

© 2020 г. А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук (alexei.ignatov1@gmail.com)  
(Московский авиационный институт)

## О ФОРМИРОВАНИИ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В МНОГОШАГОВОЙ ЗАДАЧЕ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ<sup>1</sup>

Исследуется многошаговая задача портфельной оптимизации. Рассматривается возможность вложения капитала на каждом шаге в безрисковый актив с фиксированной доходностью и рисковый актив со случайной доходностью с финитной плотностью. Критерием оптимальности выступает вероятность достижения или превышения капитала инвестора в терминальный момент времени некоторого заранее заданного уровня. На основе использования кусочно-постоянного управления предлагается позиционное управление, которое на обширном наборе примеров превосходит по значению вероятностного критерия ранее известные универсальные управления, применяющиеся в задачах портфельной оптимизации.

*Ключевые слова:* многошаговая задача, портфельная оптимизация, вероятностный критерий, позиционное управление.

DOI: 10.31857/S000523102012003X

### 1. Введение

Исторически исследование задач портфельной оптимизации началось в 1950-х гг. с конструирования различных критериев и мер риска в одношаговой постановке, когда портфель ценных бумаг не предполагается к ребалансировке в течение инвестиционного горизонта. Хотя в настоящее время также продолжают поиски новых мер риска и постановок задач, позволяющих сформировать тот или иной портфель ценных бумаг, особый интерес исследователей привлекают многошаговые задачи портфельной оптимизации, в которых в течение инвестиционного горизонта предполагается несколько ребалансировок.

За рубежом исследования многошаговых задач портфельной оптимизации проводятся, как правило, с использованием математического ожидания от некоторой целевой функции в качестве критерия. Так, в [1] в качестве критерия использовалась взвешенная дисперсия, а именно сумма дисперсий капиталов, вкладываемых в произвольное число активов, в каждый момент времени инвестиционного горизонта с некоторыми заданными весами; средний капитал в терминальный момент времени должен быть выше некоторой заданной отметки. Априорно выбранные управления, зависящие от момента времени, корректировались линейно в зависимости от того, насколько реализация доходностей в прошлый момент времени отличается от средних

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-37-70022 Стабильность).

доходностей. В [2] было найдено оптимальное аналитическое решение при использовании экспоненциальной функции полезности, а доходности подчинялись авторегрессии первого порядка с гауссовским белым шумом. А в [3] предлагались процедуры поиска оптимального управления для различных функций полезности, в том числе логарифмической и степенной. В [4] рассматривалась многошаговая задача с критерием в виде суммы сверток среднего дохода, дисперсии дохода, а также транзакционных издержек в каждый момент ребалансировки с управлениями, выбираемыми в классе программных стратегий: для некоторых частных случаев транзакционных издержек находились оптимальные стратегии или устанавливались их свойства.

В России авторы фокусируются, как правило, на вероятностном или квантильном критериях для формирования портфеля ценных бумаг. Для нахождения оптимального позиционного управления в таких задачах используют соотношения метода динамического программирования [5]. В силу трудоемкости нахождения аналитических выражений функций Беллмана получение оптимального решения возможно лишь в очень ограниченном числе случаев: в [6] рассматривалась двухшаговая задача с вероятностным критерием, в которой на каждом шаге был один актив, имеющий нулевую дисперсию доходности, так называемый безрисковый, и один рисковый актив, имеющий равномерное на отрезке  $[-1, A]$  распределение доходности; в [7] рассматривалась двухшаговая задача с вероятностным критерием, в которой на каждом шаге был один рисковый актив с равномерным распределением на отрезке  $[-1, A]$  доходности, а другой рисковый актив имел доходность, равномерно распределенную на отрезке  $[-1, B]$ . В связи с ограниченностью в возможности получения оптимального управления найден целый спектр приближенных к оптимальным управлений в задачах с различной постановкой. В [8] на основе доверительного метода было найдено приближенное решение в двухшаговой задаче с квантильным критерием, одним безрисковым активом и одним рисковым, имеющим усеченное нормальное распределение доходности активом на каждом шаге. В [9] также на основе доверительного метода был предложен алгоритм получения приближенного управления в многошаговой задаче с квантильным критерием, одним безрисковым и одним рисковым активом, имеющим плотность доходности с носителем  $[-1, A]$  со специальными ограничениями на форму плотности, на каждом шаге. В [10] на основе использования кусочно-постоянного управления был предложен алгоритм нахождения приближенного управления в двухшаговой задаче с вероятностным критерием и произвольным количеством рисковых активов с произвольным финитным распределением на каждом шаге. С использованием полученных в [11] оценок функций Беллмана в [12] обосновывалось использование так называемый рисковой стратегии, оказавшейся асимптотически оптимальной в многошаговой задаче с вероятностным критерием. В [13] предлагалось построенное на основе оптимального решения из [6] приближенное управление в многошаговой задаче с вероятностным критерием, одним безрисковым активом и одним рисковым активом, имеющим равномерное на отрезке  $[-1, A]$  распределение доходности. Таким образом, разработка универсального алгоритма поиска приближенного к оптимальному решения в многошаговой

задаче с вероятностным критерием является крайне актуальной задачей и составляет предмет настоящей статьи.

В настоящей работе исследуется многошаговая задача портфельной оптимизации с одним безрисковым активом и одним рисковым активом, имеющим финитную плотность доходности, на каждом шаге. Для формирования управления используется вероятностный критерий. С использованием формулы полной вероятности и выбора управления в классе кусочно-постоянных управлений предлагается приближенное к оптимальному позиционному управлению. Рассматривается содержательный пример, в котором проводится исследование различных стратегий и демонстрируется преимущество предлагаемого управления над известными универсальными управлениями.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим многошаговую задачу портфельной оптимизации с безрисковым активом, имеющим детерминированную доходность  $b_0$ , и одним рисковым активом (например, некоторой акцией или фондовым индексом в целом), имеющим на  $t$ -м шаге случайную доходность  $X_t$ ,  $t = \overline{1, T}$ , где  $T$  – количество шагов, причем  $T \in \{3, 4, \dots\}$ . Будем предполагать, что случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_T$  являются независимыми в совокупности. Будем рассматривать абсолютно непрерывные случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_T$ , имеющие финитный носитель, т.е.

$$\begin{aligned} \inf \{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_t}(x) > 0\} &= a_t, \quad t = \overline{1, T}, \\ \sup \{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_t}(x) < 1\} &= b_t, \quad t = \overline{1, T}, \end{aligned}$$

где  $a_t$  и  $b_t$  – некоторые числа. При этом  $\forall t \in \{1, \dots, T\}$  должно выполняться  $-1 \leq a_t < b_0 < b_t$ . Неравенства  $-1 \leq a_t$  должны быть выполнены, поскольку цена продажи актива не может быть отрицательной, нарушение неравенств  $a_t < b_0$  приведет к тому, что на каком-то шаге/каких-то шагах использование безрискового актива бессмысленно в силу того, что минимальная доходность рисковом активе будет выше. Нарушение неравенств  $b_0 < b_t$  приведет к тому, что на каком-то шаге/каких-то шагах использование рисковом активе бесполезно, так как его максимальная доходность не превышает доходность безрискового актива. Пусть начальный капитал инвестора известен и составляет  $C_1$ . Пусть  $u_{0t}$  – доля капитала инвестора, вкладываемого в безрисковый актив на  $t$ -м шаге, а  $u_{1t}$  – доля капитала инвестора, вкладываемого в рисковом актив на  $t$ -м шаге. Будем предполагать, что операции «short-sales» невозможны, т.е. нельзя брать деньги в долг. С учетом данного ограничения значения вектора  $u_t \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(u_{0t}, u_{1t})$  выбираются из множества

$$U = \{(x, y)^T : x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

А динамика капитала инвестора описывается соотношением

$$(1) \quad C_{t+1} = C_t(1 + u_{0t}b_0 + u_{1t}X_t), \quad t = \overline{1, T},$$

где  $C_{t+1}$  – капитал по окончании  $t$ -го шага. Отметим, по постановке задачи капитал не может оказаться отрицательным.

Пусть  $\varphi$  – желаемый инвестором уровень капитала в терминальный момент времени. Очевидно, что в зависимости от выбранного управления – структуры инвестиционного портфеля – на каждом шаге вероятность достижения или превышения порога  $\varphi$  различна. Будем выбирать управление в классе позиционных стратегий, т.е.  $u_t = u_t(C_t)$ ,  $t = \overline{2, T}$ . Управление на первом шаге в силу известности  $C_1$  является программным. Целью управления портфелем ценных бумаг является максимизация вероятности достижения или превышения капиталом инвестора желаемого порога  $\varphi$ . Для этой цели зададим функционал вероятности

$$(2) \quad P_\varphi(u(\cdot)) = \mathcal{P}(C_{T+1}(u(\cdot), X) \geq \varphi),$$

где

$$X = \text{col}(X_1, X_2, \dots, X_T), \quad \text{a} \quad u(\cdot) = \text{col}(u_1, u_2(\cdot), \dots, u_T(\cdot)).$$

Поставим задачу

$$(3) \quad P_\varphi(u(\cdot)) \rightarrow \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}_2, \dots, u_T(\cdot) \in \mathcal{U}_T},$$

где  $\mathcal{U}_t$  – множество измеримых функций  $u_t(\cdot)$ , имеющих значения на множестве  $U$ . В силу того, что для непосредственного решения задачи (3) требуется проводить поиск в функциональном пространстве, задачу (3) решают с использованием метода динамического программирования Беллмана, предварительно проверяя измеримость и оптимальность получаемых стратегий с помощью ряда условий из [14]. Данные условия для рассматриваемой постановки задачи выполнены. Однако использование соотношений метода динамического программирования для вероятностного критерия практически невозможно в силу трудностей, возникающих в получении аналитического вида функций Беллмана. В этой связи в [10, 15] было предложено сузить класс допустимых управлений до класса кусочно-постоянных управлений. Воспользуемся этим подходом и здесь.

Вначале введем разбиение множества значений состояния системы (капитала инвестора)  $C_t$  к началу  $t$ -го шага,  $t = \overline{2, T}$ :

$$s_t = s_t^1 \cup s_t^2 \cup \dots \cup s_t^{n_t},$$

где

$$s_t^1 = [s_{t1}, s_{t2}), \quad s_t^2 = [s_{t2}, s_{t3}), \quad \dots, \quad s_t^{n_t-1} = [s_{tn_{t-1}}, s_{tn_t}), \quad s_t^{n_t} = [s_{tn_t}, s_{tn_{t+1}}],$$

где

$$s_{t1} = C_1 \prod_{k=1}^{t-1} (1 + a_k), \quad s_{tn_{t+1}} = C_1 \prod_{k=1}^{t-1} (1 + b_k),$$

$$s_{ti} = s_{t1} + (i - 1) \frac{s_{tn_{t+1}} - s_{t1}}{n_t}, \quad i = \overline{2, n_t}.$$

Отметим, что разбиение  $s_t$  может быть и другим, а равномерная длина промежутков  $s_t^i$  выбрана для простоты,  $t = \overline{2, T}$ ,  $i = \overline{1, n_t}$ .

Управление на каждом шаге за исключением первого, являющегося программным из-за известности  $C_1$ , будет иметь вид

$$u_t(C_t, s_t) = \begin{cases} (u_{0t}^1, u_{1t}^1)^T, & C_t \in s_t^1, \\ (u_{0t}^2, u_{1t}^2)^T, & C_t \in s_t^2, \\ \dots, \\ (u_{0t}^{n_t}, u_{1t}^{n_t})^T, & C_t \in s_t^{n_t}. \end{cases}$$

Введя обозначение

$$u_s(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_T(\cdot, s_T)),$$

сформулируем задачу поиска оптимального кусочно-постоянного управления

$$(4) \quad (u_1^\varphi, u_2^\varphi(\cdot, s_2), \dots, u_T^\varphi(\cdot, s_T)) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot, s_2) \in U, \dots, u_T(\cdot, s_T) \in U} P_\varphi(u_s(\cdot)).$$

### 3. Нахождение приближенного решения

Уже при  $T = 2$  поиск аналитического решения в задаче (4) затруднителен. Приходится строить [10, 15] нижнюю оценку функционала вероятности  $P_\varphi(u_s(\cdot))$  (функционала (2) в классе кусочно-постоянных управлений). Однако согласно [16] имеется сходимость максимального значения конструируемой в [10, 15] нижней оценки к значению вероятностного критерия на оптимальной позиционной стратегии при устремлении мелкости разбиения  $s_2$  к нулю. В этой связи воспользуемся аналогичным подходом и при решении многошаговой задачи.

На последнем шаге, следуя [15], имеем

$$(5) \quad \begin{aligned} P_\varphi(u_s(\cdot)) &= \sum_{i=1}^{n_T} \mathcal{P}(C_{T+1} \geq \varphi, C_T \in s_T^i) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{n_T} \mathcal{P}(s_{Ti}(1 + u_{0T}^i b_0 + u_{1T}^i X_T) \geq \varphi) \mathcal{P}(C_T \in s_T^i). \end{aligned}$$

Так как задача (4) – задача максимизации функционала вероятности  $P_\varphi(u_s(\cdot))$ , то полученную в (5) оценку также нужно максимизировать. По определению вероятности  $\mathcal{P}(C_T \in s_T^i) \geq 0$ , поэтому нужно решить задачи

$$(6) \quad P_{Ti}^* = \max_{(u_{0T}^i, u_{1T}^i)^T \in U} \mathcal{P}(s_{Ti}(1 + u_{0T}^i b_0 + u_{1T}^i X_T) \geq \varphi),$$

$$(7) \quad (\tilde{u}_{0T}^{i*}, \tilde{u}_{1T}^{i*})^T = \arg \max_{(u_{0T}^i, u_{1T}^i)^T \in U} \mathcal{P}(s_{Ti}(1 + u_{0T}^i b_0 + u_{1T}^i X_T) \geq \varphi),$$

$i = \overline{1, n_T}$ . Решение в задачах (6) и (7) найдено в [17] и имеет вид

$$P_{Ti}^* = \begin{cases} 1, & s_{Ti}(1 + b_0) \geq \varphi, \\ 1 - F_{X_T} \left( \frac{\varphi}{s_{Ti}} - 1 \right), & s_{Ti}(1 + b_0) < \varphi, \end{cases}$$

$$\tilde{u}_{1T}^{i*} = \begin{cases} 0, & s_{Ti}(1 + b_0) \geq \varphi, \\ 1, & s_{Ti}(1 + b_0) < \varphi, \end{cases}$$

$\tilde{u}_{0T}^{i*} = 1 - \tilde{u}_{1T}^{i*}$ ,  $i = \overline{1, n_T}$ . Составив вектор-функцию

$$(8) \quad \tilde{u}_T^\varphi(C_T, s_T) = \begin{cases} (\tilde{u}_{0T}^{1*}, \tilde{u}_{1T}^{1*})^T, & C_T \in s_T^1, \\ (\tilde{u}_{0T}^{2*}, \tilde{u}_{1T}^{2*})^T, & C_T \in s_T^2, \\ \dots, & \dots, \\ (\tilde{u}_{0T}^{n_T^*}, \tilde{u}_{1T}^{n_T^*})^T, & C_T \in s_T^{n_T}, \end{cases}$$

будем использовать ее как приближенное решение задачи (4) на последнем шаге, т.е. как приближение функции  $u_T^\varphi(\cdot, s_T)$ . С использованием коэффициентов  $P_{Ti}^*$  получим следующую нижнюю оценку максимального значения функционала вероятности  $P_\varphi(u_s(\cdot))$

$$(9) \quad P_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P}(C_T \in s_T^i).$$

Принимая в расчет формулу полной вероятности, получаем

$$\begin{aligned} & P_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) = \\ & = \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P_{Ti}^* \mathcal{P}(C_T \in s_T^i, C_{T-1} \in s_{T-1}^k) = \\ & = \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P_{Ti}^* \mathcal{P}(C_{T-1}(1 + u_{0T-1}^k b_0 + u_{1T-1}^k X_{T-1}) \in s_T^i, C_{T-1} \in s_{T-1}^k). \end{aligned}$$

К сожалению, получение нижней оценки последнего выражения приводит впоследствии к решению минимаксной задачи с нелинейной целевой функцией, поэтому ограничимся построением нового функционала  $\tilde{P}_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1}))$ , приближенно равного по значениям функционалу  $P_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1}))$ , т.е.

$$\begin{aligned} & P_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) \approx \\ & \approx \tilde{P}_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P_{Ti}^* \mathcal{P}(s_{T-1k}(1 + u_{0T-1}^k b_0 + u_{1T-1}^k X_{T-1}) \in s_T^i, C_{T-1} \in s_{T-1}^k). \end{aligned}$$

Учтя, что случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_{T-1}$  независимы, и поменяв порядок суммирования в последнем выражении, получим

$$\begin{aligned} & \tilde{P}_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) = \\ & = \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} (1 + u_{0T-1}^k b_0 + u_{1T-1}^k X_{T-1}) \in s_T^i \right) \mathcal{P} \left( C_{T-1} \in s_{T-1}^k \right) = \\ & = \sum_{k=1}^{n_{T-1}} \mathcal{P} \left( C_{T-1} \in s_{T-1}^k \right) \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} (1 + u_{0T-1}^k b_0 + u_{1T-1}^k X_{T-1}) \in s_T^i \right). \end{aligned}$$

Для нахождения приближенного решения задачи на предпоследнем шаге (4) максимизируем функционал

$$\tilde{P}_\varphi^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})).$$

Так как управления на различных шагах не зависят друг от друга, в силу конструкции множества  $U$  необходимо решить задачи

$$(10) \quad G_{T-1}^{k,s}(u_{1T-1}^k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} \left( 1 + \left( 1 - u_{1T-1}^k \right) b_0 + u_{1T-1}^k X_{T-1} \right) \in s_T^i \right) \rightarrow \max_{0 \leq u_{1T-1}^k \leq 1},$$

$k = \overline{1, n_{T-1}}$ . Имеет место равенство

$$G_{T-1}^{k,s}(u_{1T-1}^k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} (1 + b_0) \in s_T^i \right), & u_{1T-1}^k = 0, \\ \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} \left( 1 + \left( 1 - u_{1T-1}^k \right) b_0 + u_{1T-1}^k X_{T-1} \right) \in s_T^i \right), & u_{1T-1}^k > 0. \end{cases}$$

Поскольку последняя функция задается кусочно, на открытом множестве, то будем искать приближенное решение в задаче (10), сравнивая значение последней функции в точке  $u_{1T-1}^k = 0$  и максимальное значение последней функции на отрезке  $\varepsilon \leq u_{1T-1}^k \leq 1$ , где  $\varepsilon > 0$  – некоторое малое число. Таким образом, обозначив

$$\tilde{P}_{T-1}^k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} (1 + b_0) \in s_T^i \right),$$

$$\hat{P}_{T-1}^k \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\varepsilon \leq u_{1T-1}^k \leq 1} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} \left( 1 + \left( 1 - u_{1T-1}^k \right) b_0 + u_{1T-1}^k X_{T-1} \right) \in s_T^i \right),$$

в качестве приближенного решения в задаче (4), т.е. управления  $u_{T-1}^\varphi(\cdot, s_{T-1})$ , выберем

$$\tilde{u}_{T-1}^\varphi(C_{T-1}, s_{T-1}) = \begin{cases} (\tilde{u}_{0T-1}^{1*}, \tilde{u}_{1T-1}^{1*})^\top, & C_{T-1} \in s_{T-1}^1, \\ (\tilde{u}_{0T-1}^{2*}, \tilde{u}_{1T-1}^{2*})^\top, & C_{T-1} \in s_{T-1}^2, \\ \dots, \\ (\tilde{u}_{0T-1}^{n_{T-1}*}, \tilde{u}_{1T-1}^{n_{T-1}*})^\top, & C_{T-1} \in s_{T-1}^{n_{T-1}}, \end{cases}$$

где

$$\tilde{u}_{1T-1}^{k*} = \begin{cases} 0, & \tilde{P}_{T-1}^k \geq \hat{P}_{T-1}^k \text{ и } \tilde{P}_{T-1}^k \neq 0, \\ \arg \max_{\varepsilon \leq u_{1T-1}^k \leq 1} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^* \mathcal{P} \left( s_{T-1k} \left( 1 + b_0 + u_{1T-1}^k (X_{T-1} - b_0) \right) \in s_T^i \right), & \tilde{P}_{T-1}^k < \hat{P}_{T-1}^k, \\ 1, & \tilde{P}_{T-1}^k \geq \hat{P}_{T-1}^k \text{ и } \tilde{P}_{T-1}^k = 0, \end{cases}$$

$k = \overline{1, n_{T-1}}$ . Прокомментируем наличие единицы в  $\tilde{u}_{1T-1}^{k*}$ : равенство величин  $\tilde{P}_{T-1}^k, \hat{P}_{T-1}^k$  нулю означает, что функция  $G_{T-1}^{k,s}(u_{1T-1}^k)$  на множестве  $\{0\} \cup [\varepsilon, 1]$  тождественно равна нулю, так как по определению вероятности функция  $G_{T-1}^{k,s}(u_{1T-1}^k)$  неотрицательна. Это означает, что все управления одинаково плохи, а значит, можно выбрать наиболее рискованное.

Введя обозначение  $P_{T-1k}^* \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\tilde{P}_{T-1}^k, \hat{P}_{T-1}^k\}$ , получим следующую оценку максимального значения функционала вероятности  $P_\varphi(u_s(\cdot))$

$$(11) \quad P_\varphi^{T-2}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \dots, u_{T-2}(\cdot, s_{T-2})) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P_{T-1k}^* \mathcal{P} \left( C_{T-1} \in s_{T-1}^k \right).$$

Отметим, что структура функционалов (9) и (11) идентична. А значит, если двигаться в обратном времени, аналогично для шагов  $t = T-1, \dots, 2$  получаются следующие приближенные к оптимальным  $u_t^\varphi(\cdot, s_t)$  стратегии

$$(12) \quad \tilde{u}_t^\varphi(C_t, s_t) = \begin{cases} (\tilde{u}_{0t}^{1*}, \tilde{u}_{1t}^{1*})^\top, & C_t \in s_t^1, \\ (\tilde{u}_{0t}^{2*}, \tilde{u}_{1t}^{2*})^\top, & C_t \in s_t^2, \\ \dots, \\ (\tilde{u}_{0t}^{n_t*}, \tilde{u}_{1t}^{n_t*})^\top, & C_t \in s_t^{n_t}, \end{cases}$$

где

$$\tilde{u}_{1t}^{k*} = \begin{cases} 0, & \tilde{P}_t^k \geq \hat{P}_t^k \text{ и } \tilde{P}_t^k \neq 0, \\ \arg \max_{\varepsilon \leq u_{1t}^k \leq 1} \sum_{i=1}^{n_{t+1}} P_{t+1i}^* \mathcal{P} \left( s_{tk} \left( 1 + b_0 - u_{1t}^k b_0 + u_{1t}^k X_t \right) \in s_{t+1}^i \right), & \tilde{P}_t^k < \hat{P}_t^k, \\ 1, & \tilde{P}_t^k \geq \hat{P}_t^k \text{ и } \tilde{P}_t^k = 0, \end{cases}$$



а

$$\tilde{u}_{0t}^{k*} = 1 - \tilde{u}_{1t}^{k*}$$

и где, в свою очередь,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t^k &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_{t+1}} P_{t+1i}^* \mathcal{P} \left( s_{tk} (1 + b_0) \in s_{t+1}^i \right), \\ \hat{P}_t^k &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{\varepsilon \leq u_{1t}^k \leq 1} \sum_{i=1}^{n_{t+1}} P_{t+1i}^* \mathcal{P} \left( s_{tk} \left( 1 + b_0 - u_{1t}^k b_0 + u_{1t}^k X_t \right) \in s_{t+1}^i \right), \\ P_{tk}^* &\stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \tilde{P}_t^k, \hat{P}_t^k \right\}, \end{aligned}$$

а  $k = \overline{1, n_t}$ . Отметим, что при  $0 < \varepsilon \leq u_{1t}^k \leq 1$  в силу непрерывности случайной величины  $X_t$  имеет место

(13)

$$\begin{aligned} &\mathcal{P} \left( s_{tk} \left( 1 + b_0 - u_{1t}^k b_0 + u_{1t}^k X_t \right) \in s_{t+1}^i \right) = \\ &= \mathcal{P} \left( s_{t+1i} \leq s_{tk} \left( 1 + b_0 - u_{1t}^k b_0 + u_{1t}^k X_t \right) \leq s_{t+1i+1} \right) = \\ &= F_{X_t} \left( \frac{s_{t+1i+1}/s_{tk} - 1 - b_0 + u_{1t}^k b_0}{u_{1t}^k} \right) - F_{X_t} \left( \frac{s_{t+1i}/s_{tk} - 1 - b_0 + u_{1t}^k b_0}{u_{1t}^k} \right), \end{aligned}$$

когда  $s_{tk} > 0$ ,  $k = \overline{1, n_t}$ ,  $i = \overline{1, n_{t+1}}$ . Когда  $s_{tk} = 0$ , а  $s_{t+1i} \neq 0$ , то выражение (13) равно нулю, в случае  $s_{tk} = s_{t+1i} = 0$  выражение (13) равно единице,  $k = \overline{1, n_t}$ ,  $i = \overline{1, n_{t+1}}$ .

Для отыскания стратегии первого шага нужно решить задачу

$$(14) \quad \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P} (C_2 \in s_2^i) \rightarrow \max_{u_{01} \geq 0, u_{11} \geq 0, u_{01} + u_{11} = 1}.$$

Поскольку критериальная функции в последней задаче

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P} (C_2 \in s_2^i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P} (C_1 (1 + u_{01} b_0 + u_{11} X_1) \in s_2^i) = \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P} (C_1 (1 + b_0) \in s_2^i), & u_{11} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P} (C_1 (1 + b_0 - u_{11} b_0 + u_{11} X_1) \in s_2^i), & u_{11} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

задается кусочно, на открытом множестве, то найдем приближенное решение задачи (14). Для этого введем

$$\tilde{P}_1 = \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}(C_1(1+b_0) \in s_2^i)$$

и найдем

$$\hat{P}_1 = \max_{\varepsilon \leq u_{11} \leq 1} \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}(C_1(1+b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_1) \in s_2^i).$$

Используя величины  $\hat{P}_1$  и  $\tilde{P}_1$ , доопределим приближенное к оптимальному управление, получаемое с использованием соотношений (8) и (12), в задаче (4) на первом шаге:

$$(15) \quad \tilde{u}_1^\varphi = (\tilde{u}_{01}^*, \tilde{u}_{11}^*)^T,$$

где

$$\tilde{u}_{11}^* = \begin{cases} 0, & \tilde{P}_1 \geq \hat{P}_1, \\ \arg \max_{\varepsilon \leq u_{11} \leq 1} \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}(C_1(1+b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_1) \in s_2^i), & \tilde{P}_1 < \hat{P}_1, \end{cases}$$

а

$$\tilde{u}_{01}^* = 1 - \tilde{u}_{11}^*.$$

При  $u_{11} \geq \varepsilon > 0$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}(C_1(1+b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_1) \in s_2^i) = \\ & = \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}(s_{2i} \leq C_1(1+b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_1) \leq s_{2i+1}) = \\ & = \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \left( F_{X_1} \left( \frac{s_{2i+1}/C_1 - 1 - b_0 + u_{11}b_0}{u_{11}} \right) - F_{X_1} \left( \frac{s_{2i}/C_1 - 1 - b_0 + u_{11}b_0}{u_{11}} \right) \right). \end{aligned}$$

В этой связи заключаем, что для поиска предлагаемого по формулам (8), (12), (15) приближенного к оптимальному управления, называемого в дальнейшем *вероятностным*, не нужно проводить оптимизацию в функциональном пространстве или вычислять функцию Беллмана на каждом шаге, необходимо лишь решить ряд одномерных задач условной нелинейной оптимизации. При этом оценкой вероятности превышения капиталом инвестора запланированного порога  $\varphi$  при использовании такой стратегии выступает величина  $P_1^* = \max\{\tilde{P}_1, \hat{P}_1\}$ , которая является оценкой максимального значения функционала  $P_\varphi(u_s(\cdot))$ . Данную величину можно уточнить, используя статистическую оценку исследуемой вероятности.

Отметим, что исследование сходимости предлагаемого управления к точному позиционному при уменьшении мелкости разбиений  $s_t$ ,  $t = \overline{2, T}$ , представляет отдельный интерес, однако затруднительно ввиду разрывности функций Беллмана для данной постановки задачи.

#### 4. Пример

Пусть  $C_1 = 1$ ,  $\varphi = 1,5$ ,  $b_0 = 0,03$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $n_1 = n_2 = \dots = n_T = N$ , где  $N$  – некоторое число, а  $T = 10$ . Предположим также, что инвестиционный портфель ребалансируется каждый год. Сравним предлагаемую многошаговую вероятностную стратегию (8), (12), (15) с известными: *рисковой* стратегией

$$u_t^R(C_t) = \begin{cases} (1, 0)^T, & \varphi \leq C_t(1 + b_0)^{T-t+1}, \\ (0, 1)^T, & \varphi > C_t(1 + b_0)^{T-t+1} \end{cases}$$

из [17], достоинства которой обсуждались в [12], и логарифмической стратегией (стратегией *Келли*) [18–20], обеспечивающей максимальную среднюю скорость роста капитала [17], являющейся решением задачи

$$u_t^L = (u_{0t}^L, u_{1t}^L)^T = \arg \max_{u_{0t} + u_{1t} = 1, u_{0t} \geq 0, u_{1t} \geq 0} \mathbf{M} [\ln(1 + u_{0t}b_0 + u_{1t}X_t)],$$

$t = 1, \dots, T$ . Будем предполагать, что случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_T$  одинаково распределены. Рассмотрим несколько случаев: когда  $X_t \sim \mathcal{R}[a, b]$ , т.е. когда плотность случайной величины  $X_t$  имеет вид

$$f_{X_t}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

и когда  $X_t \sim \overline{\mathcal{N}}(m, \sigma^2)$ , т.е. когда плотность случайной величины  $X_t$  имеет вид

$$(16) \quad f_{X_t}(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & m - 5\sigma \leq x \leq m + 5\sigma, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где константа  $c = 1/0,9999994$  определяется из условия нормировки плотности, а  $m - 5\sigma \geq -1$  для соответствия постановке задачи. Плотность (16) является плотностью усеченного нормального распределения,  $t = \overline{1, T}$ . Выбор именно такого усечения связан с тем фактом, что для случайной величины  $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  с любыми значениями параметров  $m$  и  $\sigma^2$  имеет место равенство  $\mathcal{P}\{m - 5\sigma \leq Y \leq m + 5\sigma\} = 0,9999994$ . А это значит, что построенное таким образом усечение оставляет плотность симметричной и «отбрасывает» диапазоны значений исходной неусеченной случайной величины, вероятность попадания в которые ничтожно мала. В силу введенного в примере предположения об одинаковой распределенности случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_T$

Сравнение различных стратегий

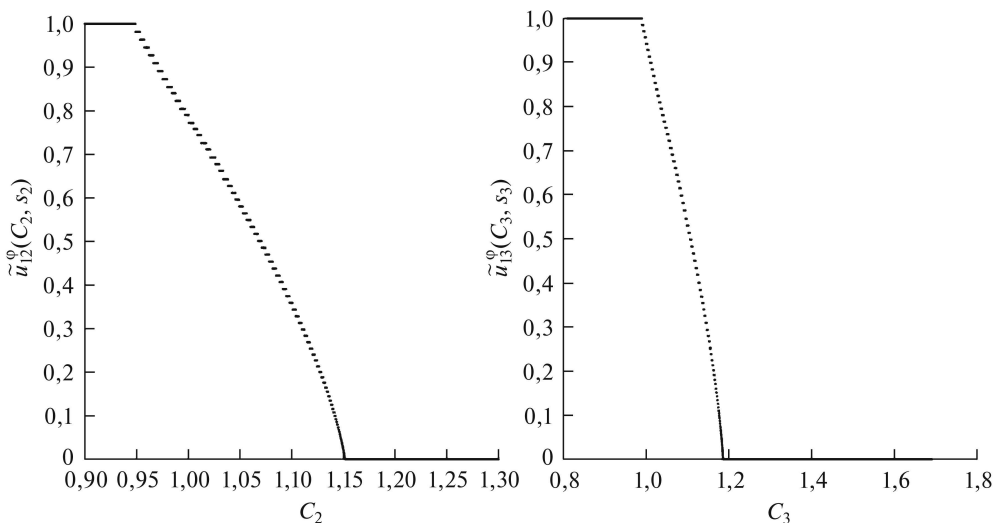
Распределение	Стратегия	$P_1^*$	Выборочная оценка вероятности	Распределение	Стратегия	$P_1^*$	Выборочная оценка вероятности
$\mathcal{R}[-0,5, 0,7]$	Келли	–	<b>0,5637</b>	$\mathcal{N}(0,1, 0,1^2)$	Келли	–	<b>0,9567</b>
	Рисковая	–	<b>0,81</b>		Рисковая	–	<b>0,9811</b>
	Вероятн. ( $N = 100$ )	0,2088	0,5983		Вероятн. ( $N = 100$ )	0,3049	0,9489
	Вероятн. ( $N = 500$ )	0,7427	0,7857		Вероятн. ( $N = 500$ )	0,9364	0,9718
	Вероятн. ( $N = 1000$ )	0,8144	0,8367		Вероятн. ( $N = 1000$ )	0,9621	0,9757
	Вероятн. ( $N = 2000$ )	0,8625	0,8735		Вероятн. ( $N = 2000$ )	0,9757	0,981
	Вероятн. ( $N = 5000$ )	0,8849	0,8896		Вероятн. ( $N = 5000$ )	0,9829	0,9846
	Вероятн. ( $N = 10000$ )	0,8982	<b>0,9005</b>		Вероятн. ( $N = 10000$ )	0,9844	<b>0,9853</b>
	$\mathcal{R}[-0,1, 0,3]$	Келли	–		<b>0,9275</b>	$\mathcal{N}(0,1, 0,15^2)$	Келли
Рисковая		–	<b>0,9679</b>	Рисковая	–		<b>0,938</b>
Вероятн. ( $N = 100$ )		0,9049	0,9535	Вероятн. ( $N = 100$ )	0,0483		0,8471
Вероятн. ( $N = 500$ )		0,9662	0,9715	Вероятн. ( $N = 500$ )	0,7427		0,8904
Вероятн. ( $N = 1000$ )		0,9717	0,9741	Вероятн. ( $N = 1000$ )	0,8715		0,9214
Вероятн. ( $N = 2000$ )		0,9733	0,9744	Вероятн. ( $N = 2000$ )	0,8996		0,9261
Вероятн. ( $N = 5000$ )		0,9747	0,9751	Вероятн. ( $N = 5000$ )	0,9344		0,9438
Вероятн. ( $N = 10000$ )		0,9753	<b>0,9755</b>	Вероятн. ( $N = 10000$ )	0,944		<b>0,9483</b>

далее для краткости будем говорить только о распределении случайной величины  $X_1$ , опуская, что случайные величины  $X_2, \dots, X_T$  распределены по тому же закону. Для сравнения указанных стратегий в каждом из рассматриваемых случаев найдем  $5 \cdot 10^6$  реализаций случайного вектора  $X$  и с помощью выборочной оценки вероятности оценим вероятность события  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$  на этих стратегиях.

Во всех рассмотренных случаях математическое ожидание случайной величины  $X_1$  составляет 0,1, что примерно соответствует средней годовой доходности индекса S & P 500, оцененной по данным за последние 30 лет, и предлагается в качестве примера годовой доходности в [21]. Отличие же рассмотренных случаев друг от друга выступает форма плотности распределения случайной величины  $X_1$ , а также их дисперсия и, как следствие, коэффициент вариации, т.е. отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию. Отметим также, что среднеквадратичное отклонение доходности индекса S & P 500, оцененной по данным за последние 30 лет, составляет порядка 0,15. Таким образом, «естественное» значение коэффициента вариации на основе данных по индексу S & P 500 составляет 1,5.

Как следует из таблицы, стратегия Келли существенно уступает рискованной и вероятностной (при больших значениях  $N$ ) в терминах выборочной оценки вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$ . С ростом величины  $N$  во всех рассмотренных случаях растет величина  $P_1^*$ , при этом растет и выборочная оценка вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$  при использовании вероятностной стратегии. При увеличении  $N$  наблюдается сближение  $P_1^*$  и выборочной оценки вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$ . В этой связи по значениям  $P_1^*$  и выборочной оценки вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$  можно сделать вывод, что дальнейшее увеличение  $N$  для случаев  $X_1 \sim \mathcal{R}[-0,1, 0,3]$  и  $X_1 \sim \overline{N}(0,1, 0,1^2)$  не приведет к существенному увеличению  $P_1^*$  и оценки вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$  на вероятностной стратегии. В то же время увеличение  $N$  для случаев  $X_1 \sim \mathcal{R}[-0,5, 0,7]$  и  $X_1 \sim \overline{N}(0,1, 0,15^2)$  позволит сформировать еще более качественное управление в терминах оценки вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$ . Во всех рассмотренных случаях (уже при  $N = 5000$ ) вероятностная стратегия лучше рискованной в терминах оценки вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$ . При этом с увеличением коэффициента вариации разница между выборочной оценкой вероятности на вероятностной и рискованной стратегиях растет, достигая практически 0,1 в случае  $X_1 \sim \mathcal{R}[-0,5, 0,7]$ .

В статьях [6, 7, 22], связанных или посвященных отысканию оптимальной инвестиционной стратегии в задаче с вероятностным и логарифмическим критерием использовалось равномерное распределение доходности с носителем  $[-1, A]$ . Отметим, что хотя такой случай и малореален на практике, но получаемое с учетом такого распределения управление полезно, когда достоверно известна только средняя доходность. Заметим, что использование такого носителя учитывает случай возможного банкротства компании-эмитента рискованного актива. Более того, как отмечено в [17, 23], равномерное распределение при минимальных предположениях о законе распределения случайных величин в целевой функции оказывается наилучшим с точки зрения величины вероятностного критерия. Таким образом, получаемое управление при та-



Вид второй компоненты вероятностной стратегии на втором и третьем шагах для случая  $X_1 \sim \mathcal{R}[-0,1, 0,3], \dots, X_T \sim \mathcal{R}[-0,1, 0,3]$ .

ком носителе интересно не только с теоретической точки зрения, но и полезно с точки зрения получения наилучшей стратегии при недостатке информации. При  $A = 1,2$  оказалось, что выборочная оценка вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$  на  $5 \cdot 10^6$  реализациях случайного вектора  $X$  для предлагаемой вероятностной стратегии при  $N = 10000$  составляет 0,8253 (при  $P_1^* = 0,8165$ ), что существенно выше выборочной оценки вероятности для рисковей стратегии, составляющей в этом случае 0,6953.

Таким образом, в условиях «естественной» неопределенности (коэффициента вариации, примерно равного или меньшего 1,5) вероятностная стратегия несколько лучше рисковей по значению выборочной оценки вероятности  $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geq \varphi\}$ , в случае же существенной неопределенности предлагаемая вероятностная стратегия значительно превосходит рисковую.

Теперь рассмотрим вид второй компоненты вероятностной стратегии, т.е. доли капитала инвестора, вкладываемого в рисковей актив, при  $N = 10000$  на некоторых шагах для случая  $X_1 \sim \mathcal{R}[-0,1, 0,3]$ .

Как видно из рисунка вторая компонента вероятностной стратегии далека от релейного типа управления, доставляемого рисковей стратегией. Имеется «нелинейный» участок, описание которого простыми функциями (линейной, параболической, логарифмической) вряд ли возможно, что еще раз доказывает полезность предлагаемой вероятностной стратегии.

Результаты получены на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM). Время вычислений для  $N = 10000$  составило от одного до трех часов в зависимости от используемого распределения доходностей, что доказывает применимость на практике разработанного алгоритма. При этом было задействовано только одно ядро компьютера, распараллеливание не применялось, а значит, процесс вычислений может быть еще существенно ускорен.

## 5. Заключение

В работе было предложено новое позиционное управление, приближенное к оптимальному в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием. Соотношения, на основе которых построено предлагаемое управление, получены на основе полной вероятности и формирования управления в классе кусочно-постоянных управлений. На каждом шаге предлагаемое управление получается исходя из решения ряда задач одномерной условной нелинейной оптимизации. В рассмотренном примере продемонстрировано преимущество предлагаемого управления над известными универсальными управлениями. Рассмотренный подход и предлагаемое управление можно обобщить на случай произвольного количества рискованных активов на каждом шаге, не отыскивая при поиске вероятностной стратегии на каждом шаге детерминированный эквивалент, как в настоящей статье, а, например, используя дискретизацию вероятностной меры, что является предметом дальнейших исследований, как и исследование статистических свойств предлагаемого управления.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calafiore G.* Multi-period Portfolio Optimization with Linear Control Policies // *Automatica*. 2008. V. 44. No. 10. P. 2463–2473.
2. *Bodnar T., Parolya N., Schmid W.* On the Exact Solution of the Multi-period Portfolio Choice Problem for an Exponential Utility under Return Predictability // *Eur. J. Oper. Res.* 2015. V. 246. No. 2. P. 528–542.
3. *Canakoglu E., Ozekici S.* Portfolio Selection in Stochastic Markets with HARA Utility Functions // *Eur. J. Oper. Res.* 2010. V. 201. No. 2. P. 520–536.
4. *Mei X., DeMiguel V., Nogales F.J.* Multiperiod Portfolio Optimization with Multiple Risky Assets and General Transaction Costs // *J. Bank. & Fin.* 2016. V. 69. P. 108–120.
5. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // *АиТ*. 2001. № 5. С. 77–88.  
*Kan Yu.S.* Control Optimization by the Quantile Criterion // *Autom. Remote Control*. 2001. V. 62. No. 5. P. 746–757.
6. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // *АиТ*. 2004. № 2. С. 179–197.  
*Grigor'ev V.P., Kan Yu.S.* Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // *Autom. Remote Control*. 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
7. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рискованных активов по вероятностному критерию // *АиТ*. 2015. № 7. С. 78–100.  
*Kibzun A.I., Ignatov A.N.* The Two-step Problem of Investment Portfolio Selection from Two Risk Assets via the Probability Criterion // *Autom. Remote Control*. 2015. V. 76. No. 7. P. 1201–1220.
8. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // *АиТ*. 2001. № 9. С. 101–113.  
*Kibzun A.I., Kuznetsov E.A.* Optimal Control of Discretionary Portfolio // *Autom. Remote Control*. 2001. V. 64. No. 9. P. 1489–1501.

9. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Позиционная стратегия формирования портфеля ценных бумаг // *АиТ.* 2003. № 1. С. 151–166.  
*Kibzun A.I., Kuznetsov E.A.* Positional Strategy of Forming the Investment Portfolio // *Autom. Remote Control.* 2003. V. 64. No. 1. P. 138–152.
10. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического программирования с билинейной функцией дохода к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // *АиТ.* 2016. № 12. С. 89–111.  
*Kibzun A.I., Ignatov A.N.* Reduction of the Two-step Problem of Stochastic Optimal Control with Bilinear Model to the Problem of Mixed Integer Linear Programming // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 12. P. 2175–2192.
11. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // *АиТ.* 2017. № 6. С. 57–83.  
*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.
12. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // *АиТ.* 2018. № 2. С. 3–18.  
*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.
13. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Усиленная оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления с вероятностным критерием качества // *АиТ.* 2019. № 4. С. 53–69.  
*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Refined Estimation of the Bellman Function for Stochastic Optimal Control Problems with Probabilistic Performance Criterion // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 4. P. 634–647.
14. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О существовании оптимальных стратегий в задаче управления стохастической системой с дискретным временем по вероятностному критерию. // *АиТ.* 2017. № 10. С. 139–154.  
*Kibzun A.I., Ignatov A.N.* On the Existence of Optimal Strategies in the Control Problem for a Stochastic Discrete Time System with Respect to the Probability Criterion // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 10. P. 1845–1856.
15. *Ignatov A.N.* The Structure of an Investment Portfolio in Two-step Problem of Optimal Investment with One Risky Asset Via the Probability Criterion // *Sup. Proc. 5th Int. Conf. Analysis of Images, Soc. Networks and Texts (AIST'2016).* Yekaterinburg, Russia, April 7–9, 2016. P. 42–50.
16. *Игнатов А.Н.* Синтез оптимальных стратегий в двухшаговых задачах стохастического оптимального управления билинейной моделью с вероятностным критерием // *Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.* МАИ, Москва, 2016. 135 с.
17. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
18. *Kelly J.L.* A New Interpretation of Information Rate // *Bell Sys. Tech. J.* 1956. No. 35. P. 917–926.
19. *MacLean L.C., Thorp E.O., Zhao Y., Ziemba W.T.* How Does the Fortune's Formula Kelly Capital Growth Model Perform? // *J. Port. Man. Sum.* 2011. V. 37. No. 4. P. 96–111.
20. *Ziemba W.T., Wickson R.G.* Stochastic Optimization Models in Finance. World Scientific, 2006.



21. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. Под ред. Лобанова А.А., Чугунова А.В. М.: Альпина Паблишер, 2003.
22. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерным распределением по логарифмическому критерию с приоритетной рисковой составляющей // *АиТ.* 2014. № 3. С. 87–105.  
*Ignatov A.N., Kibzun A.I.* On Formation of Security Portfolio with Uniform Distribution by Logarithmic Criterion and Priority Risk Component // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 3. P. 481–495.
23. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The Uniform Distribution: a Rigorous Justification for its Use in Robustness Analysis // *Math. Cont. Signals Sys.* 1997. V. 10. P. 203–222.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 28.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020