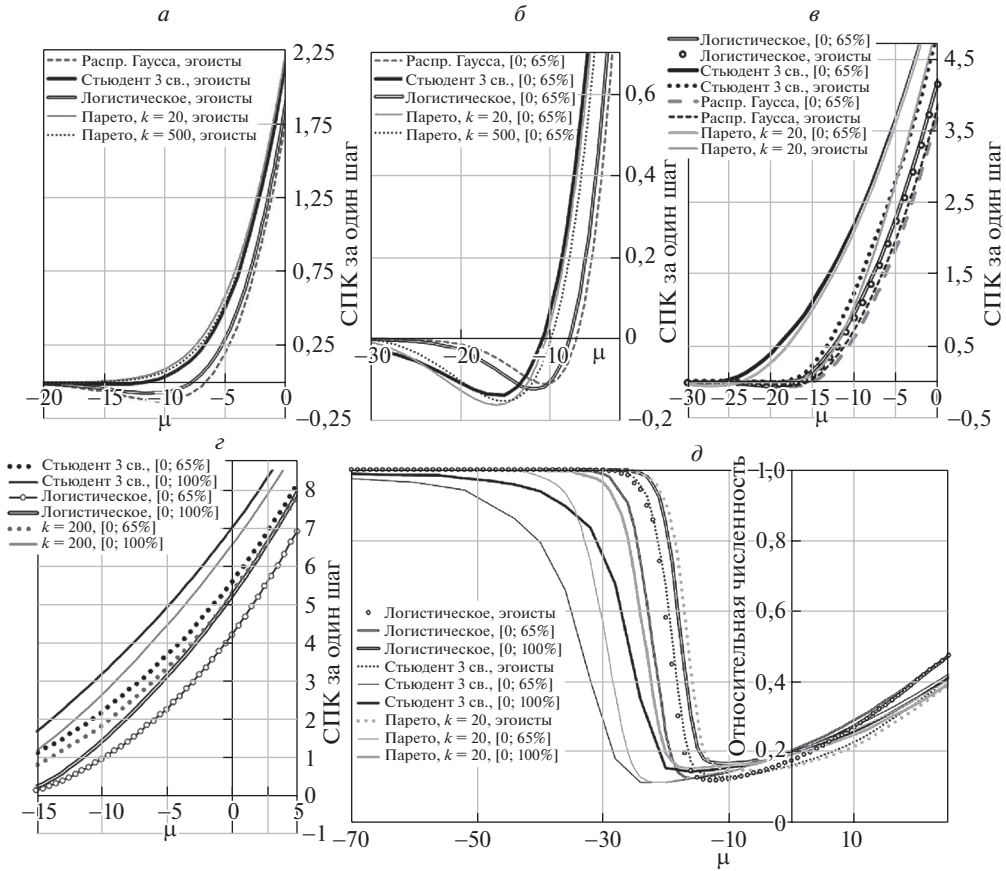


Рис. 7. Логистическое распределение и распределение Стьюдента с 3 степенью свободы в сравнении с другими. СПК за один шаг в модели без вымирания: *a* — эгоисты, *б* — альтруисты с окном [0; 65%]. Эгоисты и альтруисты в модели с вымиранием: *в*, *г* — СПК за 1 шаг, *д* — доля участников после 500 шагов при начальном капитале участника $C_0 = 40$. Начальное число участников $n = 201$; стандартизация по квартилям; для распределения Гаусса $\sigma = 80$.

большое разнообразие представителей с иными свойствами. Чтобы оценить степень влияния типа распределения на динамику капитала, рассмотрим также распределение Стьюдента с тремя степенями свободы (при двух степенях свободы распределение не имеет дисперсии) и логистическое распределение. Соответствующие показатели социальной динамики в сравнении с распределениями, рассмотренными ранее, показаны на рис. 7.

Для общества из эгоистов (рис. 7, *a*) все рассматриваемые распределения при $\mu < 0$ однозначно упорядочиваются по СПК: при распределении Гаусса СПК самое низкое, далее следует логистическое, заметно обгоняет его распределение Стьюдента и, наконец, приводящие примерно к тем же значениям СПК симметризованные распределения Парето с $k = 500$ и $k = 20$. Это упорядочение совпадает с упорядочением по тяжести хвостов. Тем самым добавленные распределения подтверждают закономерности, выявленные при анализе рис. 5, *a*.

В случае общества из альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ закономерность несколько сложнее (рис. 7,б). Линии СПК(μ) для логистического распределения и распределения Стьюдента могут быть получены из линии для распределения Гаусса последовательными сдвигами влево и немного вниз с небольшими дополнительными растяжениями. Тем самым при μ , меньших на несколько единиц, достигаются несколько меньшие, чем для распределения Гаусса, значения СПК. В результате увеличение тяжести хвостов приводит к увеличению СПК лишь при положительных и сравнительно небольших по модулю отрицательных μ , при дальнейшем же уменьшении μ выгоднее, чтобы хвосты распределения были легче. СПК для распределения Стьюдента и СП-распределений с $k = 20$ и $k = 500$, как и в обществе из эгоистов, довольно близки, но в данном случае распределение Стьюдента с 3 степенями свободы чуть больше похоже по СПК на СП-распределение с $k = 20$.

В модели с вымиранием (рис. 7,в) логистическое распределение имеет ту же особенность, что и распределение Гаусса: линии СПК эгоистов и альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ очень близки, но логистическое распределение позволяет получить несколько бóльшие значения СПК. Распределение Стьюдента для альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ дает большой выигрыш в сравнении с логистическим распределением, но для эгоистов этот выигрыш меньше. Тем самым при распределении Стьюдента участникам заметно выгоднее (в смысле СПК) быть альтруистами с окном $[0; 65\%]$, чем эгоистами, и эта специфика сближает указанное распределение с распределениями Парето. Наиболее близко оно к СП-распределению с $k = 20$: отличие их кривых приращения капитала для обоих типов обществ незначительно. В качестве тонкого эффекта можно отметить, что при заметных отрицательных значениях μ эгоисты имеют более высокое СПК, когда предложения генерируются распределением Стьюдента с 3 степенями свободы, но при $\mu > -5$ более выгодным для них оказывается уже распределение Парето с $k = 20$. Аналогично для альтруистов с окном $[0; 65\%]$ распределение Парето с $k = 20$ “догоняет” при $\mu = -1$ распределение Стьюдента по СПК.

На рис. 7,г показаны линии СПК альтруистов с окнами поддержки $[0; 65\%]$ и $[0; 100\%]$ для распределений Стьюдента, логистического и СП-распределения с $k = 200$. При каждом из них большее окно поддержки приводит к бóльшим значениям СПК, причем разрыв увеличивается с ростом μ . Иными словами, чем благоприятнее среда на рассматриваемом диапазоне μ , тем менее осмысленна (по критерию СПК) поддержка не всего общества, а лишь 65% беднейших. Если СП-распределение с $k = 20$ приводит примерно к таким же результатам, как распределение Стьюдента с тремя степенями свободы (рис. 7,в), то при СП-распределении с $k = 200$, имеющем более легкие хвосты, СПК как эгоистов, так и альтруистов ниже.

Кривые остаточной численности общества представлены на рис. 7,д. Заметим, что линии эгоистов для распределений Стьюдента и логистического при $\mu < 0$ весьма близки, а при $\mu > 0$ более высокие значения дает логистическое распределение. При этом для распределения Стьюдента при достаточно больших по модулю отрицательных μ эгоисты сохраняют численность лучше, чем альтруисты, а при логистическом распределении численность эгоистов лежит между численностями альтруистов с окнами $[0; 65\%]$ и $[0; 100\%]$. Таким об-

разом, и здесь распределение Стьюдента демонстрирует те же качественные свойства, что и распределения Парето, а логистическое распределение лишь несколько отклоняется от нормального (для которого численности эгоистов и альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ близки, см. рис. 3,а в [2]) в сторону распределений с тяжелыми хвостами.

Если по СПК в модели с вымиранием распределения Стьюдента и Парето с $k = 20$ приводят к близким результатам (рис. 7,б), то по численности в достаточно неблагоприятной среде как эгоистам, так и альтруистам заметно выгоднее распределение Парето, а в существенно благоприятной — несколько выгоднее распределение Стьюдента. В нейтральной среде (а для альтруистов — при $-4 < \mu < 10$) остаточные численности для этих двух распределений практически совпадают. При $\mu < -4$ почти одинаковую остаточную численность, как отмечалось выше, дают уже распределение Стьюдента и логистическое распределение.

Для эгоистов при $\mu < -4$ самое выгодное из сравниваемых в отношении численности — СП-распределение, а при $\mu > -4$ логистическое распределение. Для альтруистов при всех μ наиболее выгодно логистическое распределение, однако при $-10 < \mu < 5$ распределения Стьюдента и Парето обеспечивают практически такие же значения численности.

Общее лидерство по численности при $\mu < -4$ принадлежит эгоистам при распределении Парето, но для положительных значений μ они уже на последнем месте, а на первом — альтруисты с окном поддержки $[0; 65\%]$ в среде с логистическим распределением. При $\mu = 20$ их догоняют как альтруисты с окном $[0; 100\%]$, так и эгоисты — также при логистическом распределении.

7. Основные результаты

К основным (и наиболее простым) результатам исследования динамики модели ViSE, полученным в данной статье, можно отнести следующие.

1. При стандартизации по квартилям тяжесть хвостов распределения повышает СПК как эгоистов, так и альтруистов — как в случае с вымиранием, так и в модели без него. При этом СПК альтруистов повышается существенно сильнее, но с одним исключением: при заметных отрицательных μ увеличение тяжести хвостов может приводить не к увеличению СПК альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$, а к сдвигу ямы ущерба влево и даже к ее углублению.
2. В случае с вымиранием тяжесть хвостов распределения ускоряет разорение как эгоистов, так и альтруистов, но также с одним исключением: при заметных отрицательных μ разорение эгоистов при распределениях с тяжелыми хвостами, напротив, несколько замедляется. Таким образом, рост одного критерия (СПК) при вариации параметров распределения часто сопровождается уменьшением другого (численности).
3. Логистическое распределение в рамках модели ViSE дает результаты, умеренно отличающиеся от результатов распределения Гаусса в сторону распределений с более тяжелыми хвостами.

4. Распределение Стьюдента с тремя степенями свободы похоже по СПК на СП-распределение с $k = 20$, особенно — для эгоистов и альтруистов с окном поддержки $[0; 65\%]$ в модели с вымиранием. В случае без вымирания для эгоистов СПК при распределении Стьюдента примерно такое же, как для распределений с более легкими хвостами (даже ниже, чем у СП-распределения с $k = 500$), а для альтруистов с окном $[0; 65\%]$ — напротив, как у одного из СП-распределений с более тяжелыми хвостами, чем при $k = 20$. Еще ярче последняя закономерность проявляется для графиков остаточной численности. Для эгоистов кривая распределения Стьюдента лежит между кривыми логистического и СП-распределения, почти сливаясь с первой при существенных отрицательных μ и со второй при $\mu > 0$. Для альтруистов с окнами поддержки $[0; 65\%]$ и $[0; 100\%]$ распределение Стьюдента дает значения, характерные для распределений с более тяжелыми хвостами, чем СП-распределение с $k = 20$. Это отличие кривых может быть связано с различием формы: острый пик у СП-распределений и колоколообразная форма распределения Стьюдента.

Ряд других установленных закономерностей приведен в разделах 4 и 5.

8. Заключение

В статье изучена динамика однородных обществ в модели ViSE при генерации предложений посредством распределений, различающихся тяжестью хвостов: нормального, логистического, Стьюдента и симметризованных распределений Парето. В [2] было установлено, что тяжесть хвостов распределения случайных величин, генерирующих предложения, существенно влияет на динамику капиталов и эффективность стратегий участников. Количественный учет влияния данного фактора требует введения классов распределений, различающихся по нему и близких по другим существенным параметрам. В [2] такие классы строились посредством унификации математического ожидания μ и дисперсии σ^2 , что приводило к рассмотрению распределений с тяжелыми хвостами, для которых вероятность заметных (в масштабе σ) отклонений от среднего слишком низка. Это делает стандартное отклонение контринтуитивной мерой разброса в случае распределений со сверхтяжелыми хвостами и исследований рассматриваемого типа.

В данной статье разброс оценивался с помощью квартилей, результатом чего было включение в один класс распределений, плотности которых умеренно различаются на интервале, где сосредоточена большая часть вероятности. При данном подходе к унификации распределений установлено, что утяжеление хвостов распределения (означающее переток вероятности от средних выбросов к большему, а также, возможно, к наблюдениям, близким к среднему) приводит к более высоким темпам разорения, но одновременно позволяет участникам аккумулировать более высокий капитал посредством реализации коллективных решений. Исключение — общества из альтруистов в неблагоприятной среде, для которых увеличение тяжести хвостов распределения может приводить к сдвигу “ямы ущерба” влево и вниз. Установлен и ряд более тонких эффектов, характеризующих динамику капитала однородных обществ с различными социальными установками участников в разных стохастических средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чеботарев П.Ю.* Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде // *АиТ.* 2006. № 3. С. 152–165.
Chebotarev P.Yu. Analytical Expression of the Expected Values of Capital at Voting in the Stochastic Environment // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 3. P. 480–492.
2. *Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М., Афонькин В.А., Мальшиев В.А.* О сравнительной полезности альтруизма и эгоизма при голосовании в стохастической среде // *АиТ.* 2018. № 11. С. 123–149.
Chebotarev P.Yu., Tsodikova Ya.Yu., Loginov A.K., Lezina Z.M., Afonkin V.A., Malyshev V.A. Comparative Efficiency of Altruism and Egoism as Voting Strategies in Stochastic Environment // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 11. P. 2052–2072.
3. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
Mirkin B.G. Group Choice (P.C. Fishburn, ed.). N.Y.: Wiley, 1979.
4. *Plott C.R.* A Notion of Equilibrium and Its Possibility under Majority Rule // *Amer. Econ. Rev.* 1967. V. 58. No. 4. P. 787–806.
5. *McKelvey R.D.* Intransitivities in Multidimensional Voting Models and Some Implications for Agenda Control // *J. Economic Theory.* 1976. V. 12. No. 3. P. 474–482.
6. *Schofield N.* The Spatial Model of Politics. Routledge, 2007.
7. *Чеботарев П.Ю.* Некоторые свойства траекторий в динамической задаче голосования // *АиТ.* 1986. № 1. С. 133–138.
Chebotarev P.Yu. Some Properties of Paths in the Dynamic Voting Problem // *Autom. Remote Control.* 1986. V. 47. No. 1. Part 2. P. 121–126.
8. *Saari D.G.* The Generic Existence of a Core for q -rules // *Economic Theory.* 1997. V. 9. No. 2. P. 219–260.
9. *Новиков С.Г.* Об одной динамической задаче теории голосований. I // *АиТ.* 1985. № 8. С. 104–114.
Novikov S.G. One Dynamic Problem in Voting Theory. I // *Autom. Remote Control.* 1985. V. 46. No. 8. P. 1016–1026.
10. *Новиков С.Г.* Об одной динамической задаче теории голосований. II // *АиТ.* 1985. № 9. С. 118–127.
Novikov S.G. One Dynamic Problem in Voting Theory. II // *Autom. Remote Control.* 1985. V. 46. No. 9. P. 1168–1177.
11. *McKelvey R.D.* Game Theoretic Models of Voting in Multidimensional Issue Spaces // *Game Theory Appl.*, Ed. by Ichiishi T., Neyman A., Tauman Y. San Diego: Academ. Press, 1990. P. 317–335.
12. *Ordeshook P.C.* The Spatial Analysis of Elections and Committees: Four Decades of Research // *Perspectiv. Public Choice: A Handbook*, Mueller D. (Ed.). Cambridge, U.K.: Cambridge Univer. Press, 1997. P. 247–270.
13. *Lehtinen A.* The Welfare Consequences of Strategic Voting in Two Commonly Used Parliamentary Agendas // *Theor. Decis.* 2007. V. 63. No. 1. P. 1–40.
14. *Kress D., Pesch E.* Sequential Competitive Location on Networks // *Eur. J. Oper. Res. Eur.* V. 217. No. 3. P. 483–499.
15. *Чеботарев П.Ю., Мальшиев В.А., Цодикова Я.Ю. и др.* Оптимальный порог голосования как функция коэффициента вариации среды // *Управление большими системами.* 2016. Т. 62. С. 169–187.

- Chebotarev P.Y., Malyshev V.A., Tsodikova Ya.Yu., Loginov A.K., Lezina Z.M., Afonkin V.A.* The Optimal Majority Threshold as a Function of the Variation Coefficient of the Environment // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 4. P. 725–736.
16. *Чеботарев П.Ю., Логинов А.К., Цодикова Я.Ю., Лезина З.М., Борзенко В.И.* Анализ феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния // *Проблемы управления*. 2008. № 4. С. 30–37.
- Chebotarev P.Yu., Loginov A.K., Tsodikova Ya.Yu., Lezina Z.M., Borzenko V.I.* Analysis of Collectivism and Egoism Phenomena within the Context of Social Welfare // *Autom. Remote Control*. 2010. V. 71. No. 6. P. 1196–1207.
17. *Чеботарев П.Ю., Логинов А.К., Цодикова Я.Ю. и др.* “Снежный ком” кооперации и “снежный ком”-мунизм // Четвертая междунар. конф. по проблемам управления: Сб. тр. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 687–699.
18. *Malyshev V.* Optimal Majority Threshold in a Stochastic Environment // arXiv preprint math.OС/1901.09233, 2019.
19. *Tsodikova Y., Chebotarev P., Loginov A., Lezina Z.* Modeling Responsible Elite // Recent Advances of the Russian Operations Research Society, Ed. by Aleskerov F., Vasin A. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2020. P. 89–110. arXiv preprint physics.soc-ph/1906.02072, 2019.
20. *Чеботарев П.Ю., Цодикова Я.Ю., Логинов А.К., Лезина З.М.* Какой процент альтруистов нужен в обществе и на что им следует направлять свои усилия? // Второй Российский экономический конгресс, Суздаль, 18–22 февраля 2013 г., М.: НЭА, 2013. С. 1–3. <http://skachate.ru/download/filosofiya-31943/31943.doc>
21. *Wilson E.O.* On Human Nature. Cambridge, MA: Harvard Univer. Press, 1979.
22. *Чеботарев П.Ю.* Как строить гражданское общество “по науке” // Троицкий вариант — Наука. 2015. № 186. С. 1–2. <http://trv-science.ru/uploads/186N.pdf>
23. *Groeneveld R.A.* A Class of Quantile Measures for Kurtosis // *Amer. Statistician*. 1998. V. 52. No. 4. P. 325–329.
24. *Arriaza A. et al.* Shape Measures Based on the Convex Transform Order // *Metrika*. 2019. V. 82. No. 1. P. 99–124.
25. *Brys G., Hubert M., Struyf A.* Robust Measures of Tail Weight // *Comput. Stat. Data An.* 2006. V. 50. No. 3. P. 733–759.
26. *Hinkley D.V.* On Power Transformations to Symmetry // *Biometrika*. 1975. V. 62. P. 101–111.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 16.12.2019

После доработки 29.04.2020

Принята к публикации 25.05.2020