

© 2020 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frccsc.ru)
(Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, Москва;
Московский авиационный институт;
Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ)

\mathcal{L}_1 -ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ II: ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОНКРЕТНЫХ СХЕМ¹

Вторая часть статьи посвящена определению порядка точности различных численных схем реализации алгоритма фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. Отдельно исследованы случаи аддитивных и мультипликативных шумов в наблюдениях: показано, что одни и те же схемы в этих случаях обеспечивают разную точность. Для наблюдений с аддитивными шумами предложены схемы реализации порядка $\frac{1}{2}$, 1 и 2, а для наблюдений с мультипликативными шумами — порядка 1 и 2. Представленные теоретические результаты проиллюстрированы численными примерами.

Ключевые слова: марковский скачкообразный процесс, устойчивая оценка, оценка максимума апостериорной вероятности, схема численного интегрирования.

DOI: 10.31857/S0005231020120028

1. Введение

Данная статья является продолжением [1]. В первой части поставлена и решена задача \mathcal{L}_1 -оптимальной фильтрации состояний *марковских скачкообразных процессов* (МСП) по непрерывным косвенным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. Представлены точное решение этой задачи, а также класс алгоритмов его численной реализации. Точность вычисляемых оценок зависит от порядка выбранной аналитической аппроксимации и численной схемы ее реализации. В [1] представлены показатели точности численных реализаций оценок и доказаны утверждения, их описывающие.

Целью второй части статьи является вычисление показателей точности для аналитических аппроксимаций различного порядка и численных схем их реализации. Показатели точности анализируются отдельно для случаев наблюдений с аддитивными и мультипликативными шумами: в этих двух случаях они различны.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована задача \mathcal{L}_1 -оптимальной фильтрации, ее теоретическое решение, представлены аналитические аппроксимации и их численные реализации. Для точного

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-07-00187 А.

и приближенного решения предложены показатели близости и сформулированы утверждения, их характеризующие.

В разделе 3 для случая наблюдений с аддитивными шумами рассмотрены различные схемы численной реализации. В качестве численных реализаций использовалась прямая дискретизация системы наблюдения, схемы «левых» и «средних» прямоугольников, а также квадратуры Гаусса. Использование *простых* (несоставных) схем численного интегрирования позволило получить аппроксимации оценок фильтрации порядка точности $\frac{1}{2}$, 1 и 2.

Раздел 4 посвящен исследованию точности приближенных схем при фильтрации состояний МСП по наблюдениям с мультипликативными шумами. В качестве численных реализаций вновь выступали схема «средних» прямоугольников и схема средних 2-го порядка. Показано, что простые схемы не могут быть использованы для построения аппроксимаций и следует использовать соответствующие составные схемы с дополнительным дроблением области интегрирования. В итоге получены численные алгоритмы фильтрации общего порядка точности 1 и 2.

Раздел 5 содержит иллюстративные примеры применения различных численных схем для фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными и мультипликативными шумами. В разделе 6 представлены заключительные выводы и направления дальнейших исследований.

2. Необходимые сведения об аналитическом и приближенном решении задачи фильтрации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega^X \times \Omega^W, \mathcal{F}^X \times \mathcal{F}^W, \mathbf{P}^X \times \mathbf{P}^W, \{\mathcal{F}_t^X \times \mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0})$ рассматривается стохастическая динамическая система

$$(2.1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + \mu_s,$$

$$(2.2) \quad y_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s, \quad r \in \mathbb{N},$$

где

— $X_t \triangleq \text{col}(X_t^1, \dots, X_t^N) \in \mathbb{S}^N$ – ненаблюдаемое состояние системы, являющееся однородным МСП с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\}$ (\mathbb{S}^N – множество единичных векторов евклидова пространства \mathbb{R}^N), матрицей интенсивностей переходов Λ и начальным распределением π ;

— $\mu_t \triangleq \text{col}(\mu_t^1, \dots, \mu_t^N) \in \mathbb{R}^N$ – \mathcal{F}_t^X -согласованный мартингал;

— $y_r \triangleq \text{col}(y_r^1, \dots, y_r^M) \in \mathbb{R}^M$ – косвенные наблюдения, зашумленные \mathcal{F}_t -согласованным стандартным винеровским процессом $W_t \triangleq \text{col}(W_t^1, \dots, W_t^M) \in \mathbb{R}^M$; f – матрица плана наблюдений, а набор невырожденных симметричных матриц $\{g_n\}_{n=1, \dots, N}$ характеризует интенсивности шумов в зависимости от

текущего состояния X_t ; наблюдения $\{\mathcal{Y}_r\}_r$ получены путем дискретизации по времени с постоянным шагом h соответствующих непрерывных наблюдений.

Неубывающее семейство σ -алгебр, порожденное последовательностью $\{\mathcal{Y}_r\}_{r \in \mathbb{N}}$, обозначено как $\mathcal{O}_r \triangleq \sigma\{\mathcal{Y}_\ell : 0 \leq \ell \leq r\}$, $\mathcal{O}_0 \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$.

Задача \mathcal{L}_1 -оптимальной фильтрации состояния X по дискретным наблюдениям \mathcal{Y} заключается в нахождении такой оценки \widehat{X}_r , $r \in \mathbb{N}$ состояния МСП X_{rh} , что

$$(2.3) \quad \widehat{X}_r \in \underset{\widetilde{X}_r \in \mathcal{X}_r}{\text{Argmin}} \mathbb{E} \left\{ \|\widetilde{X}_r - X_{rh}\|_1 \right\},$$

где \mathcal{X}_r – множество всех таких \mathcal{O}_r -согласованных последовательностей $\{\widetilde{X}_r\}$ с конечным первым моментом, что

$$\sum_{n=1}^N \widehat{X}_r^n \equiv 1 \quad \text{с вероятностью } 1.$$

Ниже в изложении будем использовать следующие обозначения:

– $\mathcal{D} \triangleq \left\{ u = \text{col}(u^1, \dots, u^N) : u_n \geq 0, \sum_{n=1}^N u^n = h \right\}$ – $(N-1)$ -мерный симплекс в пространстве \mathbb{R}^M ;

– $\Pi \triangleq \left\{ \pi = \text{col}(\pi^1, \dots, \pi^N) : \pi_n \geq 0, \sum_{n=1}^N \pi^n = 1 \right\}$ – «вероятностный симплекс», множество возможных начальных распределений МСП π ;

– N_r^X – случайное число скачков состояния X_t , произошедшее на отрезке времени $[t_{r-1}, t_r]$,

– $\rho_r^{k,\ell,q}(du)$ – распределение вектора $X_{t_r}^\ell \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) \tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для любого $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r) \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r-1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \rho_r^{k,\ell,q}(du);$$

– $\mathcal{N}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2} \det^{-1/2} K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|y - m\|_{K^{-1}}^2 \right\}$ – M -мерная плотность гауссовского распределения с математическим ожиданием m и невырожденной ковариационной матрицей K ;

– $\|\alpha\|_K^2 \triangleq \alpha^\top K \alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle_K \triangleq \alpha^\top K \beta$.

Решение задачи фильтрации выражается через условное распределение состояния МСП относительно доступных наблюдений $\widehat{x}_r \triangleq \mathbb{E} \{ X_{t_r} | \mathcal{O}_r \}$ и совпадает с оценкой максимума апостериорной вероятности: $\widehat{X}_r = e_{n^*}$, где $n^* \in \text{Argmax}_{n=\overline{1,N}} \widehat{x}_r^n$.

Условное распределение определяется рекуррентной процедурой

$$(2.4) \quad \widehat{x}_r^j = \frac{\sum_{k=1}^N \widehat{x}_{r-1}^k \sum_{q=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j,q}(du)}{\sum_{i,\ell=1}^N \widehat{x}_{r-1}^i \sum_{c=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fv, \sum_{n=1}^N v^n g_n \right) \rho_r^{i,\ell,c}(dv)}, \quad j = \overline{1,N}, \quad \widehat{x}_0 = \pi.$$

Дробь в (2.4) содержит в числителе и знаменателе бесконечные суммы интегралов, не вычисляемые аналитически. Для компьютерной реализации данная рекурсия должна быть преобразована. На первом шаге преобразования оценка \hat{x}_r заменяется *аналитической аппроксимацией порядка s* : бесконечные суммы в числителе и знаменателе заменяются конечными, содержащими только $s + 1$ слагаемых:

$$(2.5) \quad \bar{x}_r^j(s) = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{x}_{r-1}^k(s) \sum_{q=0}^s \int \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,q}(du)}{\sum_{i,\ell=1}^N \bar{x}_{r-1}^i(s) \sum_{c=0}^s \int \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fv, \sum_{n=1}^N v^n g_n \right) \rho^{i,\ell,c}(dv)}, \quad j = \overline{1, N}, \quad \hat{x}_0 = \pi.$$

Ограничение числа слагаемых означает, что в аппроксимации учитывается возможность не более чем s скачков оцениваемого состояния X на интервале дискретизации $[t_{r-1}, t_r]$. Рекурсия (2.5) представима в матричной форме

$$(2.6) \quad \bar{x}_r(s) = \left(\mathbf{1} \xi_r^\top \bar{x}_{r-1}(s) \right)^{-1} \xi_r^\top \bar{x}_{r-1}(s),$$

где

$$(2.7) \quad \xi_q^{kj} \triangleq \sum_{m=0}^s \int \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_q, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,m}(du), \quad \xi_q \triangleq \|\xi_q^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}.$$

На втором шаге преобразования интегралы ξ^{ij} (2.7) заменяются суммами

$$(2.8) \quad \xi^{ij}(y) \approx \psi^{ij}(y) \triangleq \sum_{\ell=1}^L \mathcal{N} \left(y, fw_\ell, \sum_{p=1}^N w_\ell^p g_p \right) \varrho_\ell^{ij}, \quad \psi(y) \triangleq \|\psi^{ij}(y)\|_{i,j=\overline{1,N}},$$

определяемыми множеством пар $\left\{ (w_\ell, \varrho_\ell^{ij}) \right\}_{\ell=\overline{1,L}}$. Здесь $\varrho_\ell^{ij} \geq 0$ ($\ell = \overline{1,L}$) – веса:

$$(2.9) \quad \mathfrak{W} \triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^L \varrho_\ell^{ij} \leq 1,$$

а $w_\ell \triangleq \text{col}(w_\ell^1, \dots, w_\ell^N) \in \mathcal{D}$ – точки. Аналогично матрицам ξ_q строятся их аппроксимации $\psi_q \triangleq \|\psi^{ij}(\mathcal{Y}_q)\|_{i,j=\overline{1,N}}$. В результате условное распределение \hat{x}_r приближенно вычисляется с помощью рекуррентной процедуры

$$(2.10) \quad \tilde{x}_r \triangleq \left(\mathbf{1} \psi_r^\top \tilde{x}_{r-1} \right)^{-1} \psi_r^\top \tilde{x}_{r-1}, \quad r \geq 1, \quad \tilde{x}_0 = \pi.$$

Оценка \tilde{x}_r называется *численной реализацией аналитической аппроксимации \bar{x}_r , соответствующей той или иной схеме численного интегрирования*.

Оценки \hat{x}_r , \bar{x}_r и \tilde{x}_r обладают свойством *устойчивости* [1]: их компоненты почти наверняка неотрицательны и нормированы.

Если $\bar{\lambda} \triangleq \max_{n=1, \dots, N} |\lambda_{nn}|$ и для схемы численного интегрирования верно неравенство

$$(2.11) \quad \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} |\psi^{ij}(y) - \xi^{ij}(y)| dy \leq \delta,$$

то расхождение \hat{x}_r и \tilde{x}_r характеризуется неравенством

$$(2.12) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\hat{x}_r - \tilde{x}_r\|_1 \right\} \leq 4 \left[1 - \left(1 - \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} \right)^r \right] + 2r\mathfrak{M}^{r-1}\delta.$$

При фиксированном горизонте T и уменьшении шага дискретизации $h \rightarrow 0$ это же неравенство приобретает асимптотический вид

$$(2.13) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\hat{x}_{T/h} - \tilde{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leq 2T \left(2\bar{\lambda} \frac{(\bar{\lambda}h)^s}{(s+1)!} + \frac{\delta}{h} \right).$$

Ниже исследуются аппроксимации порядка $s = 1$ и $s = 2$. Для них с помощью обобщенной формулы полной вероятности легко получить вид интегралов (2.7), используемых в дальнейшем изложении:

$$(2.14) \quad \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,0}(du) = \delta_{kj} e^{\lambda_{kk}h} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_r, hf^k, hg_k),$$

$$(2.15) \quad \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,1}(du) = \\ = (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_r, uf^k + (h-u)f^j, ug_k + (h-u)g_j) du,$$

$$(2.16) \quad \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,2}(du) = \\ = \sum_{\substack{i:i \neq k, \\ i \neq j}} \lambda_{ki} \lambda_{ij} e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h \int_0^{h-u^k} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{ii})u + (\lambda_{ii} - \lambda_{jj})v} \times \\ \times \mathcal{N}(\mathcal{Y}_r, uf^k + vf^i + (h-u-v)f^j, ug_k + vg_i + (h-u-v)g_j) dv du,$$

где f^j – j -й столбец матрицы f .

В следующих разделах представлено исследование влияния точности различных схем вычисления интегралов в (2.15) и (2.16) на точность аппроксимации решений задач фильтрации состояний МСП с аддитивными и мультипликативными шумами в наблюдениях. Доказательства всех утверждений,

сформулированных ниже, характеризующих это влияние, базируются на использовании неравенств (2.11), (2.13) и построены по единой схеме. На первом шаге доказательства величина $|\psi^{ij}(y) - \xi^{ij}(y)|$ оценивается сверху с использованием известных границ ошибок численного интегрирования [2]. Обычно эта оценка выражается через производные интеграндов. На втором шаге строится оценка сверху для интеграла в левой части (2.11). Эта операция является нетривиальной, так как выполняется в предположении малости шага h . Дело в том, что с уменьшением h как масштаба области интегрирования синхронно изменяется масштаб интеграндов, которые становятся близки к δ -функции Дирака. Данный факт соответствующим образом влияет и на производные интеграндов. В итоге порядок малости интеграла в правой части (2.11) оказывается ниже, чем порядок численной схемы [2] без условия асимптотической малости h . Основная проблема доказательств утверждений ниже заключается в определении, насколько изменится этот порядок малости.

3. Численные схемы фильтрации по наблюдениям с аддитивными шумами

3.1. Случай $s = 1$: дискретизация стохастической дифференциальной системы наблюдения и схема «левых прямоугольников»

В данном подразделе демонстрируется связь алгоритма (2.10) приближенной фильтрации состояния МСП по дискретизованным наблюдениям для случая $s = 1$ и алгоритма фильтрации состояний марковских цепей – процессов с дискретным временем – по дискретным наблюдениям.

На $(\Omega^x \times \Omega^w, \mathcal{F}^x \times \mathcal{F}^w, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}^w, \{\mathcal{F}_r^x \times \mathcal{F}_r^w\}_{r \in \mathbb{Z}_+})$ рассмотрим стохастическую систему наблюдения с дискретным временем

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_r = P^\top x_{r-1} + m_r, & r \in \mathbb{N}, \quad x_0 \sim \pi, \\ y_r = F x_r + \sum_{n=1}^N x_r^n G_n^{1/2} w_n. \end{cases}$$

Здесь

– $x_r \triangleq \text{col}(x_r^1, \dots, x_r^N)$ – ненаблюдаемая однородная марковская цепь со значениями в \mathbb{S}^N , с матрицей P переходных вероятностей на одном шаге и начальным распределением π ; $\{m_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ – \mathcal{F}_r^x -согласованная мартингал-разность;

– $y_r \triangleq \text{col}(y_r^1, \dots, y_r^M)$ – наблюдаемая последовательность, F – матрица плана наблюдения, а $\{G_n\}_{n=1, \dots, N}$ являются условными матрицами ковариаций шумов в наблюдениях относительно текущего значения марковской цепи;

– $w_r \triangleq \text{col}(w_r^1, \dots, w_r^M)$ – \mathcal{F}_r^w -согласованный стандартный гауссовский дискретный белый шум, не зависящий от $\{x_r\}$, представляющий ошибки наблюдений.

Задача фильтрации цепи x по наблюдениям y заключается в вычислении условного распределения $\hat{x}_r \triangleq \mathbb{E}\{x_r | y_1, \dots, y_r\}$. Решение ее известно [3]: оно

определяется следующей рекуррентной схемой вида «прогноз–коррекция»:

$$(3.2) \quad \widehat{x}_0 = \pi - \text{начальное условие},$$

$$(3.3) \quad \check{x}_r = P^\top \widehat{x}_{r-1} - \text{прогноз},$$

$$(3.4) \quad \widehat{x}_r = \frac{1}{\mathbf{1}\kappa_r\check{x}_r} \kappa_r \check{x}_r - \text{коррекция},$$

где

$$\kappa_r \triangleq \text{diag}(\mathcal{N}(y_1, Fe_1, G_1), \dots, \mathcal{N}(y_N, Fe_N, G_N)).$$

Вернемся к системе наблюдения (2.1), (2.2) на сетке с шагом $h < \bar{\lambda}^{-1}$ и покажем, что на ней система может быть приближена некоторой системой с дискретным временем (3.1). Уравнение динамики (2.1) может быть дискретизовано точно: согласно разложению Ито–Гейлора [4]

$$(3.5) \quad X_{t_r} = \exp(h\Lambda^\top)X_{t_{r-1}} + (\mu_{t_r} - \mu_{t_{r-1}}),$$

где

$$\exp(h\Lambda^\top) = I + h\Lambda^\top + O(h^2).$$

Из (2.2) также следует, что

$$(3.6) \quad Y_{t_r} = hfX_{t_r} + \sum_{n=1}^N X_{t_r}^n g_n^{1/2}(W_{t_r} - W_{t_{r-1}}) + \vartheta_r,$$

где стохастическая последовательность $\{\vartheta_r\}$ такова, что $\mathbf{E}\{\|\vartheta_r\|_2\} \leq Ch^{3/2}$ для любого $r \in \mathbb{N}$ и некоторой константы $C > 0$. Формулы (3.5) и (3.6) представляют схему временной дискретизации системы (2.1), (2.2), и к ней может быть применен алгоритм фильтрации (3.2)–(3.4) со следующими значениями параметров:

$$P = I + h\Lambda, \quad F = hf, \quad G_n = hg_n, \quad j = \overline{1, N}.$$

При этом рекурсия (3.3), (3.4) для данной системы записывается в форме

$$(3.7) \quad \widetilde{x}_r = \frac{1}{\mathbf{1}\kappa_r(I + h\Lambda^\top)\widetilde{x}_{r-1}} \kappa_r(I + h\Lambda^\top)\widetilde{x}_{r-1},$$

и ее можно рассматривать как один из видов численной схемы реализации аппроксимации порядка $s = 1$: элементы матрицы ξ имеют вид

$$(3.8) \quad \xi^{kj}(y) = \delta_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\mathcal{N}(y, hf^j, hg_j) + (1 - \delta_{kj})\lambda_{kj}e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h Q^{kj}(y, u)du,$$

где

$$(3.9) \quad Q^{kj}(y, u) \triangleq e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}\left(y, u f^k + (h - u) f^j, u g_k + (h - u) g_j\right).$$

В рекуррентной процедуре (3.7) элементы ξ^{kj} аппроксимированы функциями

$$(3.10) \quad \psi^{kj}(y) = (\delta_{kj} + h \lambda_{kj}) \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j).$$

Следующее утверждение определяет показатель точности численной схемы (3.7).

Лемма 1. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема (3.7) обеспечивает глобальный порядок точности $\frac{1}{2}$, т.е. для любого $T > 0$ при достаточно малом шаге $h > 0$

$$(3.11) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leq C T h^{\frac{1}{2}}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство леммы 1 дано в Приложении. Предложенная реализация алгоритма фильтрации при выбранном порядке аналитической аппроксимации $s = 1$ имеет результирующий порядок точности $\frac{1}{2}$ из-за неэффективного выбора схемы численного интегрирования. Лемма 1 также позволяет получить следствие, согласно которому использование схемы «левых» прямоугольников для численного интегрирования сохранит результирующий порядок точности на уровне $\frac{1}{2}$.

Аппроксимируем интеграл (2.15) по отрезку $[0, h]$ односточечной схемой (2.8), используя значение интегранда $\mathcal{N}(\cdot)$ в левой точке, беря его с весом ϱ^{kj} ($k \neq j$):

$$(3.12) \quad \varrho^{kj} \triangleq \begin{cases} \lambda_{kj} \frac{e^{\lambda_{jj}h} - e^{\lambda_{kk}h}}{\lambda_{jj} - \lambda_{kk}}, & \text{если } \lambda_{jj} \neq \lambda_{kk}, \\ h \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj}h}, & \text{если } \lambda_{jj} = \lambda_{kk}. \end{cases}$$

При этом схема «левых» прямоугольников вычисления интегралов в рекурсии (2.10) примет вид

$$(3.13) \quad \psi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj}h} \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j) + (1 - \delta_{kj}) \varrho^{kj} \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j).$$

Следствие 1. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема «левых» прямоугольников в рекурсии (2.10) обеспечивает глобальный порядок точности $\frac{1}{2}$.

Доказательство следствия 1 приведено в Приложении.

3.2. Случай $s = 1$: простая схема «средних» прямоугольников

Вычислим $\psi^{kj}(y)$ по формуле «средних» прямоугольников:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \psi^{kj}(y) &= \delta_{kj} e^{\lambda_{jj}h} \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j) + \\ &+ (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h e^{\frac{(\lambda_{kk} + \lambda_{jj})h}{2}} \mathcal{N}\left(y, \frac{h}{2} (f^k + f^j), \frac{h}{2} (g_k + g_j)\right). \end{aligned}$$

Лемма 2. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема (3.14) в рекурсии (2.10) обеспечивает глобальный порядок точности 1, т.е. для любого $T > 0$ при достаточно малом шаге $h > 0$

$$(3.15) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leq CT h^1$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство леммы 2 дано в Приложении.

Таким образом, заменой схемы численного интегрирования без увеличения вычислительных затрат возможно повысить общий порядок точности до первого. Дальнейшая фиксация порядка $s = 1$ и использование более точных методов численного интегрирования не приведет к значительному уточнению оценок, так как в суммарной погрешности основную роль будет играть ошибка аналитической аппроксимации, а не численного интегрирования. Для увеличения общей точности следует увеличить порядок аналитической аппроксимации до второго.

3.3. Случай $s = 2$: квадратуры Гаусса

Формулы (2.14)–(2.16) для $s = 2$ позволяют получить вид функций ξ^{kj} :

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \xi^{kj}(y) &= \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j) + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \int_0^h Q^{kj}(y, u) du + \\ &+ \sum_{i: i \neq k, i \neq j} \lambda_{ki} \lambda_{ij} e^{\lambda_{jj} h} \int_0^h \int_0^{h-u} R^{kij}(y, u, v) dv du, \end{aligned}$$

где функция $Q^{kj}(y, u)$ определена формулой (3.9) и

$$(3.17) \quad \begin{aligned} R^{kij}(y, u, v) &\triangleq e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{ii})u + (\lambda_{ii} - \lambda_{jj})v} \times \\ &\times \mathcal{N}\left(y, u f^k + v f^i + (h - u - v) f^j, u g_k + v g_i + (h - u - v) g_j\right). \end{aligned}$$

Для вычисления одномерного интеграла в (3.16) будем использовать двухточечную квадратуру Гаусса

$$\begin{aligned} &\int_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}\left(y, u f^k + (h - u) f^j, y, u g_k + (h - u) g_j\right) du = \\ &= \frac{h}{2} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj}) \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} f^k + \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} f^j, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} g_k + \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} g_j\right) + \right. \\ &\left. + e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj}) \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} f^k + \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} f^j, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} g_k + \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} g_j\right) \right] + \epsilon_1(y), \end{aligned}$$

для повторного интеграла – трехточечную:

$$\begin{aligned}
& \int_0^h \int_0^{h-u} e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})u+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})v} \mathcal{N}\left(y, u f^k + v f^i + (h-u-v) f^j, u g_k + v g_i + (h-u-v) g_j\right) dv du = \\
& = \frac{h^2}{6} \left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}} \mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6} f^k + \frac{h}{6} f^i + \frac{2h}{3} f^j, \frac{h}{6} g_k + \frac{h}{6} g_i + \frac{2h}{3} g_j\right) + \right. \\
& \quad \left. + e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{2h}{3}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}} \mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6} f^k + \frac{2h}{3} f^i + \frac{h}{6} f^j, \frac{h}{6} g_k + \frac{2h}{3} g_i + \frac{h}{6} g_j\right) + \right. \\
& \quad \left. + e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{2h}{3}} \mathcal{N}\left(y, \frac{2h}{3} f^k + \frac{h}{6} f^i + \frac{h}{6} f^j, \frac{2h}{3} g_k + \frac{h}{6} g_i + \frac{h}{6} g_j\right) \right] + \epsilon_2(y),
\end{aligned}$$

где $\epsilon_1(y)$ и $\epsilon_2(y)$ – ошибки интегрирования. Таким образом, интегралы в рекурсии (2.10) вычисляются с помощью следующей схемы:

$$\begin{aligned}
(3.18) \quad & \psi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j) + (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h e^{\lambda_{jj} h}}{2} \times \\
& \times \left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})\frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} f^k + \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} f^j, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} g_k + \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} g_j\right) + \right. \\
& \quad \left. + e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})\frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} f^k + \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} f^j, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} g_k + \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} g_j\right) \right] + \\
& + \sum_{\substack{i:i \neq k, \\ i \neq j}} \frac{\lambda_{ki} \lambda_{ij} h^2 e^{\lambda_{jj} h}}{6} \left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}} \mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6} f^k + \frac{h}{6} f^i + \frac{2h}{3} f^j, \frac{h}{6} g_k + \frac{h}{6} g_i + \frac{2h}{3} g_j\right) + \right. \\
& \quad \left. + e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{2h}{3}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}} \mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6} f^k + \frac{2h}{3} f^i + \frac{h}{6} f^j, \frac{h}{6} g_k + \frac{2h}{3} g_i + \frac{h}{6} g_j\right) + \right. \\
& \quad \left. + e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{2h}{3}} \mathcal{N}\left(y, \frac{2h}{3} f^k + \frac{h}{6} f^i + \frac{h}{6} f^j, \frac{2h}{3} g_k + \frac{h}{6} g_i + \frac{h}{6} g_j\right) \right].
\end{aligned}$$

Лемма 3. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема (3.18) в рекурсии (2.10) обеспечивает глобальный порядок точности 2, т.е. для любого $T > 0$ при достаточно малом шаге $h > 0$

$$(3.19) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leq C T h^2$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство леммы 3 дано в Приложении. Сравнивая схемы (3.14) и (3.18) можно сделать вывод, что увеличивая число операций в схеме примерно в $N(N-1)$ раз удается повысить общий порядок точности аппроксимации до второго.

4. Численные схемы фильтрации по наблюдениям с мультипликативными шумами

Для простоты сравнения точности различных численных схем будем считать, что в (2.1), (2.2) $f = 0$, т.е. аддитивный полезный сигнал полностью отсутствует, и все матрицы $\{g_n\}_{n=1, \overline{N}}$ различны. Будет исследована точность тех же численных реализаций алгоритма фильтрации, которые исследовались в предыдущем разделе. Поэтому выполнение условия (2.9) ниже в данном разделе уже не проверяется.

Если все матрицы интенсивности шумов в наблюдениях различны, то оценка оптимальной фильтрации почти наверное совпадает с оцениваемым состоянием [6]. Несмотря на это многообещающее свойство, в разделе будет показано, что системы наблюдения с мультипликативными шумами обладают худшими свойствами для численной реализации, нежели системы с аддитивными шумами. Это означает, что одна и та же численная схема, примененная для фильтрации состояний по наблюдениям с мультипликативными шумами, позволяет получить менее точные оценки, чем при фильтрации состояний по наблюдениям с аддитивными шумами.

4.1. Случай $s = 1$: составная схема «средних» прямоугольников

Рассмотрим аналитическую аппроксимацию $\bar{x}_r(1)$, определенную (3.8), и ее аппроксимацию составной схемой «средних» прямоугольников с шагом дискретизации $h^{1+\alpha}$, $\alpha \geq 0$:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \psi^{kj}(y) &= \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j) + \\ &+ (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h^{1+\alpha} \sum_{i=1}^{[h^{-\alpha}]} Q^{kj} \left(y, h^{1+\alpha} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Легко проверить, что при $\alpha = 1$ последняя формула представляет простую схему «средних» прямоугольников.

Лемма 4. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с мультипликативными шумами схема (4.1) в рекурсии (2.10) обеспечивает глобальный порядок точности $p = \min(1, 2\alpha)$, т.е. для любого $T > 0$ при достаточно малом шаге $h > 0$

$$(4.2) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \} \leq C T h^p$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство леммы 4 дано в Приложении. Из него следует, что точности простого метода «средних» прямоугольников недостаточно для построения численного алгоритма фильтрации любого положительного порядка точности. Какая-либо замена этой схемы на другую несоставную (например, на схему Симпсона, квадратуры Гаусса и пр.) к улучшению не приведут. Причиной этому является алгебраическая связь между порядком производной и

степенью h в оценке ошибки интеграла по остатку ряда Тейлора. Из леммы также можно заключить, что при $s = 1$ рациональным выбором порядка шага дробления является $\alpha = \frac{1}{2}$.

4.2. Случай $s = 2$: составная схема средних

Результаты леммы 4 позволяют построить аппроксимацию элементов ξ^{kj} (3.16) порядка $s = 2$, вычисляя как одномерные, так и двумерные интегралы с помощью составной схемы средних с шагом h^2 :

$$\begin{aligned}
 \psi^{kj}(y) &= \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}(y, h f^j, h g_j) + \\
 &+ (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h^2 \sum_{i=1}^{[h^{-1}]} Q^{kj} \left(y, h^2 \left(i - \frac{1}{2} \right) \right) + \\
 (4.3) \quad &+ \frac{h^4}{2} \sum_{\substack{i: i \neq k, \\ i \neq j}} \lambda_{ki} \lambda_{ij} e^{\lambda_{jj} h} \sum_{n=1}^{[h^{-1}]} \sum_{m=1}^{[h^{-1}] - n} R^{kij} \left(y, h^2 \left(n - \frac{2}{3} \right), h^2 \left(m - \frac{2}{3} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Следствие 2. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с мультипликативными шумами схема (4.3) в рекурсии (2.10) обеспечивает глобальный порядок точности 2, т.е. для любого $T > 0$ при достаточно малом шаге $h > 0$

$$(4.4) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left\{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leq C T h^2$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство следствия 2 приведено в Приложении.

5. Численные примеры

Численное сравнение точности представленных выше методов является нетривиальной задачей из-за сложности подбора подходящего примера. Во-первых, разница в точности, обеспечиваемой различными схемами, будет мала в случае, когда столбцы f^n или матрицы g_n для разных значений n близки по значению между собой. Во-вторых, доказанные в [1] утверждения о порядке точности носят асимптотический характер при $h \rightarrow 0$: выбор слишком малого шага дискретизации может привести к тому, что вероятность превышения числом скачков состояния на отрезке дискретизации единицы окажется столь незначительной, что численные реализации высокого порядка будут практически не отличимы по точности от численных реализаций первого порядка. Наконец, в-третьих, характеристики точности того или иного метода приходится вычислять методом Монте-Карло, что приводит к необходимости моделирования пучков траекторий и оценок очень большого объема для визуального «разделения» этих характеристик.

5.1. Сравнительный анализ схем фильтрации по наблюдениям с аддитивными шумами

Для сравнительного анализа различных численных реализаций алгоритма фильтрации использовалась система наблюдения (2.1), (2.2) со следующими характеристиками: $t \in [0, 1]$, $N = 3$, $h = 0,01$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -10,0 & 2,0 & 8,0 \\ 8,0 & -10,0 & 2,0 \\ 2,0 & 8,0 & -10,0 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 0,333 \\ 0,333 \\ 0,334 \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -50,0 \\ 50,0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 1,$$

объем пучка траекторий для метода Монте-Карло $S = 100000$.

На рис. 1 и 2 представлены графики $Q^{1,2}(y, u)$ и $Q^{1,3}(y, u)$ интеграндов в (2.15) как функций аргумента u для некоторых фиксированных значений y .

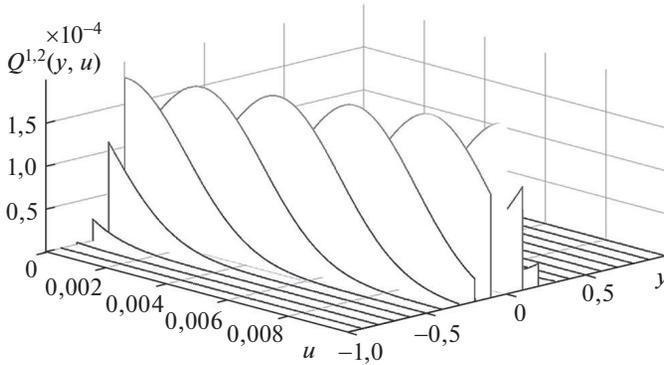


Рис. 1. Графики функции $Q^{1,2}(y, u)$ при некоторых фиксированных y : аддитивные шумы в наблюдениях.

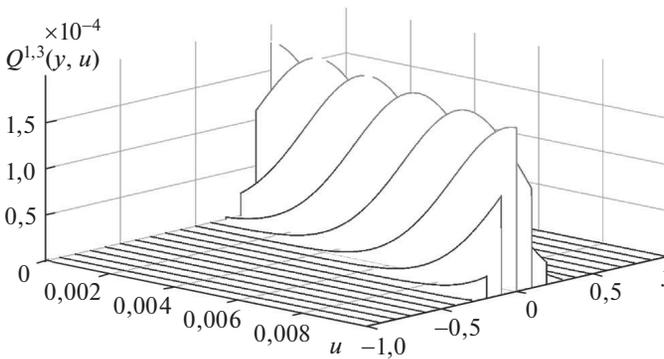


Рис. 2. Графики функции $Q^{1,3}(y, u)$ при некоторых фиксированных y : аддитивные шумы в наблюдениях.

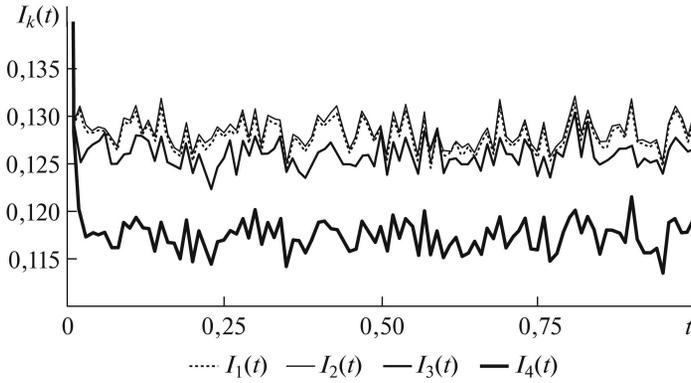


Рис. 3. Критерий точности при использовании различных схем численной реализации: аддитивные шумы в наблюдениях.

С помощью метода имитационного моделирования по пучку траекторий были вычислены выборочные значения критерия качества

$$I(t) \triangleq \mathbb{E} \left\{ \|\hat{X}_t - X_t\|_1 \right\}$$

для различных численных реализаций аналитических аппроксимаций:

$$I_k(t) \triangleq \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \|\tilde{X}_t^{s,k} - X_t^s\|_1,$$

где X_t^s – значение s -й траектории состояния в момент времени t , $\tilde{X}_t^{s,k}$ – значение s -й траектории аппроксимации оценки, полученной применением k -й схемы реализации, в момент времени t . В данном эксперименте были вычислены характеристики точности следующих схем:

- $I_1(t)$ – простая схема дискретизации стохастической дифференциальной системы наблюдения (порядок точности $\frac{1}{2}$),
- $I_2(t)$ – простая схема «левых» прямоугольников (порядок точности $\frac{1}{2}$),
- $I_3(t)$ – простая схема «средних» прямоугольников (порядок точности 1),
- $I_4(t)$ – простая схема квадратур Гаусса (порядок точности 2).

Их графики представлены на рис. 3. Полученные результаты вполне соответствуют теоретическим выкладкам. Характеристики $I_1(t)$ и $I_2(t)$ сопоставимы между собой, так как соответствуют численным реализациям одного порядка точности. Характеристика $I_3(t)$ меньше $I_1(t)$ и $I_2(t)$, так как порядок ее точности выше на $\frac{1}{2}$. Характеристика $I_4(t)$ значительно меньше $I_3(t)$, так как порядок ее точности выше на 1.

Примечательно, что для порядка $s = 1$ был проведен дополнительный расчет с использованием схемы адаптивного вычисления интеграла (2.15). Результат ее использования оказался визуально не отличимым от результата метода «средних» прямоугольников. При этом время вычисления оценок с использованием схемы адаптивного интегрирования значительно возросло.

5.2. Сравнительный анализ схем фильтрации по наблюдениям с мультипликативными шумами

Для сравнительного анализа различных численных реализаций алгоритма фильтрации использовалась система наблюдения (2.1), (2.2) со следующими характеристиками:

$$t \in [0, 1], \quad N = 3, \quad h = 0,05, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -10,0 & 2,0 & 8,0 \\ 8,0 & -10,0 & 2,0 \\ 2,0 & 8,0 & -10,0 \end{bmatrix},$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0,333 \\ 0,333 \\ 0,334 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} g_1 = 1,0, \\ g_2 = 2,0, \\ g_3 = 3,0, \end{matrix}$$

объем пучка траекторий для метода Монте-Карло 100000.

На рис. 4 и 5 представлены графики $Q^{1,2}(y, u)$ и $Q^{1,3}(y, u)$ интеграндов в (2.15) как функций аргумента u для некоторых фиксированных значений y .

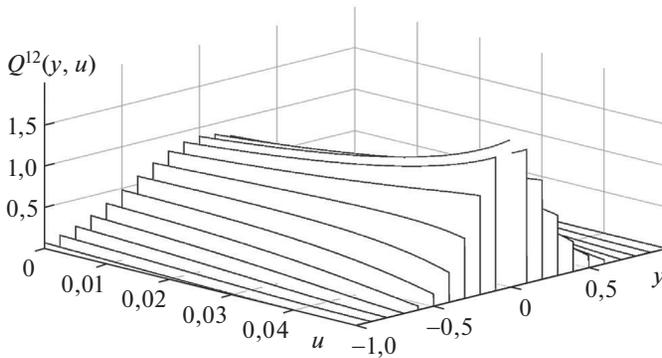


Рис. 4. Графики функции $Q^{1,2}(y, u)$ при некоторых фиксированных y : мультипликативные шумы в наблюдениях.

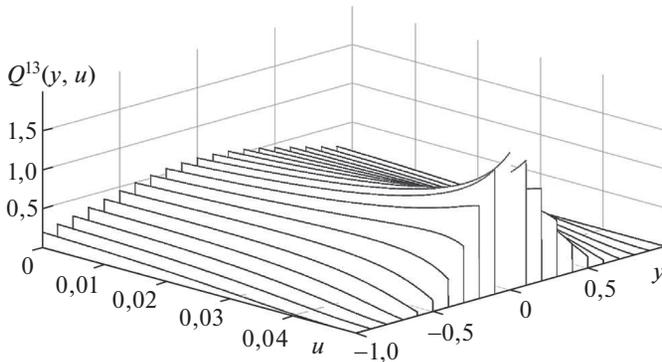


Рис. 5. Графики функции $Q^{1,3}(y, u)$ при некоторых фиксированных y мультипликативные шумы в наблюдениях.

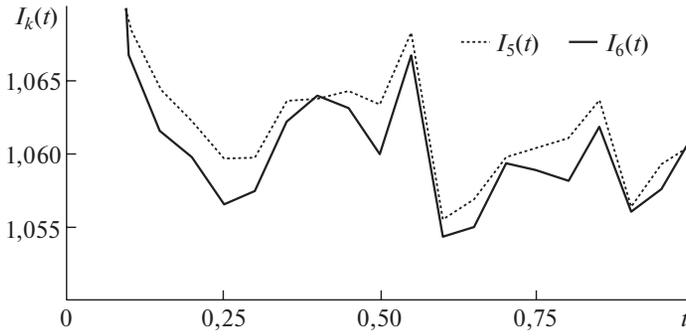


Рис. 6. Критерий точности при использовании различных схем численной реализации: мультипликативные шумы в наблюдениях.

Методом Монте-Карло были вычислены выборочные значения критерия качества $I(t)$ для следующих численных схем:

- $I_5(t)$ – составная схема «средних» прямоугольников (порядок точности 1),
- $I_6(t)$ – составная схема средних (порядок точности 2).

Их графики приведены на рис. 6. Полученные результаты соответствуют теоретическим выкладкам. Величина $I_6(t)$ меньше $I_5(t)$, так как порядок ее точности выше.

6. Заключение

Таблица содержит сводную информацию о порядке точности различных схем численных реализаций оценок фильтрации в зависимости от вида шума в наблюдениях: аддитивного или мультипликативного. Первое значение в ячейке означает порядок аналитической аппроксимации, второе – итоговый порядок точности, обеспечиваемый выбранной схемой численной реализации. Значение, взятое в скобки, означает, что детальный вывод итогового порядка в данной работе не приведен.

Анализируя данные в таблице, можно прийти к следующим заключениям.

В случае фильтрации с наблюдениями общего вида (снос в наблюдениях – ненулевой, матрицы интенсивности шумов – неодинаковы для разных состояний МСП) следует применять составные схемы вычисления интегралов. При этом схема должна быть наиболее экономичной с вычислительной

Порядок точности различных схем реализации

Вид шума	Диск-ция сист.		«Лев.» пр-ки		«Сред.» пр-ки		Кв. Гаусса	
	Прост.		Прост.		Прост.		Прост.	
Аддитив. шум	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	2	2
Мультиплик. шум	Прост.	Сост.	Прост.	Сост.	Прост.	Сост.	Прост.	Сост.
	1 0	1 (1)	1 (0)	1 (1)	1 0	1 1	1 (0)	1 (2)
	–	–	–	–	1 (0)	2 2	–	–

точки зрения, а требуемая точность должна достигаться путем выбора подходящего дробного шага интегрирования, меньшего, чем шаг дискретизации по времени. В качестве такой схемы предлагается выбрать метод «средних» прямоугольников.

Судя по результатам численных экспериментов, при малых шагах дискретизации по времени, когда полученные асимптотические оценки порядка точности имеют место, разница в применении аналитической аппроксимации того или иного порядка незначительна. Поэтому выбор пары «порядок аналитической аппроксимации–численная схема» должен проводиться индивидуально для каждой конкретной задачи. В итоге должен быть достигнут компромисс между требованиями к точности получаемых оценок и к ограничениям на имеющиеся вычислительные ресурсы.

Построение алгоритмов численного решения задачи фильтрации марковских процессов по непрерывным наблюдениям с аддитивными/мультипликативными шумами нельзя считать законченным. Во-первых, при выводе порядка точности численных реализаций использовались достаточно консервативные неравенства – оценки сверху. Именно они привели к пессимистическому выводу о невозможности использования *простых* (несоставных) схем численного интегрирования для обработки наблюдений с мультипликативными шумами. Использование более «тонких» неравенств, возможно, позволит уточнить порядки точности тех или иных схем интегрирования. Во-вторых, полученные результаты делают возможным разработку численных методов решения задач фильтрации по непрерывным наблюдениям состояний марковских процессов более общего вида: общих МСП, диффузионных процессов и пр. В-третьих, открытым остается вопрос о величине расхождения оценок фильтрации по непрерывным и по дискретизованным наблюдениям. Все эти проблемы представляются перспективными для дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Первый сомножитель в (3.10) представляет собой вес ϱ^{kj} , при этом число точек в интегральной сумме $L = 1$. Из свойств матрицы интенсивности следует, что $\mathfrak{W} = \sum_{j=1}^N \varrho^{kj} = 1$. Далее в изложении будем использовать следующие обозначения: $\gamma^{kj}(y) \triangleq \psi^{kj}(y) - \xi^{kj}(y)$, $\gamma(y) \triangleq \|\gamma^{kj}(y)\|_{k,j=\overline{1,N}}$. Разность $\gamma^{kj}(y)$ с учетом того, что $g_k \equiv g$, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \gamma^{kj}(y) = & \delta_{kj} \left(1 + \lambda_{jj}h - e^{\lambda_{jj}h} \right) \mathcal{N}(y, hf^j, hg) + \\ & + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj}h \left(1 - e^{\lambda_{jj}h} \right) \mathcal{N}(y, hf^j, hg) + \\ & + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj}h} \underbrace{\left(h \mathcal{N}(y, hf^j, hg) - \int_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, uf^k + (h-u)f^j, hg) du \right)}_{\triangleq \mathfrak{J}^{kj}(y)}. \end{aligned}$$

Оценим сверху интеграл в правой части (2.11) с использованием формулы Тейлора первого и второго порядков:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy &\leq \delta_{kj} \left(1 + \lambda_{jj} h - e^{\lambda_{jj} h}\right) + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h \left(1 - e^{\lambda_{jj} h}\right) + \\
 (II.1) \quad &+ (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \int_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{J}^{kj}(y)| dy \leq \\
 &\leq K_1 h^2 + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \int_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{J}^{kj}(y)| dy
 \end{aligned}$$

для некоторой константы $K_1 > 0$. Разность $\mathcal{J}^{kj}(y)$ представляет собой ошибку численного интегрирования при использовании простой схемы «левых» прямоугольников и определяется следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^{kj}(y) &= \frac{h^2}{2} \frac{d}{du} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N} \left(y, u f^k + (h - u) f^j, hg \right) \right] \Big|_{u=z} = \\
 &= \frac{h^2}{2} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})z} \mathcal{N} \left(y, z f^k + (h - z) f^j, hg \right) \zeta_0(y, z),
 \end{aligned}$$

где $z = z(y) \in [0, h]$ – некоторый параметр, зависящий от y , и

$$(II.2) \quad \zeta_0(z) \triangleq \lambda_{kk} - \lambda_{jj} + \langle f^j, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}} - \frac{z}{h} \|f^k - f^j\|_{g^{-1}}^2 + \frac{1}{h} \langle y, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}}.$$

Непосредственно интегрировать абсолютную величину \mathcal{J}^{kj} проблематично, так как $\int_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{J}^{kj}(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{J}^{kj}(y, z^{kj}(y))| dy$, а зависимость $z^{kj}(y)$ в общем случае неизвестна. Поэтому предварительно оценим $|\mathcal{J}^{kj}|$ сверху. Прежде всего, можно непосредственно проверить истинность неравенства

$$\begin{aligned}
 (II.3) \quad &\left\| y - z^{kj} f^k - (h - z^{kj}) f^j \right\|_{(hg)^{-1}}^2 \geq \\
 &\geq \|y\|_{(2hg)^{-1}}^2 - \left\| z^{kj} f^k + (h - z^{kj}) f^j \right\|_{(hg)^{-1}}^2.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 (II.4) \quad &\frac{h^2}{2} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})z} \mathcal{N} \left(y, z^{kj} f^k + (h - z^{kj}) f^j, hg \right) = \\
 &= \frac{h^2}{2} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})z} (2\pi)^{-M/2} |hg|^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\| y - z^{kj} f^k - (h - z^{kj}) f^j \right\|_{(hg)^{-1}}^2 \right) \leq \\
 &\leq \frac{h^2}{2} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})z} (2\pi)^{-M/2} |hg|^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \|y\|_{(2hg)^{-1}}^2 \right) \times \\
 &\times \exp \left(\frac{1}{2} \left\| z^{kj} f^k + (h - z^{kj}) f^j \right\|_{(hg)^{-1}}^2 \right) \leq h^2 K_2 \mathcal{N}(y, 0, 2hg),
 \end{aligned}$$

где $K_2 > 0$ – некоторая константа. Тогда

$$\begin{aligned}
(\text{П.5}) \quad & \int_{\mathbb{R}^M} |J^{kj}(y)| dy \leq K_2 h^2 \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{N}(y, 0, 2hg) |\zeta_0(y, z)| dy \leq \\
& \leq K_2 h^2 \int_{\mathbb{R}^M} \left| \lambda_{kk} - \lambda_{jj} + \langle f^j, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}} - \frac{z}{h} \left\| f^k - f^j \right\|_{g^{-1}}^2 \right| \mathcal{N}(y, 0, 2hg) dy + \\
& \quad + K_2 h^2 \int_{\mathbb{R}^M} \left| \frac{1}{h} \langle y, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}} \right| \mathcal{N}(y, 0, 2hg) dy = \\
& = K_2 h^2 \int_{\mathbb{R}^M} \left| \lambda_{kk} - \lambda_{jj} + \langle f^j, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}} - \frac{z}{h} \left\| f^k - f^j \right\|_{g^{-1}}^2 \right| \mathcal{N}(y, 0, 2hg) dy + \\
& \quad + \sqrt{2} K_2 h^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^M} \left| \frac{1}{h} \langle y, g^{-\frac{1}{2}}(f^k - f^j) \rangle \right| \mathcal{N}(y, 0, I) dy = K_3 h^2 + K_4 h^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

для некоторых неотрицательных констант K_3 и K_4 . Подставим эти неравенства в оценку интеграла абсолютной величины γ^{kj} :

$$\int_{\mathbb{R}^M} \left| \gamma^{kj}(y) \right| dy \leq K_1 h^2 + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \left(K_3 h^2 + K_4 h^{\frac{3}{2}} \right) \leq K_5 h^{\frac{3}{2}}$$

с некоторой константой $K_5 > 0$. Условие (2.11) в этом случае приобретает форму

$$\max_{k=1, N} \sum_{j=1, N} \int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy \leq N K_5 h^{\frac{3}{2}},$$

а неравенство (2.13), характеризующее разницу условного распределения $\hat{x}_{T/h}$ и его аппроксимации первого порядка, реализованной с помощью дискретизации дифференциальной системы наблюдения, имеет вид

$$(\text{П.6}) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{X}_{T/h} - \hat{X}_{T/h}\|_1 \right\} \leq 2T \left(\bar{\lambda}^2 h + N K_5 h^{\frac{1}{2}} \right) \leq C h^{\frac{1}{2}}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Оценим сначала величину \mathfrak{W} , предполагая для простоты, что $\lambda_{jj} \neq \lambda_{kk}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{W} & = e^{\lambda_{kk} h} + \sum_{j:j \neq k} \varrho^{kj} \leq \\
& \leq 1 + \lambda_{kk} h + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + K_6 h^3 + \sum_{j:j \neq k} \lambda_{kj} \frac{\lambda_{jj} h + \frac{\lambda_{jj}^2 h^2}{2} - \lambda_{kk} h - \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + K_7 h^3}{\lambda_{jj} - \lambda_{kk}} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + \sum_{j:j \neq k} \lambda_{kj} h^2 \frac{\lambda_{jj}^2 - \lambda_{kk}^2}{2(\lambda_{jj} - \lambda_{kk})} + K_8 h^3 = \\
&= 1 + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + \sum_{j:j \neq k} \frac{h^2 \lambda_{kj} (\lambda_{jj} + \lambda_{kk})}{2} + K_8 h^3 = \\
&= 1 + \sum_{j:j \neq k} \frac{h^2 \lambda_{kj} \lambda_{jj}}{2} + K_8 h^3 \leq 1
\end{aligned}$$

для достаточно малых h и некоторых положительных констант K_6 , K_7 , и K_8 . Аналогичным образом можно показать, что $\mathfrak{W} \leq 1$ и при $\lambda_{kk} = \lambda_{jj}$. Далее, определим отклонение схемы (3.13) от эталона (3.8), учитывая, что $g_j \equiv g$:

$$\begin{aligned}
&\gamma^{kj}(y) = \psi^{kj}(y) - \xi^{kj}(y) = \\
&= (1 - \delta_{kj}) \left(\varrho^{kj} \mathcal{N}(y, h f^j, hg) - \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \int_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (h-u) f^j, hg) du \right) = \\
&= (1 - \delta_{kj}) \left(\varrho^{kj} - \lambda_{kj} h e^{\lambda_{jj} h} \right) \mathcal{N}(y, h f^j, hg) + \\
&+ (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \left(h \mathcal{N}(y, h f^j, hg) - \int_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (h-u) f^j, hg) du \right) = \\
&= (1 - \delta_{kj}) \left(\varrho^{kj} - \lambda_{kj} h e^{\lambda_{jj} h} \right) \mathcal{N}(y, h f^j, hg) + \\
&+ (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^2}{2} e^{\lambda_{jj} h} \frac{d}{du} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (h-u) f^j, hg) \right] \Big|_{u=z},
\end{aligned}$$

где $z = z(y) \in [0, h]$ – некоторый параметр, зависящий от y , и $\zeta_0(z)$ определено (П.2). Полностью повторяя выкладки (П.3)–(П.5), можно убедиться в справедливости неравенства (П.8) для схемы «левых» прямоугольников, которая также имеет порядок глобальной точности $\frac{1}{2}$. Следствие 1 доказано.

Доказательство леммы 2. Проверим для (3.14) выполнение условия (2.9), используя формулу Тейлора второго порядка и свойства матрицы интенсивности переходов Λ :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{W} &= \sum_{j,\ell} \varrho_\ell^{kj} = \sum_{j=1}^N \delta_{kj} e^{\lambda_{kk} h} + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h e^{\frac{(\lambda_{kk} + \lambda_{jj})h}{2}} = \\
&= 1 + \lambda_{kk} h + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + C_{kk}(h) h^3 + \sum_{j:j \neq k} \lambda_{kj} h \left(1 + \lambda_{kj} h + \frac{\lambda_{kj}^2 h^2}{2} + C_{kj}(h) h^3 \right) = \\
&= 1 + \frac{h^2}{2} \sum_{j:j \neq k} \lambda_{kj} \lambda_{jj} + C(h) h^3.
\end{aligned}$$

Здесь все функции $\{C_{kj}\}_{k,j}$ ограничены сверху константой $\frac{\max_k |\lambda_{kk}|^3}{6}$. Так как $\sum_{j:j \neq k}^N \lambda_{kj} \lambda_{jj} \leq 0$, то при достаточно малых h условие (2.9) выполнено: $\mathfrak{W} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \gamma^{kj}(y) &= (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^3}{24} e^{\lambda_{jj} h} \frac{d^2}{du^2} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (h - u) f^j, hg) \right] \Big|_{u=z} = \\ &= (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^2}{2} e^{\lambda_{jj} h} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})z} \mathcal{N}(y, z f^k + (h - z) f^j, hg) \left[\zeta_0^2(y, z) - \zeta_1 \right], \end{aligned}$$

где вновь $z = z(y) \in [0, h]$ – некоторый параметр, зависящий от y , а

$$(II.7) \quad \zeta_1(z) \triangleq \frac{\partial}{\partial z} \zeta_0(z) = \frac{1}{h} \|f^j - f^k\|_g^2.$$

Выполняя выкладки, аналогичные (II.3)–(II.5), можно получить вариант условия (2.11) $\max_{k=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy \leq NK_9 h^2$ и неравенства (2.13)

$$(II.8) \quad \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leq 2T \left(\bar{\lambda}^2 h + NK_{10} h \right) \leq CTh$$

для схемы интегрирования простых «средних» прямоугольников. В двух последних неравенствах K_9 , K_{10} и C – некоторые положительные константы. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Выполнение условия (2.9) доказывается аналогично, как и в леммах 1 и 2. Согласно [2] и с учетом того, что $g_n \equiv g$, абсолютные значения ошибок ограничены следующим образом:

$$(II.9) \quad |\epsilon_1(y)| \leq h^5 K_{11} \max_{u \in [0, h]} \left| \frac{\partial^4}{\partial u^4} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (h - u) f^j, hg) \right] \right|,$$

$$(II.10) \quad \begin{aligned} &|\epsilon_2(y)| \leq \\ &\leq h^5 K_{12} \max_{\substack{(u,v) \in \mathcal{D}, \\ k=0,3}} \left| \frac{\partial^3}{\partial u^k \partial v^{3-k}} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{ii})u + (\lambda_{ii} - \lambda_{jj})v} \mathcal{N}(y, u f^k + v f^i + (h - u - v) f^j, hg) \right] \right|, \end{aligned}$$

где K_{11} и K_{12} – некоторые положительные константы.

Производная в (II.9) имеет вид

$$(II.11) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^4}{\partial u^4} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (h - u) f^j, hg) \right] = \\ &= e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (h - u) f^j, hg) \left(\zeta_0^4(u) + 6\zeta_0^2(u) \zeta_1(u) + 3\zeta_1^2(u) \right), \end{aligned}$$

где ζ_0 и ζ_1 определены (II.2) и (II.7). Строя оценки сверху интеграла от абсолютного значения $e_1(y)$ подобно (II.5), можно получить неравенство $\int_{\mathbb{R}^M} |e_1(y)| dy \leq K_{13} h^3$, и аналогичная оценка для $|e_2(y)|$ имеет вид $\int_{\mathbb{R}^M} |e_2(y)| dy \leq K_{14} h^3$ для некоторых неотрицательных констант K_{13} и K_{14} . В этом случае неравенство (2.13) принимает вид $\sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leq CTh^2$ для некоторой константы $C > 0$ и достаточно малого шага h . Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Сначала исследуем характеристики точности интегрирования простой схемы «средних» прямоугольников (т.е. $\alpha = 0$), а затем сделаем выводы на случай составного варианта данной схемы. Итак, с учетом того, что $f^j \equiv 0$,

$$\psi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}(y, 0, hg_j) + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h Q^{kj} \left(y, \frac{h}{2} \right).$$

При этом разность $\gamma^{kj}(y) = \psi^{kj}(y) - \xi^{kj}(y)$ представима в виде

$$\gamma^{kj}(y) = (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \left[Q^{kj} \left(y, \frac{h}{2} \right) - \int_0^h Q^{kj}(y, u) du \right],$$

и согласно [2] для нее верно следующее равенство

$$\begin{aligned} \gamma^{kj}(y) &= (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^3 e^{\lambda_{jj} h}}{24} \frac{\partial^2}{\partial u^2} Q^{kj}(y, u) \Big|_{u=z} = \\ &= (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^3 e^{\lambda_{jj} h}}{24} Q^{kj}(y, z) [\eta_0^2(y, z) - \eta_1(y, z)], \end{aligned}$$

где $z = z(y) \in [0, h]$ – параметр, зависящий от y ,

$$\begin{aligned} \eta_0(y, z) &\triangleq \lambda_{kk} - \lambda_{jj} - \frac{\frac{d}{dz} |zg_k + (h-z)g_j|}{2|zg_k + (h-z)g_j|} + \\ \text{(II.12)} \quad &+ \frac{1}{2} y^\top [zg_k + (h-z)g_j]^{-1} (g_k - g_j) [zg_k + (h-z)g_j]^{-1} y \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{(II.13)} \quad \eta_1(y, z) &\triangleq \\ &\triangleq \frac{|zg_k + (h-z)g_j| \frac{d^2}{dz^2} |zg_k + (h-z)g_j| - \left(\frac{d}{dz} |zg_k + (h-z)g_j| \right)^2}{2|zg_k + (h-z)g_j|^2} + \\ &+ y^\top [zg_k + (h-z)g_j]^{-1} (g_k - g_j) [zg_k + (h-z)g_j]^{-1} (g_k - g_j) [zg_k + (h-z)g_j]^{-1} y. \end{aligned}$$

Предварительно оценим $|\gamma^{kj}|$ сверху. Свойства системы (2.2) гарантируют, что существуют такие симметрические матрицы g и G , что $0 < g \leq g_n \leq G$ для всех $n = \overline{1, N}$. Поэтому выполняется неравенство

$$\text{(II.14)} \quad Q^{kj}(y, u) \leq K_{15} \mathcal{N}(y, 0, hg),$$

где

$$K_{15} = \frac{|G|}{|g|} \max_{\substack{k, j = \overline{1, N}: k \neq j \\ u \in [0, h]}} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u}.$$

Из свойства определителей [5] следует, что

$$(II.15) \quad |zg_k + (h - z)g_j| = |z(g_k - g_j) + hg_j| = \sum_{n=0}^N z^n h^{N-n} G_{kjn},$$

где G_{kjn} – сумма всех определителей матриц, полученных из $u(g_k - g_j)$ путем замены n столбцов соответствующими столбцами hg_j . Отсюда следует, что

$$(II.16) \quad \frac{d}{dz} |zg_k + (h - z)g_j| = \sum_{n=1}^N n z^{n-1} h^{N-n} G_{kjn}.$$

Поэтому верно неравенство

$$\left| \frac{\frac{d}{dz} |zg_k + (h - z)g_j|}{2|zg_k + (h - z)g_j|} \right| = h^{-1} \left| \frac{\sum_{n=1}^N n \left(\frac{u}{h}\right)^{n-1} G_{kjn}}{\sum_{m=0}^N \left(\frac{u}{h}\right)^m G_{kjm}} \right| \leq \frac{K_{16}}{h}$$

для $K_{16} = \max_{\substack{k,j=1,N \\ k \neq j}} \frac{\sum_{n=1}^N n |G_{kjn}|}{2 \min_{w \in [0,1]} \left| \sum_{m=0}^N G_{kjm} w^m \right|}$. Таким образом, для $|\eta_0|$ верна следующая оценка сверху:

$$(II.17) \quad |\eta_0| \leq K_{17} + \frac{K_{16}}{h} + \frac{K_{18}}{h^2} \|y\|_I^2,$$

где $K_{17} = \max_{\substack{k,j=1,N \\ k \neq j}} |\lambda_{kk} - \lambda_{jj}|$, $K_{18} = \|g^{-1} G g^{-1}\|_2^2$ – квадрат спектральной нормы матрицы. Заметим также, что $\int_{\mathbb{R}^M} \|y\|_I^2 \mathcal{N}(y, 0, hg) dy = \text{htr}(g)$.

Из (II.17) следует оценка сверху для квадрата ζ_0 :

$$(II.18) \quad \eta_0^2(y, u) \leq K_{21} + \frac{K_{22}}{h^2} (1 + \|y\|_I^2) + \frac{K_{23}}{h^3} \|y\|_I^2 + \frac{K_{24}}{h^4} \|y\|_I^4$$

с некоторыми положительными константами K_{21} , K_{22} , K_{23} и K_{24} . Используя (II.15) и (II.16), можно получить оценку абсолютного значения первого слагаемого в $\zeta_1(y, u)$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{|zg_k + (h - z)g_j| \frac{d^2}{dz^2} |zg_k + (h - z)g_j| - \left(\frac{d}{dz} |zg_k + (h - z)g_j|\right)^2}{2|zg_k + (h - z)g_j|^2} \right| = \\ & = \left| \frac{\sum_{n=0}^N z^n h^{N-n} G_{kjn} \sum_{m=2}^N m(m-1) z^{m-2} h^{N-m} G_{kjm} - \left(\sum_{\ell=1}^N \ell z^{\ell-1} h^{N-\ell} G_{kjl}\right)^2}{2 \left(\sum_{s=0}^N z^s h^{N-s} G_{kjs}\right)^2} \right| = \\ & = \frac{1}{h^2} \left| \frac{\sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{h}\right)^n G_{kjn} \sum_{m=2}^N m(m-1) \left(\frac{z}{h}\right)^{m-2} G_{kjm} - \left(\sum_{\ell=1}^N \ell \left(\frac{z}{h}\right)^{\ell-1} G_{kjl}\right)^2}{2 \left(\sum_{s=0}^N \left(\frac{z}{h}\right)^s G_{kjs}\right)^2} \right| \leq \frac{K_{25}}{h^2}, \end{aligned}$$

где $K_{25} = \max_{\substack{k,j=1,N: \\ k \neq j}} \frac{\sum_{n=0}^N |G_{kjn}| \sum_{m=2}^N m(m-1) |G_{kjm}| + (\sum_{\ell=1}^N \ell |G_{kj\ell}|)^2}{2 \min_{w \in [0,1]} (\sum_{s=0}^N w^s G_{kjs})^2}$. Абсолютное значение второго слагаемого в $\zeta_1(y, u)$ также оценивается сверху:

$$\begin{aligned} y^\top [z g_k + (h-z) g_j]^{-1} (g_k - g_j) [z g_k + (h-z) g_j]^{-1} (g_k - g_j) [z g_k + (h-z) g_j]^{-1} y &\leq \\ &\leq \frac{K_{26}}{h^3} \|y\|_I^2, \end{aligned}$$

где $K_{26} = 4 \|g^{-1} G g^{-1} G g^{-1}\|_2^2$.

Используя все эти неравенства и связь между моментами 2-го и 4-го порядков гауссовского распределения, получаем следующий вариант неравенства (2.11):

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy \leq K_{27} h + K_{28} h^2 + K_{29} h^3$$

для некоторых положительных констант K_{27} , K_{28} и K_{29} . Это значит, что $\int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy = O(h)$, и согласно (2.13) $\sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \{ \|\tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h}\|_1 \} = O(h^0)$.

Используем для приближенного вычисления ξ^{kj} составную схему «средних» прямоугольников, разбив отрезок интегрирования $[0, h]$ с шагом $h^{1+\alpha}$. В этом случае

$$\gamma^{kj}(y) = (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^{3+2\alpha} e^{\lambda_{jj} h}}{24} \frac{\partial^2}{\partial u^2} Q_{kj}(y, u) \Big|_{u=z}.$$

Повторяя все предыдущие выводы этого доказательства для составной схемы «средних» прямоугольников, можно проверить, что она обеспечивает порядок точности $1 + 2\alpha$:

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy \leq N C h^{1+2\alpha},$$

и согласно (2.13) глобальный показатель точности имеет порядок $p = \min(1, 2\alpha)$:

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{X}_{T/h} - \hat{X}_{T/h}\|_1 \right\} \leq C T h^p.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство следствия 2. Согласно (2.13) для сохранения второго порядка точности аналитической аппроксимации необходимо, чтобы локальная ошибка численного интегрирования на каждом шаге имела порядок не более $O(h^3)$. Составная схема «средних» прямоугольников, представленная в лемме 4, обеспечивает эту точность для вычисления одномерного интеграла – второго слагаемого в (3.16) – при выборе $\alpha = 1$.

Выберем подходящую схему вычисления двойных интегралов по треугольнику, входящих в третье слагаемое (3.16). Прежде всего, определим величину ошибки приближения интеграла в (2.16) простым методом средних:

$$\begin{aligned} \lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h \int_0^{h-u} R^{kij}(y, u, v)dvdu &= \frac{h^2}{2} \lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h} R^{kij} \left(y, \frac{h}{3}, \frac{h}{3} \right) + \\ &+ \lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h \int_0^{h-u} \chi_2^{kij}(y, u, v)dvdu, \end{aligned}$$

где функция $\chi_2^{kij}(y, u, v)$ имеет вид

$$\chi_2^{kij}(y, u, v) \triangleq \frac{1}{2} \left(\left(z - \frac{h}{3} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \left(w - \frac{h}{3} \right) \frac{\partial}{\partial w} \right)^2 R^{kij}(y, z, w) \Big|_{(z(y,u), w(y,v))}.$$

Согласно [2] для некоторой положительной константы K_{30} верно неравенство

$$\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h \int_0^{h-u} \chi_2^{kij}(y, u, v)dvdu \leq h^4 K_{30} \max_{\substack{\ell=0,1,2; \\ (z,w) \in \mathcal{D}}} \left| \frac{\partial^2}{\partial z^\ell \partial w^{2-\ell}} \chi_2^{kij}(y, z, w) \right|.$$

В лемме 4 также оценивалась вторая производная, однако, от другой функции, Q^{kj} . Она содержала h^2 в знаменателе. Сравнивая Q^{kj} и R^{kij} , можно заключить, что вторая производная от R^{kij} также будет содержать h^2 в знаменателе, т.е. $\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h \int_0^{h-u} \chi_2^{kij}(y, u, v)dvdu \leq h^2 K_{31}$ для некоторой положительной константы K_{31} . Так как требуемый порядок точности – третий, то последнее равенство позволяет сделать вывод о том, что простой метод средних в данном случае нужной точности не обеспечивает.

Используем для вычисления двойного интеграла составной метод средних, разбив область интегрирования, прямоугольный треугольник с катетами длины h , на подобные треугольники с катетами h^2 . В этом случае

$$\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h \int_0^{h-u} \chi_2^{kij}(y, u, v)dvdu \leq h^4 K_{32}$$

для некоторой положительной константы K_{32} , и отсюда согласно (2.13) следует выполнение неравенства

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \|\tilde{X}_{T/h} - \hat{X}_{T/h}\|_1 \right\} \leq CT h^2,$$

т.е. для численной реализации аппроксимации порядка $s = 2$ достаточно использования составных схем средних при вычислении одномерных и двойных интегралов с шагом дискретизации h^2 .

Следствие 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В.* \mathcal{L}_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I: точное решение и численные схемы реализации // *АиТ.* 2020. № 11. С. 12–34.
Borisov A. V. \mathcal{L}_1 -Optimal Filtering of Markov Jump Processes I: Exact Solution and Numerical Realization Schemes // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 11.
2. *Isaacson E., Keller H.* Analysis of Numerical Methods. N.Y.: Dover Publications, 1994.
3. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
4. *Kloeden P., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer, 1992.
5. *Magnus J., Neudecker H.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. N.Y.: Wiley, 2019.
6. *Борисов А.В.* Фильтрация Вонэма по наблюдениям с мультипликативными шумами // *АиТ.* 2018. № 1. С. 52–65.
Borisov A. V. Wonham filtering by observations with multiplicative noises // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 1. P. 39–50.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 25.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020