© 2020 г. **Б.М. МИЛЛЕР, д-р физ.-мат. наук (bmiller@iitp.ru)**
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва;
Казанский федеральный университет),
К.С. КОЛОСОВ (kirill.kolosov.com@mail.ru)
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

РОБАСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ И ФИЛЬТРА КАЛМАНА[1]

Предлагается новый подход для решения задачи фильтрации в линейных системах по неполным измерениям, где характеристики динамического шума точно неизвестны, а в измерениях могут присутствовать аномальные негауссовские ошибки. В основе предлагаемого алгоритма лежит идея совместного использования адаптивного фильтра Калмана и обобщенного метода наименьших модулей. На примерах численного моделирования показано, что в сравнении с классическим методом оптимальной линейной фильтрации решение обладает меньшей чувствительностью к кратковременным выбросам в измерениях и обеспечивает быструю настройку параметров динамики системы. Предлагаемый алгоритм может быть использован для решения навигационной задачи на борту летательных аппаратов или для решения задачи сопровождения цели. Для реализации метода наименьших модулей используется эффективный алгоритм L_1-оптимизации.

Ключевые слова: фильтр Калмана, метод наименьших модулей, L_1-оптимизация, адаптивная фильтрация, робастная фильтрация, навигация, отказоустойчивость, негауссовские шумы.

DOI: 10.31857/S0005231020110057

1. Введение

Методы фильтрации широко используются в задачах, где необходимо получать оценку состояния системы в реальном времени на основе выборки измерений нарастающего объема. Более точно, предположим, что на момент t_i, $i \in N$, имеется выборка наблюдений $Y_i = y(t_0), \ldots, y(t_i)$, каждое наблюдение является реализацией случайной величины с условной плотностью распределения $f(y(t_i) \mid x(t_i), Y_{i-1})$, где $x(t_i) \in \mathbf{X}$, а $\mathbf{X}$ – пространство состояний системы. Динамика системы описывается марковским процессом, в котором состояние системы $x(t_i)$ в момент времени t_i связано с состоянием системы $x(t_{i-1})$ в момент времени t_{i-1} через условную плотность распределения $\phi(x(t_i) \mid x(t_{i-1}))$. При решении задачи фильтрации основной интерес представляет апостериорная плотность распределения $p(x(t_i) \mid Y_i)$. Известно, что

[1] Работа выполнена частично за счет средств субсидии, выделенной в рамках Государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

когда наблюдения и динамика системы описываются линейными уравнениями, а f и ϕ представляют собой гауссовские распределения, искомая плотность $p(x(t_i) \mid Y_i)$ также является гауссовской и задача имеет аналитическое решение. В этом случае уравнения динамики и наблюдений имеют вид:

$$x(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)x(t_{i-1}) + n(t_{i-1}, t_i),$$
$$y(t_i) = Hx(t_i) + \xi(t_i), \tag{1}$$

где $F(t_{i-1}, t_i)$ – матрица прогноза состояния; H – постоянная матрица наблюдений; $n(t_i)$ и $\xi(t_i)$ – векторы нормально распределенных случайных величин, таких что

$$\operatorname{cov}(n(t_{i-1}, t_i), n(t_{i-1}, t_i)) = Q(t_{i-1}, t_i),$$
$$\operatorname{cov}(\xi(t_i), \xi(t_i)) = R(t_i). \tag{2}$$

Параметры апостериорной плотности распределения $p(x(t) \mid Y_t)$ – вектор математических ожиданий и ковариационная матрица – рассчитываются в соответствии с рекуррентным алгоритмом Калмана, который состоит из двух шагов:

- Прогнозирование:

$$\widetilde{x}(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)\hat{x}(t_{i-1}),$$
$$\widetilde{P}(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + Q(t_{i-1}, t_i); \tag{3}$$

- Коррекция оценки состояния по текущим измерениям:

$$K = \widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}}(H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}} + R)^{-1},$$
$$\hat{x}(t_i) = \widetilde{x}(t_i) + K(y(t_i) - H\widetilde{x}(t_i)), \tag{4}$$
$$\hat{P}(t_i) = (I - KH)\widetilde{P}(t_i).$$

Такая оценка является оптимальной по критерию минимума дисперсии ошибки оценивания [1, 2]. Фильтр Калмана нашел широчайшее применение в задачах навигации [3–5]. Но предположение о нормальности распределений не всегда является адекватным. Например, в навигационных системах ЛА для коррекции инерциальных датчиков нужно использовать радионавигационные системы, измерения которых могут быть подвержены помехам. Под воздействием помех вид распределения ошибок измерений $f(y(t) \mid x(t), Y_{t-1})$ может существенно отличаться от нормального. В таких условиях применение фильтра Калмана в оригинальном виде в системах с избыточными измерениями снижает надежность решения в целом, так как наличие аномальных ошибок хотя бы в одном измерении приводит к аномальным ошибкам в оценке всех компонент вектора состояния. Для повышения устойчивости оценки к аномальным ошибкам измерений необходимо использовать робастные методы фильтрации.

Модель динамики системы также может стать источником аномальных ошибок оценки. Такая проблема возникает, например, в задаче сопровождения маневрирующей цели, где модель динамики системы может существенно изменяться во времени. В работах [2, 6] приводится описание адаптивных алгоритмов, нацеленных на решение задачи оптимальной фильтрации в условиях неопределенности модели динамики системы и модели измерений. Фильтры Лайниотиса–Калмана хорошо решают задачу идентификации систем с гауссовскими шумами, но применение этих алгоритмов в системах, где ошибки измерений могут быть существенно негауссовскими, мало изучено. Существуют адаптивные алгоритмы, которые основаны на сопоставлении теоретических значений ковариационных матриц ошибок измерений и ошибок оценки с фактическими, рассчитанными по выборке измерений. Такие алгоритмы рассматриваются в публикациях [4, 7–9]. В [10] рассматривается алгоритм робастной фильтрации с использованием квадратичного критерия. В [11–13] предлагается робастная форма фильтра Калмана, где используется М-оценка для обнаружения и устранения аномальных измерений. Отмечается, что использование L_1-нормы ошибок в штрафной функции для М-оценки существенно повышает устойчивость решения по отношению к аномальным ошибкам негауссовского типа [14].

В [14] также отмечается, что одновременное достижение свойств робастности и адаптивности в общем случае не представляется возможным: свойство адаптивности обычно рассматривается в контексте повышения эффективности оценки при условии симметричных распределений ошибок, а свойство робастности рассматривается в контексте повышения стабильности решения в случае асимметричных распределений. При этом рассматривать адаптивность в контексте асимметричных распределений не имеет смысла. Цель данной статьи – разработка такого метода фильтрации, который в один момент времени будет обладать либо свойством адаптивности, либо свойством робастности, но выполняться это переключение должно автоматически.

Предлагается новый подход, в котором для обнаружения и устранения аномальных измерений на каждой итерации используется метод наименьших модулей. Одновременно с этим используется метод сопоставления ковариационных матриц для настройки параметров динамики системы и метод фильтрации Калмана для получения оценки текущего состояния. На численных примерах будет показано, что предлагаемый алгоритм повышает устойчивость решения к асимметричным помехам в измерениях и повышает эффективность решения в некоторых случаях симметричных негауссовских помех.

Используемый в алгоритме метод наименьших модулей минимизирует L_1-норму ошибок в избыточной системе линейных уравнений. Эта процедура требует применения специальных методов оптимизации, так как рекурсивный метод наименьших квадратов, применяемый в [11–13], не дает точного решения и обладает численной нестабильностью, которая приводит к проблеме выбора критерия сходимости [15]. Поэтому в статье уделяется внимание численным методам, которые могут быть использованы для эффективной реализации алгоритма на ЭВМ (см. подраздел 3.1).

В разделе 2 рассматриваются основные соотношения адаптивных алгоритмов, основанных на принципе сопоставления ковариационных матриц. В разделе 3 дается описание предлагаемого алгоритма, который основан на методе наименьших модулей. В разделе 4 представлены результаты моделирования и сравнение характеристик предлагаемого алгоритма с методом оптимальной фильтрации Калмана.

2. Адаптивный фильтр Калмана, основанный на сопоставлении ковариационных матриц

Адаптивные алгоритмы разделяются на две категории. К первой относятся алгоритмы, в которых оцениваются элементы матриц F и H в уравнениях (1). Эти алгоритмы разрабатываются в контексте задач идентификации системы. Ко второй категории относятся алгоритмы, где оцениваемыми параметрами являются элементы матриц Q и R, т.е. предполагается, что характеристики динамического шума и шума измерений точно неизвестны. Будем рассматривать алгоритмы, относящиеся ко второй категории.

Предположим, что в модели (1)–(2) в матрицах Q и R содержится p неизвестных элементов a_i, $i = 1, \ldots, p$. Расположим их в векторе $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_p]^{\mathrm{T}}$ размерности p. С учетом (3)–(4) и в соответствии с [16] оценка вектора $\mathbf{a}$ по критерию максимума правдоподобия может быть получена на основе уравнения:

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}\left\{P(t_i)^{-1}\frac{\partial P(t_i)}{\partial a_k}\right\} - 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \widetilde{x}(t_i)^{\mathrm{T}}}{\partial a_k}H^{\mathrm{T}}P_r(t_i)^{-1}r(t_i) + \\ + \sum_{i=1}^{N}\operatorname{tr}\left\{\left[P_r(t_i)^{-1} - P_r(t_i)^{-1}r(t_i)r(t_i)^{\mathrm{T}}P_r(t_i)^{-1}\right]\frac{\partial P_r(t_i)}{\partial a_k}\right\}\Bigg|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^*(t_i)} = 0\end{gathered} \tag{5}$$

для $k = 1, 2, \ldots, p$, где

$$\begin{gathered}r(t_i) = y(t_i) - H\widetilde{x}(t_i), \\ P_r(t_i) = H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}} + R.\end{gathered} \tag{6}$$

Но решения уравнения (5) в замкнутой форме не существует. В [16] приводится упрощенное уравнение для субоптимальной оценки матриц Q и R с осреднением на скользящем окне фиксированной ширины N:

$$\begin{aligned}\hat{R}\,(t_i) &= \frac{1}{N}\sum_{j=i-N+1}^{i}\left[r\,(t_j)\,r\,(t_j)^{\mathrm{T}} - H\widetilde{P}\,(t_j)\,H^{\mathrm{T}}\right] \cong \\ &\cong \frac{1}{N}\sum_{j=i-N+1}^{i} r(t_j)r(t_j)^{\mathrm{T}} - H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q}\,(t_i) = \frac{1}{N}\sum_{j=i-N+1}^{i}\Big[&K\,(t_j)\,r\,(t_j)\,r\,(t_j)^{\mathrm{T}}\,K\,(t_j)^{\mathrm{T}} + \\ &+ P\,(t_j) - F\,(t_{j-1},t_j)\,P\,(t_{j-1})\,F\,(t_{j-1},t_j)^{\mathrm{T}}\Big].\end{aligned} \tag{8}$$

В уравнении (7) предполагается, что матрица Q известна. В уравнении (8), наоборот, полагается, что матрица R известна. Осреднение (7) и (8) справедливо для установившегося режима, ширина окна N в этом случае выбирается такой, что дальнейшее увеличение ширины не приводит к существенному увеличению эффективности оценки. Чтобы использовать адаптивный фильтр в нестационарной задаче, ширина окна должна подбираться эмпирически – большие значения N будут приводить к инерционности оценки, а маленькие значения увеличат шум оценки. В нестационарной задаче осреднение на скользящем окне можно заменить простым α-фильтром:

$$\hat{R}(t_i) = (1-\alpha)\hat{R}(t_{i-1}) + \alpha\left(r(t_j)r(t_j)^{\mathrm{T}} - H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}}\right), \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\hat{Q}(t_i) = (1-\alpha)\hat{Q}(t_{i-1}) + \\ + \alpha\Big(K(t_i)r(t_i)r(t_i)^{\mathrm{T}}K(t_i)^{\mathrm{T}} + P(t_i) - F(t_{i-1},t_i)P(t_{i-1})F(t_{i-1},t_i)^{\mathrm{T}}\Big),\end{gathered} \tag{10}$$

где $0 < \alpha < 1$ – настраиваемый коэффициент. Так как на момент t_i для расчета $\hat{Q}(t_i)$ необходимо знать $P(t_i)$, оценка находится в две итерации: сначала осуществляется оценка в соответствии с (3)–(4), где матрица Q задана в соответствии с априорной моделью (2), затем рассчитывается оценка $\hat{Q}(t_i)$, после чего вновь применяется алгоритм (3)–(4), где матрица Q уже заменена на $\hat{Q}(t_i)$.

Алгоритмы, основанные на оценке (7) и (8) в различных вариациях используются в публикациях [7–9]. Необходимо иметь в виду, что при попытке одновременной оценки R и Q могут возникнуть проблемы, так как в этом случае ошибки в $\hat{R}$ будут неотличимы от ошибок в $\hat{Q}$ и оценка может быть смещенной.

3. Робастный фильтр Калмана с идентификацией отказов на основе метода наименьших модулей

Предлагаемый в настоящей статье метод отличается от адаптивного алгоритма (6)–(10) публикации [16] тем, что для оценки дисперсии измерений вместо (9) используется апостериорная невязка измерений, полученная после применения метода наименьших модулей (МНМ).

Рассмотрим линейную систему (1). На каждом шаге фильтрации известен вектор измерений $y(t_i)$, прогнозное значение вектора состояния $\widetilde{x}(t_i)$, ковариационные матрицы $R(t_i)$ и $\widetilde{P}(t_i)$. Робастный алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Прогноз состояния в соответствии с (1)–(2);

2. Используя измерения на текущем шаге $y(t_i)$ и прогноз состояния $\widetilde{x}(t_i)$, находим оценку вектора состояния $\hat{x}_{L1}(t_i)$ по методу наименьших модулей;

3. Обнаружение и идентификация отказов. Для обнаружения отказа используем критерий Неймана–Пирсона и в случае обнаружения вычисляем оценку ковариационной матрицы измерений $\hat{R}(t_i)$ в зависимости от величины невязок $y(t_i) - H\hat{x}_{L1}(t_i)$;

4. Используя оценку ковариационной матрицы измерений $\hat{R}(t_i)$, находим значение ковариационной матрицы динамического шума $\hat{Q}(t_i)$ в соответствии с (10);

5. Вычисляем оценку текущего состояния системы в соответствии с (3)–(4), заменив $Q(t_{i-1}, t_i)$ и R на их оценки $\hat{Q}$ и $\hat{R}$ соответственно.

Пункт 1 эквивалентен оптимальному алгоритму фильтрации Калмана. Далее рассмотрим пп. 2–5 более подробно. Точное описание шагов представлено в алгоритме 1.

3.1. Оценка состояния по методу наименьших модулей

Целью метода наименьших модулей является минимизация L_1-нормы вектора ошибок. L_1-норма вектора рассчитывается как сумма модулей его элементов, и для одномерного случая решением задачи минимизации будет медианное значение

$$\hat{\theta}_{L_1} = Median(z) = \arg\min_{\theta} \left[L_1(z-\theta)\right], \tag{11}$$

где z – вектор, θ – скаляр и $L_1(z-\theta) = \sum_{i=1}^{N} |z_{(i)} - \theta|$.

Если элементы вектора z – независимые случайные величины, распределенные по закону Лапласа с одинаковыми параметрами

$$z_{(i)} \sim Laplace(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|y-\mu|\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

то медиана (11) является оценкой максимума правдоподобия центрального параметра распределения. В [14, 17] отмечается свойство робастности статистик, основанных на L_1-метрике, которые оказываются более устойчивыми к выбросам в больших выборках. Несмотря на то, что для случая нормального распределения вектора z оценка (11) является менее эффективной по сравнению со средним арифметическим, именно свойство робастности делает (11) предпочтительной в задачах, где в выборке могут присутствовать аномальные ошибки.

Рассмотрим применение L_1-метрики на примере системы линейных уравнений

$$z = Hx + \epsilon, \tag{12}$$

где H – матрица наблюдений, x – вектор оцениваемых параметров, ϵ – ошибки измерений, z – вектор измерений (размерность $z \geqslant$ размерности x). Оценкой $\hat{x}_{L1}$ вектора x по методу наименьших модулей будем называть оценку

$$\hat{x}_{L1} = \arg\min_{x} \left[L_1(z - Hx)\right] \tag{13}$$

при условии, что ошибки измерений независимые и с единичной дисперсией

$$C = E\left[\epsilon\epsilon^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{I}.$$

В общем случае, когда ковариационная матрица ошибок измерений $C \neq \mathbf{I}$, задача может быть сведена к (12)–(13) через процедуру декорреляции измерений. Так как ковариационная матрица положительно определенная и симметричная, она допускает разложение

$$LDL^{\mathrm{T}} = C, \tag{14}$$

где D – диагональная матрица со строго положительными диагональными элементами. Это означает, что матрицу D можно представить в виде произведения $D = D^{1/2}D^{1/2}$. Тогда справедливо:

$$\begin{aligned} \epsilon_d &= D^{-1/2}L^{-1}\epsilon, \\ E\left[\epsilon_d\epsilon_d^{\mathrm{T}}\right] &= D^{-1/2}L^{-1}C\left(L^{-1}\right)^{\mathrm{T}} D^{-1/2} = \\ &= \left(D^{-1/2}L^{-1}LD^{1/2}\right)\left(D^{1/2}L^{\mathrm{T}}\left(L^{\mathrm{T}}\right)^{-1} D^{-1/2}\right) = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольной ковариационной матрицы C можно свести задачу к (12)–(13), заменив z, H, ϵ на z_d, H_d, ϵ_d соответственно:

$$\begin{aligned} z_d &= D^{-1/2}L^{-1}z, \\ H_d &= D^{-1/2}L^{-1}H. \end{aligned}$$

Разложение (14) может быть получено также через разложение Холецкого

$$L = \mathrm{chol}(C), \quad LL^{\mathrm{T}} = C,$$

где матрица L – нижняя треугольная со строго положительными элементами на диагонали. Самым простым подходом к решению задачи минимизации является итерационный метод наименьших квадратов, который предлагалось использовать в [11–13] для получения М-оценки. Но при решении задачи L_1-оптимизации итерационный метод наименьших квадратов обладает численной нестабильностью, которая приводит к проблеме выбора критерия сходимости [15]. В [18, 19] показано, что задача (12)–(13) сводится к задаче линейного программирования, решение которой может быть получено более эффективными алгоритмами, чем итерационный метод наименьших квадратов. Минимизируемая функция представляется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\epsilon_{d(i)}\right| = \left(\sum_{i=1}^{n}\epsilon_{1(i)} + \sum_{i=1}^{n}\epsilon_{2(i)}\right) \to \min \tag{15}$$

с ограничениями

$$\begin{gathered} \left[H_d, \mathbf{I}_{(n\times n)}, -\mathbf{I}_{(n\times n)}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} = z_d, \\ \epsilon_{1(i)} \geqslant 0, \quad \epsilon_{2(i)} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{16}$$

Для повышения эффективности алгоритма в [20] осуществляется переход к двойственной форме задачи (15)–(16)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_{d(i)}\left(b_i - 1\right)\right) \to \max \tag{17}$$

для системы

$$H_d^{\mathrm{T}} b = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} H_{d(i,1)} \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} H_{d(i,m)} \end{bmatrix}, \tag{18}$$
$$0 \leqslant b_{(i)} \leqslant 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее, для решения задачи (17)–(18) можно применить симплекс-метод. Чтобы повысить скорость сходимости в [20] предложена специальная модификация симплекс-метода. Подробное описание алгоритма L_1-оптимизации можно найти в [20].

Теперь рассмотрим применение метода наименьших модулей в задаче фильтрации. На каждом шаге имеется вектор измерений $y(t_i)$ и прогноз вектора состояния $\widetilde{x}(t_i)$, а также их ковариационные матрицы $R(t_i)$ и $\widetilde{P}(t_i)$ соответственно. Составим из этих векторов один и назовем его расширенным вектором измерений:

$$z_e(t_i) = \left[y(t_i)^{\mathrm{T}}, \widetilde{x}(t_i)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$C_e(t_i) = \begin{bmatrix} R(t_i) & \mathbf{0}_{(m\times n)} \\ \mathbf{0}_{(n\times m)} & \widetilde{P}(t_i) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где C_e – ковариационная матрица расширенного вектора измерений z_e. С учетом (1)

$$z_e(t_i) = H_e x(t_i) + \epsilon(t_i),$$
$$H_e(t_i) = \left[H(t_i)^{\mathrm{T}}, \mathbf{I}_{(n\times n)}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

где $\epsilon(t_i)$ – вектор случайных величин с ковариационной матрицей $\mathrm{cov}(\epsilon(t_i), \epsilon(t_i)) = C_e(t_i)$.

Используя разложение Холецкого $LL^{\mathrm{T}} = \mathrm{chol}(C_e(t_i))$ для ковариационной матрицы расширенного вектора измерений, осуществим декоррелирующее преобразование:

$$z_d\left(t_i\right) = H_d\left(t_i\right) x\left(t_i\right) + \epsilon_d\left(t_i\right) = L^{-1} z_e\left(t_i\right),$$
$$H_d\left(t_i\right) = L^{-1} H_e\left(t_i\right),$$
$$\epsilon_d\left(t_i\right) = L^{-1}\epsilon\left(t_i\right),$$

причем

$$\mathrm{cov}\left(\epsilon_d\left(t_i\right), \epsilon_d\left(t_i\right)^{\mathrm{T}}\right) = L^{-1}\,\mathrm{cov}\left(\epsilon\left(t_i\right), \epsilon\left(t_i\right)^{\mathrm{T}}\right) L^{-\mathrm{T}} =$$
$$= L^{-1} C_e L^{-\mathrm{T}} = L^{-1} L L^{\mathrm{T}} L^{-\mathrm{T}} = \mathbf{I}. \tag{21}$$

Таким образом, задача сведена к задаче (15)–(16), и теперь, применив метод L_1-оптимизации, можно получить оценку вектора состояния $x(t_i)$ по методу наименьших модулей

$$\hat{x}_{L1}(t_i) = \arg\min_x \left(L_1(z_d(t_i) - H_d(t_i)x)\right). \tag{22}$$

Для реализации разложения Холецкого на ЭВМ рекомендуется использовать алгоритм, приведенный в [21].

3.2. Обнаружение отказов и расчет ковариационной матрицы измерений

При нормальном функционировании системы распределение ошибок измерений и ошибок прогноза состояния предполагается гауссовским с нулевым математическим ожиданием. В случае отклонений от модели будем полагать, что ошибка соответствующего измерения имеет ненулевое математическое ожидание. Рассмотрим две конкурирующие гипотезы

$$\begin{aligned} H_0 &: E\left[z_d(t_i)\right] = H_d x(t_i), \\ H_1 &: E\left[z_d(t_i)\right] = H_d x(t_i) + A\Delta, \end{aligned}$$

где A – матрица коэффициентов (модель отклонений), Δ – параметры модели отклонений. Учитывая, что $\mathrm{cov}(\epsilon_d(t_i), \epsilon_d(t_i)^{\mathrm{T}}) = \mathbf{I}$, подходящая для проверки гипотез статистика может быть получена в виде [22]

$$T = z_d^{\mathrm{T}} B_k (B_k^{\mathrm{T}} B_k)^{-1} B_k^{\mathrm{T}} z_d, \tag{23}$$

где $\mathrm{rank}(B_k) = (m+n) - n = m$, m – размерность вектора измерений, n – размерность вектора состояния, $(m+n)$ – размерность расширенного вектора измерений и $B_k^{\mathrm{T}} H_d = 0$. Матрица B_k может быть получена через QR-разложение матрицы H_d:

$$[Q_k, B_k] \begin{bmatrix} R_k \\ \mathbf{0}_{(m-n\times n)} \end{bmatrix} = qr(H_d).$$

Для реализации QR-разложения рекомендуется использовать алгоритм, приведенный в [21]. В зависимости от принятой гипотезы статистика (23) будет иметь нецентральное распределение хи-квадрат с m степенями свободы и различным значением параметра нецентральности [22, 23]:

$$\begin{aligned} H_0 &: T \sim \chi^2(m, 0); \\ H_1 &: T \sim \chi^2(m, \lambda). \end{aligned}$$

Здесь λ – параметр нецентральности, рассчитываемый в зависимости от принятой модели отказа. В соответствии с леммой Неймана–Пирсона наиболее мощным критерием выбора гипотез является критерий вида

$$\begin{aligned} H_0 &: T \leqslant c(m); \\ H_1 &: T > c(m); \end{aligned} \tag{24}$$

где пороговое значение $c(m)$ рассчитывается как значение аргумента функции распределения $\chi^2(m,0)$, при котором эта функция равна заданному значению вероятности ошибок первого рода η:

$$c(m) = F_{\chi^2}^{-1}(m,\eta,0). \tag{25}$$

Вероятность ошибок второго рода рассчитывается как

$$\beta = F_{\chi^2}(c(m),m,\lambda),$$

где $F_{\chi^2}(c(m),m,\lambda)$ – значение функции вероятности нецентрального χ^2-распределения с m степенями свободы и параметром нецентральности λ в точке $c(m)$. Значение параметра нецентральности с учетом (21) рассчитывается в соответствии [22]:

$$\lambda = z_d^{\mathrm{T}} B_k^{\mathrm{T}} A \left(A^{\mathrm{T}} B_k B_k^{\mathrm{T}} A\right)^{-1} A^{\mathrm{T}} B_k z_d.$$

Для обнаружения отказа используется единичная матрица $A = \mathbf{I}$. Тогда применение критерия (24) решает задачу обнаружения отказа с минимальным значением вероятности ошибок второго рода при $\lambda = c(m)$:

$$\beta_{\min} = F_{\chi^2}(c(m),m,c(m)).$$

На практике эта вероятность ограничивается сверху значением β_{TH} в соответствии с требованиями, предъявляемыми к системе. Случай когда $\beta_{\min} > \beta_{TH}$, означает, что конфигурация системы в принципе не может обеспечить достаточно низкий уровень ошибок второго рода.

В зависимости от того, обнаружен ли отказ (принята гипотеза H_1) или не обнаружен (принята гипотеза H_0), вычисляется оценка ковариационной матрицы измерений

$$\hat{R}(t_i) = (LDL^{\mathrm{T}})_{(1:m,1:m)}, \tag{26}$$

где $LL^{\mathrm{T}} = \mathrm{chol}(C_e(t_i))$ (см. (19)), D – диагональная матрица, элементы которой рассчитываются по невязкам измерений по методу наименьших модулей:

$$D_{(j,j)} = \begin{cases} \rho(\Delta_{(j)}), & \text{если } H_1, \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

для $j = 1,\dots,m$ и $\Delta = z_d - H_d\hat{x}_{L1}(t_i)$. Вид функции ρ нужно подобрать так, чтобы условие $\rho(x) > 1$ выполнялось только с вероятностью ложной тревоги α при условии выбора H_0. Аналитическое решение такой задачи выходит за рамки данного исследования, поэтому использовалась эмпирическая кусочно гладкая функция:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 5, \\ (1 + (|x| - 5)), & \text{если } 10 > |x| \geqslant 5, \\ (1 + (|x| - 5)) \cdot (1 + 4\sqrt{|x| - 10}), & \text{если } |x| \geqslant 10. \end{cases} \tag{27}$$

3.3. Оценка ковариационной матрицы динамического шума и оценка текущего состояния

Для получения оценки $\hat{Q}$ сначала нужно рассчитать коэффициент усиления калмановского фильтра K и апостериорную ковариационную матрицу P. Для их вычисления используется априорно заданная ковариационная матрица динамического шума Q и рассчитанная с использованием (26)–(27) ковариационная матрица измерений R:

$$\widetilde{P} = F\left(t_{i-1}, t_i\right) \hat{P}\left(t_{i-1}\right) F^{\mathrm{T}}\left(t_{i-1}, t_i\right) + Q\left(t_{i-1}, t_i\right),$$
$$\widetilde{K} = \widetilde{P} H^{\mathrm{T}} \left(H \widetilde{P} H^{\mathrm{T}} + \hat{R}\left(t_i\right)\right)^{-1},$$
$$P\left(t_i\right) = \left(I - \widetilde{K} H\right) \widetilde{P}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} dx = \widetilde{K} r(t_i), \\ Q_{dx} = dx \cdot dx^{\mathrm{T}}, \\ Q_p = P(t_i) - F(t_{i-1}, t_i) P(t_{i-1}) F(t_{i-1}, t_i)^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{28}$$

где $r(t_i)$ – априорная невязка измерений, вычисляемая в соответствии с (6). Тогда соотношение (10) можно записать в виде

$$\hat{Q}(t_i) = (1 - \alpha) \hat{Q}(t_{i-1}) + \alpha \left(Q_{dx} + Q_p\right). \tag{29}$$

Вычисление оценки $\hat{Q}(t_i)$ через соотношение (29) может привести к программным ошибкам, так как оно не гарантирует положительной определенности результирующей матрицы. Чтобы избежать этих проблем, будем искать оценку в следующей форме:

$$\hat{Q}(t_i) = V Q(t_{i-1}, t_i) V^{\mathrm{T}},$$
$$V_{(l,l)} > 0,$$
$$V_{(l,j)} = 0 \text{ при } l \neq j,$$

где $l = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, V – диагональная матрица со строго положительными элементами на диагонали. Обозначим через γ_j отношение j-го диагонального элемента матрицы в правой части (29) к j-му диагональному элементу номинальной матрицы динамического шума:

$$\gamma_j = \frac{(1 - \alpha) \hat{Q}(t_{i-1})_{(j,j)} + \alpha \left(Q_{dx,(j,j)} + Q_{p,(j,j)}\right)}{Q(t_{i-1}, t_i)_{(j,j)}}.$$

Если значения элементов матрицы V рассчитывать по правилу

$$V_{(j,j)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma_j < 1, \\ \sqrt{\gamma_j} & \text{иначе,} \end{cases} \tag{30}$$

то, в случае когда $\gamma_j > 1$ для всех $j = 1, \ldots, n$, выполняется условие

$$\operatorname{trace}\Big\{VQ(t_{i-1}, t_i)V^{\mathrm{T}}\Big\} = \operatorname{trace}\Big\{(1-\alpha)\hat{Q}(t_{i-1}) + \alpha\left(Q_{dx} + Q_p\right)\Big\}. \tag{31}$$

В остальных случаях диагональные элементы матрицы $\hat{Q}$ ограничиваются снизу соответствующими значениями диагональных элементов матрицы Q.

В соответствии с (31) необходимо вычислять приближенное значение дисперсий элементов вектора dx. Чтобы сделать оценку более робастной, воспользуемся известным фактом, что для нормального распределения отношение среднеквадратического отклонения (RMS) к среднему абсолютному отклонению (MAD) является постоянной величиной RMS/MAD $= \sqrt{(\pi/2)}$. Это нетрудно доказать:

$$\mathbf{E}[|x-\mu|] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |a-\mu| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) da =$$

$$= 2\int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{a-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) da = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \int\limits_{0}^{\infty} b\exp(-b^2)db = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

В то же время MAD является более робастной статистикой, когда в выборке присутствуют выбросы. Для применения робастной статистики при вычислении $\hat{Q}$ перепишем (29) в виде:

$$\begin{gathered}
G\left(t_i\right)_{(j,j)} = (1-\alpha)\, G\left(t_{i-1}\right)_{(j,j)} + \alpha \cdot \left|dx_{(j)}\right|, \quad j = 1, \ldots, n, \\
\hat{Q}_p\left(t_i\right) = (1-\alpha)\, \hat{Q}_p\left(t_{i-1}\right) + \alpha Q_p, \\
\gamma_j = \frac{\frac{\pi}{2}\left(G\left(t_i\right)_{(j,j)}\right)^2 + \hat{Q}_p\left(t_i\right)_{(j,j)}}{Q\left(t_{i-1}, t_i\right)_{(j,j)}}.
\end{gathered} \tag{32}$$

Далее выполняем основной шаг фильтрации:

$$\begin{gathered}
\hat{Q}(t_i) = VQ(t_{i-1}, t_i)V^{\mathrm{T}}; \\
P_a = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + \hat{Q}(t_i); \\
K = P_a H^{\mathrm{T}}(HP_aH^{\mathrm{T}} + \hat{R}(t_i))^{-1}; \\
\hat{x}(t_i) = \widetilde{x}(t_i) + Kr(t_i); \\
\hat{P}(t_i) = (I - KH)P_a.
\end{gathered} \tag{33}$$

Здесь V вычисляется в соответствии с (30) и (32), а $\hat{R}$ вычисляется в соответствии с (26). На основе приведенных выше соотношений строится алгоритм 1, который обеспечивает рекуррентную оценку состояния системы, идентификацию отказов в измерениях и адаптивную настройку коэффициента обратной связи.

А л г о р и т м 1 (одна итерация робастного фильтра).
Входные данные:

текущее время t_i;

оценка состояния с предыдущего шага $\hat{x}(t_{i-1}), \hat{P}(t_{i-1})$;

оценка составляющих ковариационной матрицы прогноза с предыдущего шага $\hat{Q}_p(t_{i-1})$, $G(t_{i-1})$;

матрица наблюдений H и матрица прогноза $F(t_{i-1}, t_i)$;

номинальная ковариационная матрица динамического шума $Q(t_{i-1}, t_i)$;

вектор измерений $y(t_i)$ и его номинальная ковариационная матрица $R(t_i)$.

Выходные данные:

оценка состояния $\hat{x}(t_i), \hat{P}(t_i)$;

оценка составляющих ковариационной матрицы прогноза $\hat{Q}_p(t_i), G(t_i)$.

1. Прогноз состояния на текущий момент.

$\widetilde{x} = F(t_{i-1}, t_i)\hat{x}(t_{i-1})$;

$\widetilde{P} = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + Q(t_{i-1}, t_i)$.

2. Составить расширенный вектор измерений $z_e(t_i)$ и его ковариационную матрицу $C_e(t_i)$ в соответствии с (19).

3. Составить матрицу наблюдений H_e для расширенного вектора измерений в соответствии с (20).

4. Осуществить разложение Холецкого матрицы C_e:

$C_e = \mathrm{chol}(C_e) = LL^{\mathrm{T}}$.

5. Осуществить декорреляцию вектора псевдоизмерений:

$z_d = L^{-1}z_e$; $H_d = L^{-1}H_e$.

6. С использованием симплекс-метода L_1-оптимизации (см. [20]) решить задачу:

$\hat{x}_{L1}(t_i) = \arg\min\limits_x \left(L_1(z_d(t_i) - H_d(t_i)x)\right)$.

7. Осуществить QR разложение матрицы H_d:

$H_d = qr(H_d) = [Q_k, B_k]\begin{bmatrix} R_k \\ \mathbf{0}_{(m-n\times n)} \end{bmatrix}$.

8. Рассчитать тестовую статистику:

$T = z_d^{\mathrm{T}}B_k(B_k^{\mathrm{T}}B_k)^{-1}B_k^{\mathrm{T}}z_d$.

9. Рассчитать пороговое значение $c(r)$ для заданного значения вероятности ложной тревоги α в соответствии с (25) (в данном случае число степеней свободы равно числу измерений, т.е. размерности вектора y).

10. Если $(T \geqslant c(r))$, то принимается гипотеза H_1, ковариационная матрица измерений $\hat{R}(t_i)$ рассчитывается в соответствии с (26) для $\Delta = z_d - H_d\hat{x}_{L1}(t_i)$.

11. Иначе принимается гипотеза H_0, ковариационная матрица измерений остается номинальной: $\hat{R}(t_i) = R(t_i)$;

12. Осуществить шаг фильтрации с использованием номинального значения ковариационной матрицы динамического шума:

$\widetilde{P} = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + Q(t_{i-1}, t_i)$;

$\widetilde{K} = \widetilde{P}H^{\mathrm{T}}(H\widetilde{P}H^{\mathrm{T}} + \hat{R}(t_i))^{-1}$;

$P(t_i) = (I - \widetilde{K}H)\widetilde{P}$.

13. Рассчитать адаптивные параметры:
$dx = \widetilde{K}(y(t_i) - H\widetilde{x})$;
$Q_p = P(t_i) - F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i)$.
14. Рассчитать $G(t_i)$, $\hat{Q}_p(t_i)$ и γ в соответствии с (32).
15. Рассчитать V в соответствии с (30).
16. Рассчитать оценку ковариационной матрицы динамического шума:
$\hat{Q}(t_i) = VQ(t_{i-1}, t_i)V^{\mathrm{T}}$.
17. Рассчитать оценку текущего состояния и его ковариационной матрицы (33):
$P_a = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + \hat{Q}(t_i)$; $K = P_a H^{\mathrm{T}}(HP_aH^{\mathrm{T}} + \hat{R}(t_i))^{-1}$;
$\hat{x}(t_i) = \widetilde{x} + K(y(t_i) - H\widetilde{x})$; $\hat{P}(t_i) = (I - KH)P_a$.
18. Конец.

4. Результаты тестирования

Для проверки рабочих характеристик алгоритма моделировалось движение цели в одномерном пространстве. Задача состояла в оценке текущей координаты цели, а также ее скорости и ускорения по зашумленным измерениям координаты, т.е. решалась задача фильтрации по неполным измерениям. Использовалась следующая модель динамики системы в непрерывном времени:

$$dx(t) = \begin{bmatrix} dh(t) \\ dv(t) \\ da(t) \end{bmatrix} = Ax(t)dt + Bdw(t);$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{s} \end{bmatrix}.$$

Здесь $h(t)$ – координата цели, $v(t)$ – скорость цели, $a(t)$ – ускорение цели, $w(t)$ – винеровский случайный процесс, $s > 0$ – интенсивность динамического шума. В дискретном времени модель динамики принимает вид:

$$x(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)x(t_{i-1}) + n_i;$$

$$F(0, \Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$Q(0, \Delta t) = \operatorname{cov}(n_i, n_i) = \int\limits_0^{\Delta t} F(0, t)BB^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(0, t)dt =$$

$$= s \cdot \begin{bmatrix} (\Delta t^5)/20 & (\Delta t^4)/8 & (\Delta t^3)/6 \\ (\Delta t^4)/8 & (\Delta t^3)/3 & (\Delta t^2)/2 \\ (\Delta t^3)/6 & (\Delta t^2)/2 & \Delta t \end{bmatrix}.$$

Для проверки отказоустойчивости алгоритма использовалась модель системы с двукратным резервированием (два датчика с одинаковыми номинальными характеристиками синхронно измеряют координату цели):

$$y(t_i) = Hx(t_i) + \xi_i;$$
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$R = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Использовались следующие значения параметров: вероятность ложной тревоги $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$, параметр сглаживания $\alpha = 0{,}01$ (см. (32)), параметр динамики системы $s = 0{,}1$. Частота измерений 10 Гц ($t_i - t_{i-1} = 0{,}1$). В ходе тестирования истинная траектория и фактические наблюдения формировались в соответствии с соотношениями:

$$dx_{\text{true}}(t) = Ax_{\text{true}}(t)dt + Bdw(t) + u(t),$$
$$y(t_i) = Hx(t_i) + \xi_i + \delta_i.$$

Здесь $u(t)$ и δ_i имитировали неучтенные ошибки.

Для демонстрации адаптивных и робастных свойств фильтра были разработаны различные сценарии моделирования:

Сценарий 1. Маневр цели в виде полета по кругу с постоянным центростремительным ускорением $a_{\max} = 20$ ед/с^2 и угловой скоростью $\omega = 2\pi/10$ рад/с. В этом случае проекция траектории на одну из осей декартовой системы координат представляет собой гармонические колебания во времени ($u(t) = a_{\max} \cdot \sin(\omega t)$).

Сценарий 2. В одном из измерений присутствует аддитивный гауссовский шум $\delta_{i,(1)} \sim \mathcal{N}(0, 100)$ (первый параметр – математическое ожидание, второй – среднеквадратическое отклонение (СКО)), $\delta_{i,(2)} = 0$.

Сценарий 3. Оба измерения содержат аддитивный некоррелированный гауссовский шум: $\delta_{i,(1)} \sim \mathcal{N}(0, 100)$, $\delta_{i,(2)} \sim \mathcal{N}(0, 100)$.

Сценарий 4. Ошибки измерений δ_i представляют собой независимые случайные величины (с.в.), распределенные по закону Коши. Для такого распределения дисперсия и математическое ожидание не определены, но определена медиана.

Сценарий 5. Для одного из измерений добавочная ошибка представляет собой кусочно линейную функцию $\delta_{i,(1)} = 0$ для $t_i < t_s$ и $\delta_{i,(1)} = k(t_i - t_s)$ для $t_i \geqslant t_s$, $t_s = 50$, $k = 0{,}4$.

Сценарий 6. В измерениях с заданной вероятностью присутствует смещенная гауссовская ошибка: $\delta_i = \Lambda\psi_i$, где Λ – диагональная матрица, на диагонали которой располагаются независимые дискретные с.в. принимающие значения либо 0, либо 1 с заданной вероятностью $\mathbf{P}_j$; ψ – вектор независимых гауссовских с.в. $\psi_i \sim \mathcal{N}(100, 3)$.

В задаче навигации в качестве датчиков, измеряющих положение объекта, могут выступать приемники сигналов глобальных навигационных спутнико-

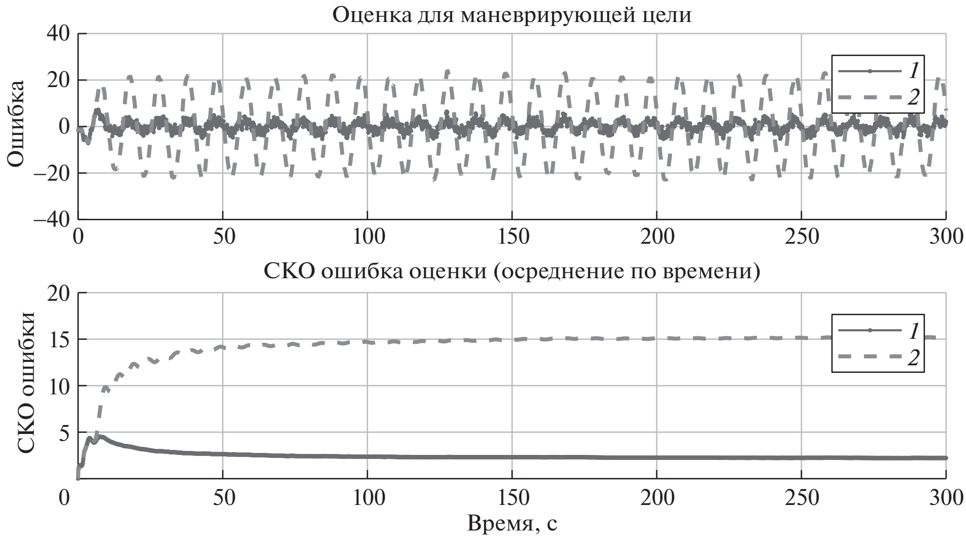

Рис. 1. Имитация маневра цели по сценарию 1. Показана проекция на одну ось декартовой системы координат. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

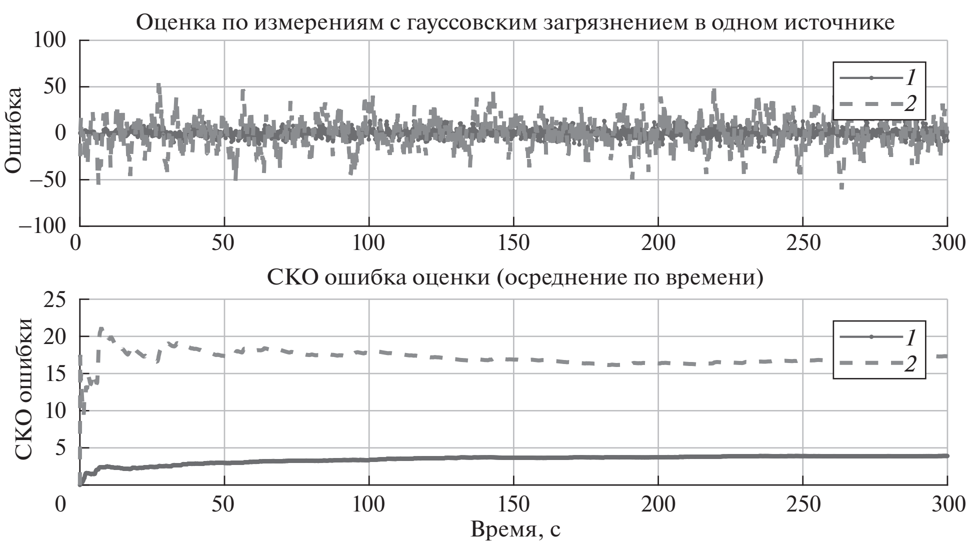

Рис. 2. Моделирование по сценарию 2 с загрязнением измерений одного из источников аддитивным гауссовским шумом. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

вых систем. Известно, что сигналы спутниковых навигационных систем обладают низкой помехозащищенностью. В последнее время ведутся активные исследования в направлении борьбы с так называемым “спуфингом” – типом помех, которые имитируют ложный сигнал (в качестве примера можно привести публикацию [24]). Сценарии 5 и 6 моделируют именно такой тип ошибок.

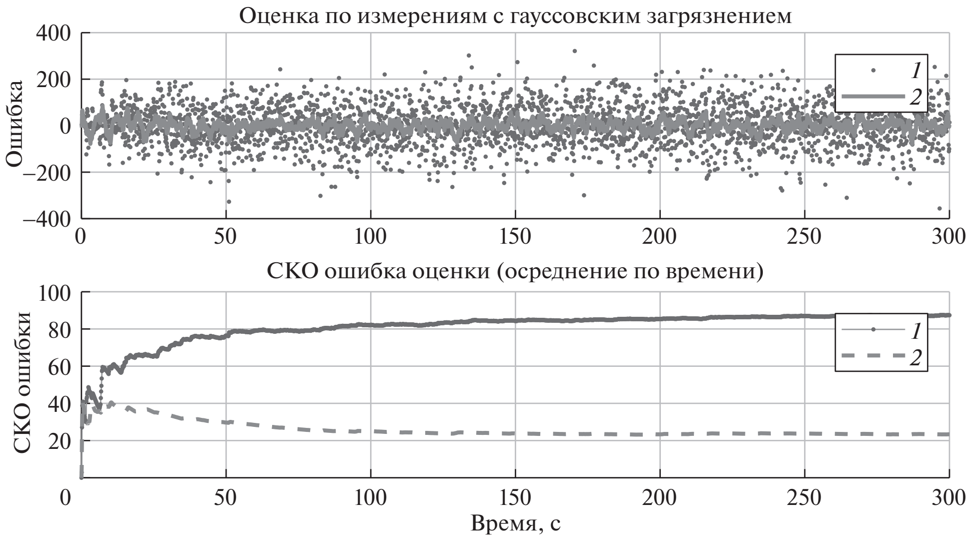

Рис. 3. Моделирование по сценарию 3 с загрязнением всех измерений аддитивным гауссовским шумом. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

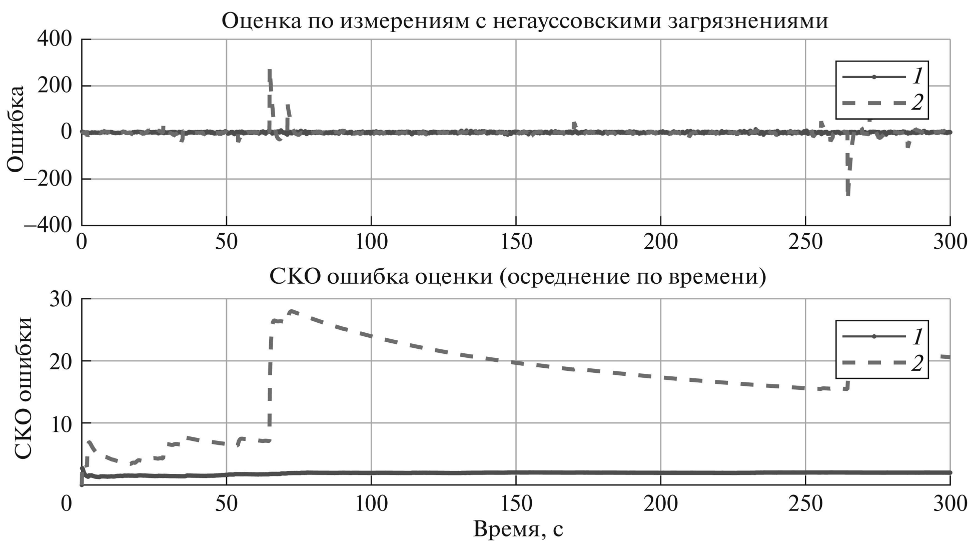

Рис. 4. Моделирование по сценарию 4 с загрязнением измерений ошибками, распределенными по закону Коши. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

Результаты моделирования по сценариям 1–5 показаны на рисунках 1–5 соответственно. Робастный фильтр обладает адаптивными свойствами и существенно повышает эффективность в смысле уменьшения дисперсии ошибок оценки в сценариях 1, 2 и 4. Моделирование по сценарию 3 показывает, что эффективность робастного фильтра снижается по сравнению с фильтром Калмана. Такой результат объясняется тем, что алгоритм со временем спи-

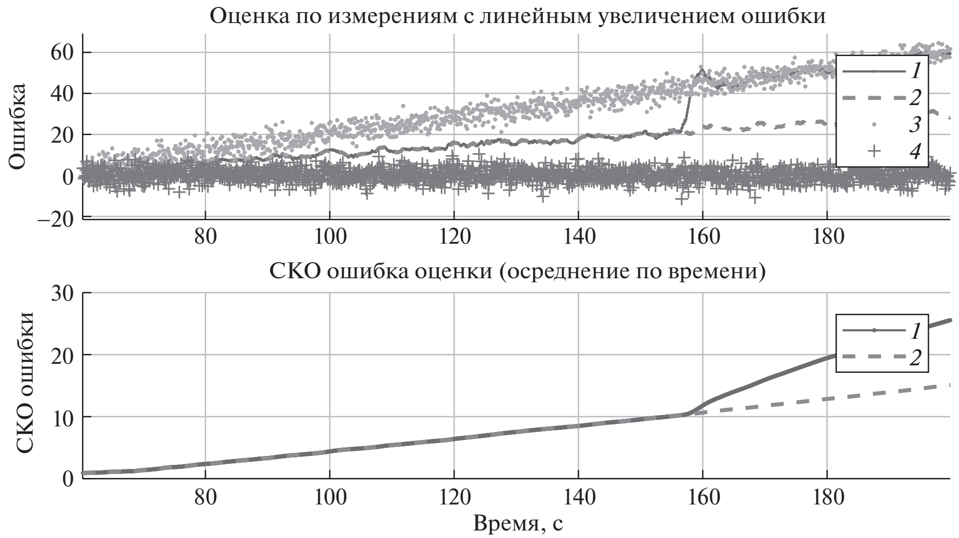

Рис. 5. Моделирование по сценарию 5 с нарастающим математическим ожиданием ошибки в одном источнике измерений. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана, *3* – измерения первого источника, *4* – измерения второго источника.

сывает большие невязки измерений на ошибки модели, что приводит к увеличению коэффициента обратной связи. Интересно, что результаты моделирования по сценарию 4 существенно отличаются от результатов моделирования по сценарию 3, хотя и в том и в другом случае моделируется симметричное распределение неучтенных ошибок. Возможно, различия связаны с тем, что для распределения Коши не определены математическое ожидание и дисперсия, и поэтому неустойчивость оценки калмановского фильтра объясняется применением квадратичного критерия. В разработанном алгоритме робастной фильтрации применяется метод наименьших модулей, который в одномерном случае дает оценку медианы (о связи метода наименьших модулей с медианой говорилось в подразделе 3.1). Можно предположить, что именно это свойство делает робастный фильтр более устойчивым к распределению Коши.

Моделирование по сценарию 5 продемонстрировало специфику работы фильтра в условиях медленного увеличения систематической ошибки в одном

Сравнения СКО оценок $h(t)$ робастного фильтра и фильтра Калмана при обработке загрязненных измерений по сценарию 6

Вероятность загрязнения		СКО оценки	
источник 1	источник 2	робастный фильтр	фильтра Калмана
1	0	1,02	45,7
0	1	1,04	45,6
0,1	0,1	0,7	11,5
0,3	0,3	0,9	28,9
0,5	0,5	60,8	47,7
0,7	0,7	83,7	65,9

измерении. Робастный фильтр равновероятно выбирает один из источников и отслеживает его измерения как достоверные, снижая вес измерений другого источника. На рис. 5 показан пример, когда алгоритмом был выбран источник, содержащий ошибку.

По результатам моделирования сценария 6 составлена таблица. Данные таблицы показывают, что устойчивость робастного фильтра к моделируемым помехам зависит от вероятности, с которой помехи появляются в измерениях. Если помехи присутствуют только в одном источнике измерений, то робастный фильтр существенно повышает точность оценки. Если же помехи присутствуют во всех источниках с вероятностью больше 0,5, точность оценки резко ухудшается.

5. Заключение

Разработан алгоритм робастной фильтрации, который обладает свойством отказоустойчивости по отношению к аномальным ошибкам в измерениях и адаптивными свойствами по отношению к изменяющимся параметрам модели динамического шума системы. Было проведено численное моделирование решения задачи сопровождения цели в линейной системе с двукратным резервированием измерений.

Результаты моделирования показывают, что робастный фильтр повышает эффективность оценки по сравнению с классическим фильтром Калмана, когда цель выполняет неучтенные в модели маневры. Одновременно с этим обеспечивается устойчивость оценки к систематическим ошибкам в одном из источников измерений, а также к симметричным помехам, распределенным по закону Коши. Разработанный алгоритм устойчив к импульсным помехам в более чем 30 % измерений.

В другой ситуации, когда в модели не учитывается увеличение дисперсии нормального шума по всем измерениям, эффективность оценки робастного фильтра снижается. В случае когда ошибки по всем источникам измерений содержат смещенную составляющую, отказоустойчивость обеспечивается только условно: существует пороговое значение вероятности появления смещенной ошибки в измерениях, для которой эффективность оценки резко снижается. Разработанный алгоритм неустойчив к медленному увеличению математического ожидания ошибки в одном из источников измерений.

Для компенсации указанных недостатков может потребоваться использование дополнительных источников измерений, что является предметом дальнейших исследований. Другим направлением дальнейших исследований является использование разработанного метода в нелинейных системах. Так как разработанный алгоритм относится к классу алгоритмов “прогноз–коррекция”, для работы с нелинейными системами можно попробовать заменить шаги прогноза и коррекции на соответствующие процедуры, например метода псевдоизмерений [3] или сигма-точечного фильтра [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2006.

3. *Miller A.B., Miller B.M.* Tracking of the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations // 53rd IEEE Conf. on Decision and Control. Los Angeles, CA. 2014. P. 4178–4184.
4. *Salychev O.S.* Mems-based Inertial Navigation: Expectations and Reality. M.: Bauman Moscow State Technical University, 2012.
5. *Времеенко К.К., Желтов С.Ю., Ким Н.В., Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Себряков Г.Г., Сыпало К.И., Черноморский А.И.* Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2009.
6. *Lainiotis D.* Optimal adaptive estimation: Structure and parameter adaption // IEEE T. Autom. Contr. 1971. No. 16. P. 160–170.
7. *Yang Y., Gao W.* An Optimal Adaptive Kalman Filter // J. Geodesy. 2006. No. 80. P. 177–183.
8. *Mohamed A.H., Schwarz K.P.* Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS // J. Geodesy. 1999. No. 73. P. 193–203.
9. *Reina G., Vargas A., Nagatani K., Yoshida K.* Adaptive Kalman Filtering for GPS-based Mobile Robot Localization // Int. Workshop on Safety, Security and Rescue Robotics. Rome, Italy, September 2007.
10. *Босов А.В., Панков А.Р.* Робастное рекуррентное оценивание процессов в стохастических системах // АиТ. 1992. № 9. С. 102–110.

    Bosov A.V., Pankov A.R. Robust Recurrent Estimations of Processes in Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 9. P. 1395–1402
11. *Koch K.R., Yang Y.* Robust Kalman Filter for Rank Deficient Observation Models // J. Geodesy. 1998. No. 72. P. 436–441.
12. *Chang Guobin, Liu Ming.* M-estimator-based Robust Kalman Filter for Systems with Process Modeling Errors and Rank Deficient Measurement Models // Nonlinear Dynam. 2015. No. 80. P. 1431–1449.
13. *Cao L., Qiao D., Chen X.* Laplace L1 Huber Based Cubature Kalman Filter for Attitude Estimation of Small Satellite // Acta Astronaut. 2018. V. 148. http://10.1016/j.actaastro.2018.04.020.
14. *Huber P.J.* Robust statistics. Wiley series in probability and mathematical statistics. 1981.
15. *Armstrong R.D., Frome E.L.* A Comparison of Two Algorithms for Absolute Deviation Curve Fitting // J. Amer. Statist. Association. 1976. V. 71:354. P. 328–330
16. *Maybeck P.S.* Stochastic Models, Estimation, and Control. Academic Press. 1982. V. 2. P. 70–129.
17. *Kotz Samuel, Kozubowski Tomasz J., Podgorski Krzysztof.* The Laplace Distribution and Generalizations. Springer, 2001.
18. *Barrodale Ian, Roberts F.* An Improved Algorithm for Discrete L1 Linear Approximation // Siam J. Numer. Anal. 1973. No. 10. P. 839–848.
19. *Abdelmalek Nabih N.* On the Discrete Linear L1 Approximation and L1 Solutions of Overdetermined Linear Equations // J. Approx. Theory. 1974. No. 11. P. 38–53.
20. *Abdelmalek Nabih N.* An Efficient Method for the Discrete Linear L1 Approximation Problem // Math. Comput. 1975. V. 29. No. 131. P. 844–850.
21. *Hogben L.* Handbook of Linear Algebra. Second Edition. CRC Press, 2013.
22. *Teunissen P.J.G.* Distributional Theory for the DIA Method // J. Geodesy. 2018. V. 92. P. 59–80.

23. *Xu Changhui, Rui Xiaoping, Song Xianfeng, Gao Jingxiang* Generalized Reliability Measures of Kalman Filtering for Precise Point Positioning // J. Systems Engineering and Electronics. 2013. V. 24. No. 4. P. 699–705.
24. *Seo Seong-Hun, Jee Gyu-In, Lee Byung-Hyun, Im Sung-Hyuck, Kim Kwan-Sung.* Hypothesis Test for Spoofing Signal Identification using Variance of Tangent Angle of Baseline Vector Components // Proc. 30th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS+ 2017). Portland, Oregon, September 2017. P. 1229–1240.
25. *Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F.* A New Approach for Filtering Nonlinear Systems // Proc. IEEE Amer. Control Conf. 1995. P. 1628–1632.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 28.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020