

© 2020 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА¹

Сформулированы и доказаны достаточные условия терминальной инвариантности нелинейных динамических стохастических управляемых систем диффузионно-скачкообразного типа. Скачкообразная компонента имеет вид интеграла по случайной мере Пуассона. Предполагается, что параметры меры (интенсивность и распределение величин скачков) меняются со временем. Предлагаются как условия инвариантности по возмущениям при заданном начальном состоянии, так и условия абсолютной инвариантности, обеспечивающие постоянство значения терминального критерия при любых начальных данных. Применимость результатов продемонстрирована на ряде модельных примеров, включающих в себя результаты численного моделирования и аналитическое исследование построенных терминально инвариантных динамических систем.

Ключевые слова: достаточные условия терминальной инвариантности, нелинейные стохастические системы, диффузионно-скачкообразные процессы, системы с импульсными воздействиями.

DOI: 10.31857/S0005231020110094

1. Введение

Исследования в области теории терминальной инвариантности динамических управляемых систем начались в 1963 г. [1]. После этого в 1968 г. в [2] были получены глобальные необходимые и достаточные условия инвариантности по возмущениям (или слабой инвариантности, в терминологии [1]) и условия абсолютной инвариантности как по возмущениям, так и по начальным данным для детерминированных систем управления. Затем, в 1987 г. эти условия были собраны и структурированы в монографии [3], где также была подробно описана обширная база практических приложений теории, которые остаются актуальными и по сей день. Более подробную информацию о примерах решения конкретных прикладных задач динамики полета методами теории инвариантности можно также найти в [4] и по ссылкам из [3].

Исследования продолжились в 2017 г. в [5, 6], когда условия терминальной инвариантности удалось обобщить на случай стохастических управляемых систем диффузионного типа. Наконец, в 2018 г. вышла статья [7], в которой

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

теоретические результаты приобрели более строгую и точную математическую формулировку, а возможность их использования для решения конкретных прикладных задач была показана на нескольких нетривиальных примерах. Исследования условий терминальной инвариантности для различных значимых частных случаев управляемых диффузионных процессов продолжаются и в настоящее время [8].

В данной работе авторы намерены положить начало новому витку развития теории терминальной инвариантности и рассмотреть обобщение управляемых систем диффузионного типа в виде стохастических систем, содержащих не только непрерывную гауссовскую часть, но и разрывную пуассоновскую компоненту [9]. Такие системы (и соответствующие им процессы) в различных источниках называют системами с импульсными воздействиями, со случайным периодом квантования или диффузионно-скачкообразными процессами. Авторы считают последнее наименование наиболее удачным в рамках рассматриваемой теории и ориентируются, в частности, на работы [10, 11], где оно также использовано. В сравнении с исследованиями этих процессов и систем в [10], здесь пуассоновская компонента дополнительно предполагается неоднородной по времени [11–13].

Необходимость подобного обобщения продиктована в том числе интересами практики, так как в настоящее время для более эффективного математического моделирования реальных управляемых процессов все чаще используются «событийные» стохастические модели [14, 15]. В различных областях приложений в роли независимых друг от друга однотипных случайных событий могут выступать скачки напряжения, обрывы связи, порывы ветра, малые метеоритные воздействия, поломки, чрезвычайные происшествия на производстве, корпоративные дефолты, страховые случаи и т.п. Одной из наиболее распространенных моделей подобного рода является рассматриваемая в данной работе диффузионно-скачкообразная модель.

Несмотря на то, что исследования различных свойств стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа в последние годы по всему миру ведутся весьма активно, свойство терминальной инвариантности для них фактически не изучено. Последнее может быть связано в первую очередь с тем, что широкую известность приобрели различные приближенные и численные методы, позволяющие конструировать некоторые аппроксимации терминально инвариантных систем. Для этого могут быть использованы disturbance attenuation approach, model predictive control (MPC), теория робастного управления. В то же время точное аналитическое построение терминально инвариантных систем имеет ряд существенных преимуществ. Так, например, в результате применения точного аналитического решения методическая ошибка (равная в этом случае нулю) не прибавляется к ошибкам измерений и реализации управляющих воздействий, имеющих место на практике. Еще одним преимуществом методов теории инвариантности является существенная неединственность решений, что дает возможность получения результатов в том числе и для нелинейных задач (см. статью [4] или академический пример в [7]). В силу этих причин, авторы считают оправданным продолжение развития теории терминальной инвариантности несмотря на то, что других подобных результатов для сколь-нибудь общей ситуации им не известно.

Основная идея теории терминальной инвариантности достаточно близка к понятию первого интеграла рассматриваемой динамической системы. Соответствующее понятие для систем диффузионно-скачкообразного типа сформулировано, например, в [16].

2. Постановка задачи

Будем считать, что управляемая динамическая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением [9]

$$(1) \quad \begin{aligned} dx(t) = & f(t, x(t), u(t, \gamma(x(t), v(t))), v(t)) dt + \\ & + g(t, x(t), u(t, \gamma(x(t), v(t))), v(t)) dw(t) + \\ & + \int_{\mathbb{R}^r} h(t, x(t^-), u(t, \gamma(x(t^-), v)), v) \hat{\mu}(dt \times dv), \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

где $t \in [t_0; t_F] \subset [t_S; t_F] \subset \mathbb{R}$ – время, моменты t_S и t_F фиксированы, t_F совпадает с конечным моментом времени функционирования системы; начальное условие $(t_0, x_0) \in B_0$, $t_0 \geq t_S$, заранее не задано, но определено множество $B_0 \subset [t_S; t_F] \times \mathbb{R}^n$ всех возможных начальных условий; $x(t)$ – n -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t ; отображение $t \rightarrow v(t)$ – r -мерный случайный процесс с заданным (одномерным) распределением $\nu(t, \cdot)$ (вероятностной мерой при каждом t), имеющий смысл случайного внешнего возмущения, мгновенные значения которого могут частично измеряться в процессе наблюдений; отображение $t \rightarrow w(t)$ – q -мерный стандартный винеровский процесс, стартовый в момент времени t_0 из точки $w(t_0) = 0$, который описывает полностью ненаблюдаемую часть непрерывных возмущений;

$$(2) \quad \hat{\mu}(dt \times dv) := \begin{cases} \mu(dt \times dv) - \Pi(t, dv)dt, & \text{если } dv \subset \Theta, \\ \mu(dt \times dv), & \text{если } dv \subset \mathbb{R}^r \setminus \Theta, \end{cases}$$

$\mu(\cdot)$ – l -мерная неоднородная случайная пуассоновская мера на $[t_S; t_F] \times \mathbb{R}^r$ с интенсивностью $\Pi(\cdot)$, в каждый момент времени t значение $\Pi(t, \cdot)$ – заданная l -мерная неслучайная ненормированная мера на $\mathbb{R}^r$ с условием $0 < \Pi(t, \mathbb{R}^r) < +\infty$ такая, что выполнено равенство $\Pi(t, \cdot) = \Pi(t, \mathbb{R}^r)\nu(t, \cdot)$, Θ – заданное измеримое подмножество $\mathbb{R}^r$; $(x, v) \rightarrow \gamma(x, v)$ – заданная измеримая p -мерная функция, описывающая процесс наблюдений; $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$ – m -мерная неслучайная измеримая стратегия управления (заранее не задана, но может быть выбрана произвольно в целях, формулируемых далее); $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ – заданные измеримые матричные функции соответствующих размеров; здесь и далее в работе используется обозначение $x(t^-) := \lim_{s \rightarrow t-0} x(s)$, $t \in (t_0; t_F]$, $x(t_0^-) := x_0$, а под измеримостью (подмножеств действительного пространства и действительных функций на нем) понимается измеримость по Борелю. Предполагается, что процессы $v(t)$, $w(t)$ и мера $\mu(\cdot)$ независимы в совокупности.

Отдельных разъяснений требует конструкция последнего слагаемого в правой части системы (1), включающая в себя случайную меру $\hat{\mu}(\cdot)$. Предполагается, что на управляемый процесс оказывают влияние некоторые потоки событий произвольной природы, происходящих независимо друг от друга (внутри одного потока и между ними), с известными неслучайными неоднородными по времени интенсивностями $\Pi_j(t, \mathbb{R}^r)$, $j = \overline{1, l}$. Если в момент времени $s \in [t_0; t_F]$ произошло одно из таких событий, то вектор состояния системы получает мгновенное (скачкообразное) приращение на величину, зависящую от момента времени s , текущего состояния $x(s^-)$ и значения случайного вектора внешних возмущений $v(s)$ с распределением $\nu(s, \cdot)$. Эта величина также зависит от вида функции $h(\cdot)$ и выбранной стратегии управления $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$. Конструкция (2) со множеством Θ определяет общий характер данных воздействий. А именно, если $\Theta = \emptyset$, то на состояние системы также влияет дополнительная непрерывная компонента, в среднем полностью компенсирующая влияние скачков. Если же $\Theta = \mathbb{R}^r$, то со временем влияние скачков в среднем только нарастает. Промежуточные варианты устанавливают некоторую (линейную) комбинацию указанных эффектов.

Замечание 1. В [2–8] не использовалась p -мерная функция наблюдений $\gamma(\cdot)$. Вместо этого предполагалось, что $\gamma(x, v) = (x^T, v^T)^T$, $p = n + r$. Однако вполне естественно предположить, что вектор возмущений $v(t)$ может быть не доступен для прямых измерений в процессе управления, точно также, как и вектор состояния $x(t)$. Таким образом, введение в рассмотрение функции $\gamma(\cdot)$ отвечает практическим требованиям и в то же время не сильно затрагивает конструкцию условий терминальной инвариантности.

Определение 1. Стратегию управления $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$ будем называть B_0 -допустимой, если уравнение (1) имеет хотя бы одно слабое решение [9, с. 519] на интервале $[t_0; t_F]$ для любого фиксированного начального условия $(t_0, x_0) \in B_0$.

Еще до непосредственной постановки задачи терминально инвариантного управления и до формулировки достаточных условий терминальной инвариантности подчеркнем, что определение 1 не предусматривает проверки каких-либо условий существования слабого решения (например, [9, с. 519, теорема 2]) на первых этапах исследования каждой конкретной задачи. Подход, который пропагандируют авторы, состоит в том, чтобы попытаться формально удовлетворить достаточные условия инвариантности с помощью некоторой стратегии управления. После этого ее следует подставить в систему, и в том случае, если для замкнутой таким образом системы удастся проверить выполнение тех или иных достаточных условий существования слабого (или, тем более, единственного сильного) решения, задача будет решена. Если же никаких условий проверить не удастся, то результат тем не менее можно будет использовать как эвристическое средство решения задачи, хотя последний вариант и не будет гарантировать получение искомого результата.

Тем не менее со строго математической точки зрения все дальнейшие следствия и формулировки справедливы только в том случае, когда существует хотя бы одна B_0 -допустимая стратегия, которую удастся найти. Для каждой такой стратегии уравнение (1) допускает [13, 17] представление в интеграль-

ной форме

(3)

$$\begin{aligned}
x(t) = & x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s)) ds + \\
& + \int_{t_0}^t g(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s)) dw(s) + \\
& + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{\tilde{P}_j(t_0, t)} h^{(j)} \left(t_k^{(j)}, x \left(t_k^{(j)-} \right), u \left(t_k^{(j)}, \gamma \left(x \left(t_k^{(j)-} \right), v \left(t_k^{(j)} \right) \right) \right), v \left(t_k^{(j)} \right) \right) - \\
& - \int_{t_0}^t \int_{\Theta} h(s, x(s^-), u(s, \gamma(x(s^-), v)), v) \Pi(s, dv) ds,
\end{aligned}$$

где $h^{(j)}(\cdot)$ – j -й столбец матрицы $h(\cdot)$; $\tilde{P}_j(t_0, t) := P_j(t - t_S) - P_j(t_0 - t_S)$, $P_j(t)$ – неоднородный считающий процесс (процесс Пуассона при $t \geq 0$), согласованный с j -м пуассоновским потоком событий с мгновенной интенсивностью $\Pi_j(t + t_S, \mathbb{R}^r)$; $t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, \dots$ – моменты наступления событий потока, $t_0 \leq t_k^{(j)} \leq t \leq t_F$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $j = \overline{1, l}$. Третье и пятое слагаемые в правой части (3) определены в смысле интегралов Ито и Лебега соответственно. Данное представление может быть эффективно использовано для численного моделирования процесса управления. В некоторых случаях оно также более удобно для аналитического исследования.

Замечание 2. Необходимость использования предела суммирования $\tilde{P}_j(t_0, t)$ в представлении (3) связана с тем, что $t_0 \geq t_S$ и, в отличие от классического определения меры Пуассона [9], мера $\mu(\cdot)$ предполагается заданной на множестве $[t_S; t_F] \times \mathbb{R}^r$, где интервал $[t_S; t_F]$ вовсе не обязательно является подмножеством $\mathbb{R}_+$. Данные допущения удобны с точки зрения теории терминальной инвариантности [7].

Пусть $(B_0\text{-допустимая})$ стратегия $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$ фиксирована. Рассмотрим некоторое начальное условие $(t_0, x_0) \in B_0$. В соответствии с определением 1 существует слабое решение $\mathcal{S}$ уравнения (1), включающее в себя вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \in [t_0; t_F]\}$, на котором найдутся процесс $v(t)$ с распределением $\nu(t, \cdot)$, винеровский процесс $w(t)$, пуассоновская мера $\mu(\cdot)$ интенсивности $\Pi(\cdot)$ и процесс $x(t)$, все согласованные с $\mathcal{F}_t$ и $\mathbf{P}$ -п.н. (почти наверное) связанные соотношениями (1) и (3) при $t \in [t_0; t_F]$. Через $D(t_0, x_0)$ обозначим множество всех таких решений $\mathcal{S}$ и введем также множество

$$D(B_0) := \bigcup_{(t_0, x_0) \in B_0} D(t_0, x_0).$$

Определение 2. Будем говорить, что некоторое свойство относительно процессов $v(t)$, $w(t)$, $x(t)$ и меры $\mu(\cdot)$ выполняется на $D(B_0)$ (или на $D(t_0, x_0)$) с вероятностью 1 или почти наверное, если при любом $\mathcal{S} \in D(B_0)$ (или $\mathcal{S} \in D(t_0, x_0)$) оно $\mathbf{P}$ -п.н. выполнено.

В частности, если задана (B_0 -допустимая) стратегия управления, то можно сказать, что процессы $v(t)$, $w(t)$, $x(t)$ и мера $\mu(\cdot)$ почти наверное связаны соотношениями (1) и (3) на $D(B_0)$.

На множестве $D(B_0)$ определим терминальный критерий, который каждому элементу $\mathcal{S} \in D(B_0)$ ставит в соответствие случайную величину

$$(4) \quad J(\mathcal{S}) = F(x(t_F)), \quad F(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^n).$$

Замечание 3. Терминальный критерий (4) представляет собой параметризованное семейство отображений, так как для каждого слабого решения $\mathcal{S} \in D(B_0)$ случайная величина $F(x(t_F))$ определена на своем соответствующем $\mathcal{S}$ вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение 3. Систему (1) при фиксированной стратегии $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$ будем называть инвариантной по возмущениям, если для любого фиксированного начального условия $(t_0, x_0) \in B_0$ случайная величина (4) с вероятностью 1 на $D(t_0, x_0)$ совпадает с некоторым числом $J_c(t_0, x_0)$.

Определение 4. Систему (1) при фиксированной стратегии $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$ будем называть абсолютно инвариантной, если случайная величина (4) с вероятностью 1 на $D(B_0)$ совпадает с одним и тем же числом J_c^A .

В условиях задачи, сформулированных в настоящем разделе, требуется определить стратегию управления, обеспечивающую терминальную инвариантность динамической системы (1) в смысле определения 3 или определения 4.

3. Достаточные условия терминальной инвариантности

В данном разделе дадим обобщение достаточных условий инвариантности [7] на класс систем диффузионно-скачкообразного типа. Действуя в полном соответствии с [7], введем в рассмотрение множество $\Phi := C^{1,2}([t_S; t_F] \times \mathbb{R}^n)$ функций $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x) : [t_S; t_F] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих непрерывные производные φ_t , φ_x , φ_{xx} . Для краткости обозначим

$$(5) \quad \sigma(t, x, u, v) = g(t, x, u, v)g^T(t, x, u, v),$$

$$(6) \quad K(t, x, u, v) = \varphi_t(t, x) + \varphi_x^T(t, x)f(t, x, u, v) + \frac{1}{2}\text{tr}[\sigma(t, x, u, v)\varphi_{xx}(t, x)],$$

$$(7) \quad S(t, x, u, v) = \varphi_x^T(t, x)g(t, x, u, v),$$

$$(8) \quad \Gamma^{(j)}(t, x, u, v) = \varphi(t, x + h^{(j)}(t, x, u, v)) - \varphi(t, x), \quad \Gamma = (\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(l)}),$$

$$(9) \quad \Lambda(t, x, u, v) = \Gamma(t, x, u, v) - \varphi_x^T(t, x)h(t, x, u, v),$$

$$(10) \quad L(t, x, u, v) = K(t, x, u, v) + \int_{\Theta} \Lambda(t, x, u, v)\Pi(t, dv).$$

Теорема 1. Если при фиксированной стратегии $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$ существуют измеримая ограниченная функция $t \rightarrow \eta(t) : [t_S; t_F] \rightarrow \mathbb{R}$ и функция $\varphi(\cdot) \in \Phi$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^r$ выполнены условия

- (i) $\varphi(t_F, x) = F(x)$,
- (ii) $L(t, x, u(t, \gamma(x, v)), v) = \eta(t)$ почти всюду на $[t_S; t_F]$,
- (iii) $S(t, x, u(t, \gamma(x, v)), v) = 0$ почти всюду на $[t_S; t_F]$,
- (iv) $\Gamma(t, x, u(t, \gamma(x, v)), v) = 0$ всюду на $[t_S; t_F]$,

то система (1) инвариантна по возмущениям, а значение критерия п.н. равно

$$(11) \quad J_c(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_F} \eta(t) dt.$$

Теорема 2. Если при фиксированной стратегии $(t, \gamma) \rightarrow u(t, \gamma)$ существуют измеримая ограниченная функция $t \rightarrow \eta(t) : [t_S; t_F] \rightarrow \mathbb{R}$, функция $\varphi(\cdot) \in \Phi$ и постоянная $A > 0$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^r$ выполнены условия

- (i) $\eta(t_F^-) = \eta(t_F)$,
- (ii) $\varphi(t_F, x) = F(x)$,
- (iii) $L(t, x, u(t, \gamma(x, v)), v) = (\eta(t) - A\varphi(t, x))(t_F - t)^{-1}$ почти всюду на $[t_S; t_F]$,
- (iv) $S(t, x, u(t, \gamma(x, v)), v) = 0$ почти всюду на $[t_S; t_F]$,
- (v) $\Gamma(t, x, u(t, \gamma(x, v)), v) = 0$ всюду на $[t_S; t_F]$,

то система (1) абсолютно инвариантна, а значение критерия п.н. равно

$$(12) \quad J_c^A = \frac{\eta(t_F)}{A}.$$

Структура полученных результатов практически не отличается от соответствующих утверждений из [7]. Это связано с тем, что доказательства теорем 1 и 2 (см. Приложение), как и в случае работы [7], основаны на применении формулы Ито, принимающей в контексте рассматриваемой задачи некоторый обобщенный вид [9, 10, 16]. Поэтому также остаются справедливыми следующие два утверждения.

Замечание 4 [7]. Если условия теоремы 2 оказываются выполнены для функции $\eta(t) \equiv 0$ и $A > 1$, то функция

$$t \rightarrow \mathcal{L}(t) := L(t, x(t), u(t, \gamma(x(t), v(t))), v(t))$$

вида (10), несмотря на условие (iii), является ограниченной п.н. на $D(B_0)$ и п.в. на $[t_S; t_F]$ и, более того, $\mathcal{L}(t_F^-) = 0$.

Замечание 5 [8]. Из определения абсолютной инвариантности 4 следует, что для наличия этого свойства у системы (1) достаточно, чтобы условия теоремы 2 выполнялись п.н. на $D(B_0)$ лишь для моментов времени малого интервала $[t_F - \varepsilon; t_F]$. Величина числа $\varepsilon > 0$ может быть, вообще говоря, различной для каждого $\mathcal{S} \in D(B_0)$.

Замечание 6. Если $\Theta = \emptyset$, то все условия теорем 1, 2 и формулы (11) и (12) не зависят от интенсивности $\Pi(\cdot)$ пуассоновской меры $\mu(\cdot)$. В этом случае из терминальной инвариантности системы (1) для некоторой интенсивности $\Pi(\cdot)$ следует ее терминальная инвариантность и для любой другой интенсивности $\Pi'(\cdot)$.

4. Примеры

В [7] было изучено несколько модельных примеров терминальной инвариантности стохастических систем диффузионного типа. В данной работе в силу новизны скачкообразной компоненты с точки зрения теории терминального управления, а также с целью более наглядной демонстрации новых результатов, сконцентрируем внимание в основном на системах чисто скачкообразного типа (т.е. без диффузионного слагаемого). При решении общей задачи терминальной инвариантности диффузионно-скачкообразной системы можно объединить исследования примеров настоящей работы и статьи [7].

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + x_2(t^-)\mu(dt \times \mathbb{R}), \\ dx_2(t) = -x_1(t)dt + u(t, x(t^-))\mu(dt \times \mathbb{R}), \end{cases}$$

где $t \in [t_0; 0] \subset [-1; 0]$; интенсивность пуассоновской меры $\Pi(t, \mathbb{R}) \equiv 5$; размерности векторов $n = 2$, $m = l = 1$; отсутствуют возмущения, связанные со случайными процессами $v(t)$ и $w(t)$ (поэтому интеграл в уравнении (1) устраняется с введением обозначения $\hat{\mu}(\cdot, \mathbb{R})$ и можно считать, что $r = q = 1$; $p = n = 2$, $\gamma(x, v) = x$; множество $\Theta = \emptyset$, так что $\hat{\mu}(\cdot) \equiv \mu(\cdot)$.

Требуется обеспечить инвариантность системы по возмущениям относительно величины $J = x_2(0)$ для множества $B_0 = [-1; 0] \times \mathbb{R}^2$.

Функции $\varphi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ построим в форме

$$\varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2, \quad \eta(t) \equiv 0,$$

тогда условия теоремы 1 с учетом обозначений (5)–(10) примут вид

- (i) $\psi_1(0)x_1 + \psi_2(0)x_2 = x_2$,
- (ii) $\dot{\psi}_1(t)x_1 + \dot{\psi}_2(t)x_2 + \psi_1(t)x_2 - \psi_2(t)x_1 = 0$ п.в. на $[-1; 0]$,
- (iii) заведомо выполнено,
- (iv) $\psi_1(t)x_2 + \psi_2(t)u(t, x) = 0$ всюду на $[-1; 0]$.

Из условия (iv) сразу получаем структуру инвариантного управления

$$u(t, x) = -\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}x_2,$$

а коэффициенты $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ найдем из условий (i), (ii). В силу произвольности значений x_1 , x_2 получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1(t)}{dt} &= \psi_2(t), & \psi_1(0) &= 0, \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} &= -\psi_1(t), & \psi_2(0) &= 1, \end{aligned}$$

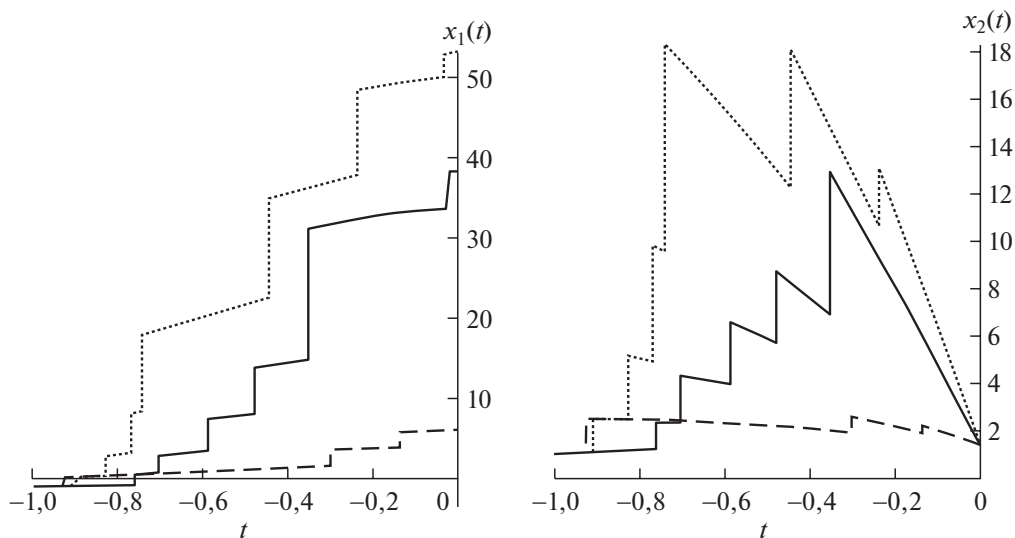


Рис. 1. Три реализации состояния $x(t)$.

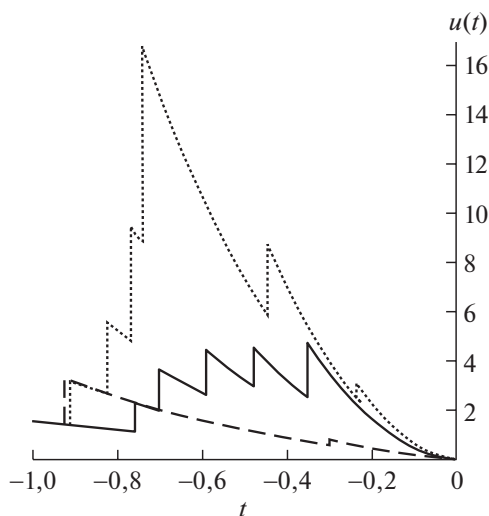


Рис. 2. Три реализации управления $u(t, x(t))$.

которая имеет решение $\psi_1(t) = \sin(t)$, $\psi_2(t) = \cos(t)$. Таким образом,

$$u(t, x) = -\operatorname{tg}(t)x_2.$$

На рис. 1–2 представлены результаты простейшего численного моделирования методом Эйлера для нескольких реализаций траекторий компонент вектора состояния $x(t)$ и управления $u(t, x(t))$ с начальным условием $(t_0, x(t_0)) = (-1, (-1, 1)^T)$.

Значения величины $J = x_2(0)$ отличаются друг от друга в пределах погрешности численного счета и равны 1,386, 1,382, 1,387 соответственно для

полученных реализаций. Точное терминальное значение критерия по формуле (11) п.н. равно $J_c(t_0, x_0) = \sin(1) + \cos(1) \approx 1,381$.

Пример 2. В условиях примера 1 покажем явно, что найденное (инвариантное по возмущениям) управление не обеспечивает абсолютную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(0)$ для произвольного начального условия $(t_0, x(t_0)) \in B_0$.

Положим $u(t, x) = -\text{tg}(t)x_2$ и перепишем исходную систему стохастических уравнений в матричной форме:

$$dx(t) = Fx(t)dt + H(t)x(t^-)\mu(dt \times \mathbb{R}),$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\text{tg}(t) \end{pmatrix}.$$

Получаем линейное по $x(t)$ стохастическое уравнение скачкообразного типа, для которого выполнены достаточные условия существования и единственности сильного решения [9, с. 528, теорема 1] на интервале $[-1; 0]$. Это решение может быть записано явно в виде [10]

$$x(t) = \exp \left\{ Ft + \int_{t_0}^t \ln[I + H(s)]\mu(ds, \mathbb{R}) \right\} x(t_0),$$

I – единичная матрица.

Переходя к представлению типа (3), получаем

$$x(t) = \exp \left\{ Ft + \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0, t)} \ln[I + H(t_k)] \right\} x(t_0),$$

а значит,

$$x(0) = \prod_{k=1}^{P(1)-P(t_0+1)} [I + H(t_k)]x(t_0) =: \mathcal{H}x(t_0), \quad -1 \leq t_0 < 0.$$

В силу структуры матрицы $H(t)$ справедливо равенство

$$x_2(0) = \mathcal{H}_{22}x_2(t_0),$$

где $\mathcal{H}_{22}$ – второй диагональный элемент случайной матрицы $\mathcal{H}$. Последнее равенство означает, что абсолютная инвариантность возможна, только если случайная величина $\mathcal{H}_{22}$ равна нулю п.н. на $D(B_0)$. В то же время нетрудно проверить, что

$$\mathcal{H}_{22} = \prod_{k=1}^{P(1)-P(t_0+1)} (1 - \text{tg}(t_k)),$$

а условие $\operatorname{tg}(t) = 1$ верно лишь для счетного числа значений $t < 0$ и не выполнено ни в одной точке интервала $[-1; 0]$, поэтому событие $\{\mathcal{H}_{22} = 0\}$ заведомо имеет нулевую вероятность на $D(B_0)$.

Таким образом, полученная в примере 1 инвариантная по возмущениям динамическая система не является абсолютно инвариантной.

Трудность построения абсолютно инвариантной системы связана с тем, что правая часть условия (iii) теоремы 2 содержит сингулярность $(t_F - t)^{-1}$. Тем не менее, как отмечено в замечании 4, если такую систему построить все же удастся, то эта сингулярность некоторым образом устраняется. Реализуем данный процесс, дополнив систему еще одной компонентой управления.

Пример 3. Запишем систему с дополнительным управлением

$$\begin{cases} dx_1(t) = [x_2(t) + u_1(t, x(t))]dt + x_2(t^-)\mu(dt \times \mathbb{R}), \\ dx_2(t) = -x_1(t)dt + u_2(t, x(t^-))\mu(dt \times \mathbb{R}). \end{cases}$$

При тех же значениях параметров, что и в примере 1, требуется обеспечить абсолютную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(0)$ для произвольного начального условия $(t_0, x(t_0)) \in B_0$.

Зафиксируем снова

$$\varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2, \quad \eta(t) \equiv 0,$$

тогда условия теоремы 2 примут вид

- (i) заведомо выполнено,
- (ii) $\psi_1(0)x_1 + \psi_2(0)x_2 = x_2$,
- (iii) $\dot{\psi}_1(t)x_1 + \dot{\psi}_2(t)x_2 + \psi_1(t)x_2 + \psi_1(t)u_1(t, x) - \psi_2(t)x_1 = t^{-1}A(\psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2)$ п.в. на $[-1; 0]$, $A > 0$,
- (iv) заведомо выполнено,
- (v) $\psi_1(t)x_2 + \psi_2(t)u_2(t, x) = 0$ всюду на $[-1; 0]$.

Условие (v) определяет аналогичную примеру 1 структуру для второй компоненты вектора управления

$$u_2(t, x) = -\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}x_2,$$

а чтобы выполнить условие (iii), положим

$$u_1(t, x) = \frac{A}{t} \left(x_1 + \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}x_2 \right).$$

После этого условия (iii) и (ii) принимают вид задачи Коши из примера 1, так что $\psi_1(t) = \sin(t)$, $\psi_2(t) = \cos(t)$ и

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \frac{A}{t} (x_1 + \operatorname{ctg}(t)x_2), \\ u_2(t, x) &= -\operatorname{tg}(t)x_2. \end{aligned}$$

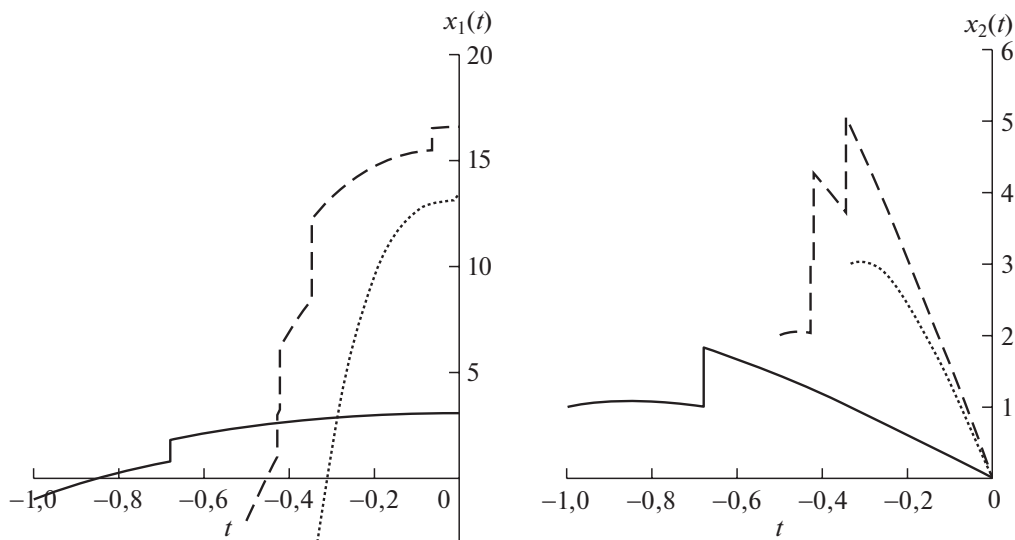


Рис. 3. Три реализации состояния $x(t)$ с начальными условиями: $t_0 = -1$, $x(t_0) = (-1, 1)^T$; $t_0 = -1/2$, $x(t_0) = (-2, 2)^T$; $t_0 = -1/3$, $x(t_0) = (-3, 3)^T$.

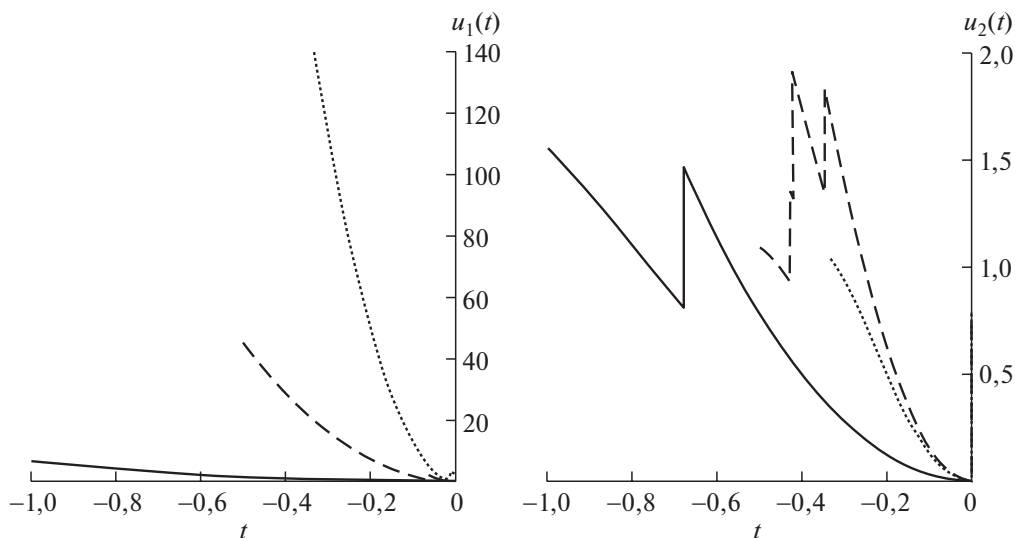


Рис. 4. Три реализации управления $u(t, x(t))$.

На рис. 3–4 представлены реализации траекторий компонент $x(t)$ и $u(t, x(t))$ для различных начальных условий при $A = 4$.

Значения величины $J = x_2(0)$ оказались равными 10^{-9} , 10^{-8} , $0,0044$, т.е. они с достаточной точностью совпадают со значением (12) $J_c^A = \eta(0)/A = 0$.

Необходимо отметить следующие важные детали приведенного выше построения.

Во-первых, введение дополнительной компоненты управления действительно дает значительно больше возможностей для выполнения условий теоремы 2. Его основной функцией является устранение «неприятной» правой части условия (iii), которая оказывает серьезное влияние на возможности решения задачи. Тем не менее полученная за счет этой дополнительной компоненты свобода действий, на самом деле, является несколько избыточной. Так, например, можно было бы выполнить условия (ii) и (iii), положив

$$u_1(t, x) = -x_2 + \frac{A}{t} \left(x_1 + \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} x_2 \right),$$

тогда $\psi_1(t) = t$, $\psi_2(t) \equiv 1$ и соответственно

$$u_1(t, x) = \frac{A}{t} x_1 + \left(\frac{A}{t^2} - 1 \right) x_2, \quad u_2(t, x) = -t x_2.$$

Результат моделирования системы, замкнутой таким управлением, при том же значении $A = 4$ отличается незначительно от результатов, показанных на рис. 3 и 4. Последнее объясняется соотношением

$$\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{tg}(t)/t = 1.$$

Во-вторых, для систем вида (1) само дополнительное управление, влияющее на условие (iii), можно ввести различными способами. В частности, запись $[x_2(t) + u_1(t, x(t))]dt$ в правой части уравнения для $dx_1(t)$ можно получить, положив в (1) $f_1(t, x, u, v) = x_2 + u_1$ либо $f_1(t, x, u, v) = x_2$, $h_1(t, x, u, v) = u_1/\Pi(t, \mathbb{R})$, $\Theta = \mathbb{R}$, но тогда это скажется не только на условии (iii), но и на условии (v). Наконец, аналогичным образом повлиять на условие (iii) можно и за счет введения управляемой диффузионной части (разумеется, при этом условие (iv) уже не будет заведомо выполнено).

В-третьих, выбор значения постоянной $A = 4$ основан на замечании 4. В условиях данного примера следствием этого является ограниченность с вероятностью 1 на $D(B_0)$ и п.в. на $[-1; 0]$ функции $u(t, x(t))$, что вполне можно наблюдать на рис. 4. На рис. 5–6 представлены результаты аналогичного моделирования для случая $A = 1$. Видно, что в конечный момент времени $t_F = 0$ значения $x_1(t)$ и $u_1(t, x(t))$ начинают неограниченно возрастать, так как коэффициент $\psi_1(0) = 0$, а функция $\mathcal{L}(t)$ вида (10) (см. замечание 4) из условия (iii) уже не обладает свойством $\mathcal{L}(t_F^-) = 0$. Однако даже при этом система остается абсолютно инвариантной по критерию $J = x_2(0)$.

Данный пример отлично демонстрирует все отмеченные ранее свойства абсолютно инвариантных систем. В следующем, заключительном, примере докажем абсолютную инвариантность полученной системы с помощью прямого решения (по аналогии с примером 2).

Пример 4. В условиях примера 3 покажем явно, что найденное (абсолютно инвариантное) управление действительно обеспечивает абсолютную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(0)$ для произвольного начального условия $(t_0, x(t_0)) \in B_0$.

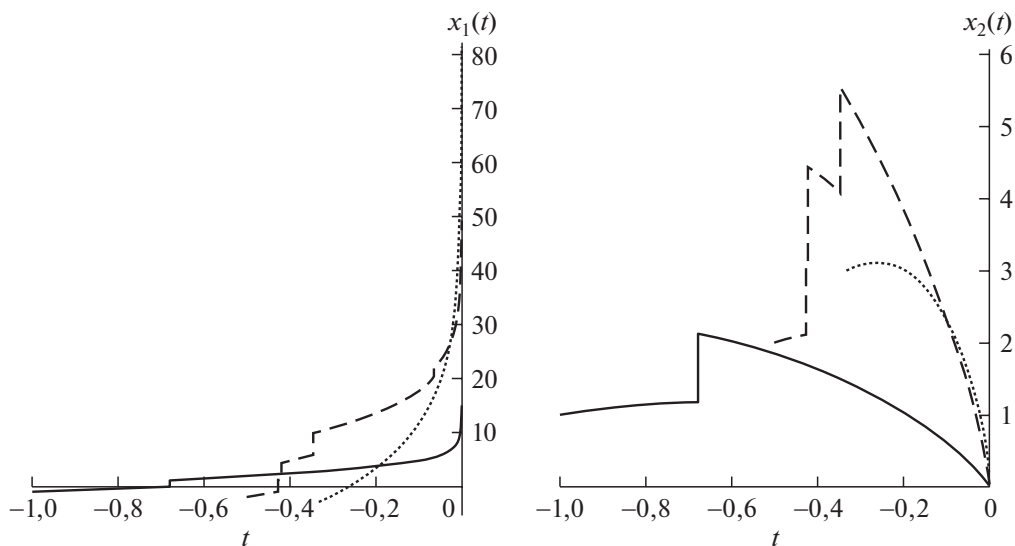


Рис. 5. Три реализации состояния $x(t)$ с теми же начальными условиями при $A = 1$.

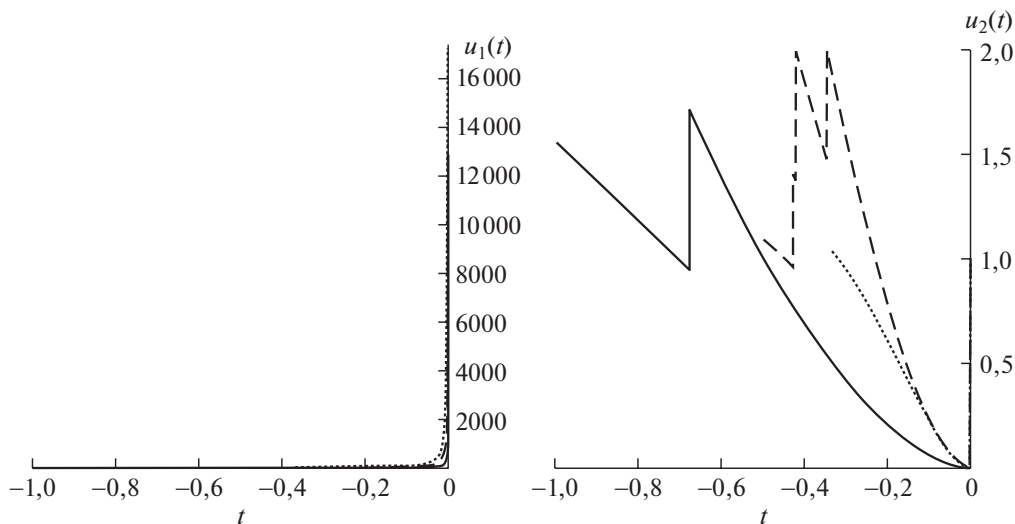


Рис. 6. Три реализации управления $u(t, x(t))$ при $A = 1$.

В примере 3 было записано два, вообще говоря, различных варианта абсолютно инвариантного управления при разных значениях A . Для простоты возьмем $A > 1$, вариант

$$u_1(t, x) = \frac{A}{t}x_1 + \left(\frac{A}{t^2} - 1\right)x_2, \quad u_2(t, x) = -tx_2$$

и подставим его в исходную систему из примера 3, переписав ее в форме (3)

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{A}{s} \left(x_1(s) + \frac{x_2(s)}{s} \right) ds + \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0, t)} x_2(t_k^-), \\ x_2(t) = x_2(t_0) - \int_{t_0}^t x_1(s) ds - \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0, t)} t_k x_2(t_k^-). \end{cases}$$

Введем обозначения

$$x_3(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0, t)} x_2(t_k^-), \quad \tilde{x}_1(t) = x_1(t) - x_3(t), \quad \tilde{x}_2(t) = x_2(t) + tx_3(t),$$

так что $x_3(t_0) = 0$ п.н. на $D(B_0)$, тогда в силу равенства

$$\int_{t_0}^t x_3(s) ds = \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0, t)} (t - t_k) x_2(t_k^-) = tx_3(t) - \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0, t)} t_k x_2(t_k^-)$$

систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{A}{s} \left(\tilde{x}_1(s) + \frac{\tilde{x}_2(s)}{s} \right) ds, \\ \tilde{x}_2(t) = x_2(t_0) - \int_{t_0}^t \tilde{x}_1(s) ds \end{cases}$$

или, возвращаясь к дифференциальной форме,

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} = \frac{A}{t} \left(\tilde{x}_1(t) + \frac{\tilde{x}_2(t)}{t} \right), & \tilde{x}_1(t_0) = x_1(t_0), \\ \frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} = -\tilde{x}_1(t), & \tilde{x}_2(t_0) = x_2(t_0). \end{cases}$$

Таким образом, подстановка управления $u_2(t, x)$, выбранного из условия (v) теоремы 2, фактически позволяет убрать из рассмотрения случайную скачкообразную составляющую системы и сводит задачу к проверке абсолютной инвариантности только ее детерминированной части.

Решение полученной детерминированной системы на интервале $[t_0; 0)$ единственно и при $A > 1$ имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = -C_1(t_0, x(t_0)) - C_2(t_0, x(t_0))At^{A-1}, \\ \tilde{x}_2(t) = C_1(t_0, x(t_0))t + C_2(t_0, x(t_0))t^A, \end{cases}$$

где

$$C_1(t, x) = \frac{tx_1 - Ax_2}{t(A - 1)}, \quad C_2(t, x) = \frac{tx_1 - x_2}{tA(1 - A)}.$$

Отсюда для любых начальных условий $(t_0, x(t_0)) \in B_0$ имеем

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{x}_2(s) = \tilde{x}_2(0) = x_2(0) = 0,$$

что означает абсолютную инвариантность детерминированной, а значит, и исходной стохастической системы при использовании управления $u_1(t, x)$, выбранного из условия (iii). Непосредственно подставляя полученные соотношения в формулы для $x_{1,2}(t)$, а затем и для $u_{1,2}(t, x(t))$, легко убедиться в ограниченности всех этих функций на $[-1; 0]$.

5. Заключение

Теоретические исследования инвариантных по терминальному критерию систем далеки от завершения. Полученные в данной работе общие достаточные условия инвариантности нелинейных стохастических систем в ряде частных случаев приобретают весьма интересные и неочевидные свойства. Однозначно подлежат внимательному исследованию линейные системы, а также системы с линейными по состоянию коэффициентами как в непрерывном случае, так и при наличии скачков, для которых условия в общем виде могут быть доведены до простых регулярных выражений.

Еще больше предстоит сделать в практическом плане. Многие математические модели реальных физических процессов в настоящее время содержат случайные параметры, зачастую имеющие вид диффузионных или скачкообразных компонент стохастического уравнения. Условия терминальной инвариантности позволяют не приближенно, а точно решать на основе таких моделей множество актуальных прикладных проблем управления. Достаточно сказать, что модели, рассмотренные в учебном пособии [3] и статье [4], могут быть уточнены за счет введения в рассмотрение параметров, учитывающих случайные внешние воздействия непрерывной и дискретной («событийной») природы.

Тем не менее следует отметить, что решение конкретных прикладных проблем с помощью изложенных в данной работе подходов в силу специфики достаточных условий каждый раз представляет собой отдельную (порой нетривиальную) исследовательскую задачу, что непосредственно наблюдается уже на модельных примерах. В силу этих причин авторы считают оправданным отделение непосредственных приложений от теоретических разработок и надеются охватить, по крайней мере, часть из указанных вопросов в своих дальнейших исследованиях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Прежде чем перейти к обоснованию полученных в работе результатов, приведем без доказательства следующее утверждение.

Утверждение 1. С учетом определений 1, 2 и обозначений (5)–(10) для любых начального условия $(t_0, x_0) \in B_0$, функции $\varphi(\cdot) \in \Phi$ и момента времени $t \in [t_0; t_F]$ верна формула Ито [9, 10, 13, 18]

$$(II.1) \quad \begin{aligned} d\varphi(t, x(t)) = & L(t, x(t), u(t, \gamma(x(t), v(t))), v(t))dt + \\ & + S(t, x(t), u(t, \gamma(x(t), v(t))), v(t))dw(t) + \\ & + \int_{\mathbb{R}^r} \Gamma(t, x(t^-), u(t, \gamma(x(t^-), v)), v) \hat{\mu}(dt \times dv) \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \varphi(t, x(t)) = & \varphi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t L(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s))ds + \\ & + \int_{t_0}^t S(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s))dw(s) + \\ & + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{\bar{P}_j(t_0, t)} \Gamma^{(j)}\left(t_k^{(j)}, x\left(t_k^{(j)-}\right), u\left(t_k^{(j)}, \gamma\left(x\left(t_k^{(j)-}\right), v\left(t_k^{(j)}\right)\right)\right), v\left(t_k^{(j)}\right)\right) - \\ & - \int_{t_0}^t \int_{\Theta} \Gamma(s, x(s^-), u(s, \gamma(x(s^-), v)), v) \Pi(s, dv)ds \end{aligned}$$

с вероятностью 1 на множестве $D(t_0, x_0)$.

Обоснование утверждения 1 можно найти в [10, 13], а строгое доказательство – в [18]. Нижеследующие доказательства основаны на данном утверждении и в остальных своих частях практически повторяют доказательства из [7], поэтому здесь они приведены в достаточно краткой форме.

Доказательство теоремы 1. Пусть точка $(t_0, x_0) \in B_0$ фиксирована. Из формулы Ито (II.2) в силу условий (ii)–(iv) теоремы следует справедливость п.н. на $D(t_0, x_0)$ равенства

$$\varphi(t, x(t)) = \varphi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t \eta(s)ds,$$

и, в частности, при $t = t_F$, из условия (i) вытекает соотношение (11), что по определению 3 означает инвариантность системы (1) по возмущениям.

Доказательство теоремы 2. Пусть точка $(t_0, x_0) \in B_0$ произвольна. Из формулы Ито (II.1) в силу условий (iii)–(v) теоремы следует справедливость п.н. на $D(B_0)$ и п.в. на $[t_S; t_F]$ равенства

$$d\varphi(t, x(t)) = \frac{\eta(t) - A\varphi(t, x(t))}{t_F - t}dt,$$

представляющего собой обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\varphi^*(t) := \varphi(t, x(t))$ с произвольным начальным условием $\varphi^*(t_0) = \varphi(t_0, x_0)$ в произвольной точке t_0 . Данное уравнение имеет на интервале $[t_0; t_F)$ решение [7]

$$\varphi^*(t) = (t_F - t)^A \left[\frac{\varphi(t_0, x_0)}{(t_F - t_0)^A} + \int_{t_0}^t \frac{\eta(s)}{(t_F - s)^{A+1}} ds \right],$$

и можно показать [7, лемма 1], что при $t = t_F$ в силу условия (i) теоремы это решение допускает непрерывное продолжение

$$\varphi(t_F, x(t_F)) = \varphi^*(t_F^-) = \frac{\eta(t_F)}{A},$$

а значит, из условия (ii) вытекает соотношение (12), что по определению 4 означает абсолютную инвариантность системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розоноэр Л.И. Вариационный подход к проблеме инвариантности // АиТ. 1963. № 6. С. 744–756; № 7. С. 17–22.
Rozonoer L.I. A Variational Approach to the Problem of Invariance of Automation Control Systems // Autom. Remote Control. 1963. V. 24. No. 6. P. 680–743; No. 7. P. 793–800.
2. Хрусталеv М.М. Необходимые и достаточные условия слабой инвариантности // АиТ. 1968. № 4. С. 17–22.
Khrustalev M.M. Necessary and sufficient conditions of invariance // Autom. Remote Control. 1968. V. 29. No. 4. P. 540–544.
3. Хрусталеv М.М. Методы теории инвариантности в задачах синтеза законов терминального управления летательными аппаратами. Учебное пособие. М: МАИ, 1987.
4. Khrustalev M.M., Plotnikov Ju.P., Belov V.A. The invariant control of vehicle descent into the atmosphere // Acta Astronautica. 1976. No. 5–6. P. 357–367.
5. Хрусталеv М.М. Слабая инвариантность стохастических систем диффузионного типа // Тр. XI Международной Четаевской конф. Аналитическая механика, устойчивость и управление. Т. 3. Часть III. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 171–177.
6. Хрусталеv М.М. Инвариантность стохастических систем диффузионного типа // ДАН. 2017. Т. 476. № 2. С. 148–150.
Khrustalev M.M. Invariance of Stochastic Diffusion Systems // Doklady Mathematics. 2017. V. 96. № 2. P. 535–537.
7. Хрусталеv М.М. Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионного типа // АиТ. 2018. № 8. С. 81–100.
Khrustalev M.M. Terminal Invariance of Stochastic Diffusion Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 8. P. 1434–1449.
8. Хрусталеv М.М. Терминальная инвариантность линейных стохастических систем диффузионного типа // Тр. Всерос. сов. по пробл. управления (ВСПУ-2019, Москва). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1305–1309.

9. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
10. *Øksendal B., Sulem A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2005.
11. *Рыбаков К.А.* Достаточные условия оптимальности в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа // Тр. Всерос. сов. по пробл. управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 734–744.
12. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85–116.
13. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
14. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2010.
15. *Yin G., Zhu C.* Hybrid Switching Diffusions. New York, USA: Springer, 2010.
16. *Карачанская Е.В.* Обобщенная формула Ито–Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры, стохастический первый интеграл и первый интеграл // Матем. тр. 2014. Т. 17. № 1. С. 99–122.
17. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
18. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 18.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020