Автоматика и телемеханика, № 12, 2020

© 2020 г. **Ю.С. КАН, д-р физ.-мат. наук (yu_kan@mail.ru)**
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

РАСШИРЕНИЕ ЗАДАЧИ КВАНТИЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНОЙ ПО СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРАМ ФУНКЦИЕЙ ПОТЕРЬ[1]

Задача стохастического программирования с квантильным критерием исследуется в классической одноэтапной постановке в предположении, что функция потерь линейна по случайным параметрам. Расширением данной задачи является минимаксная задача, в которой внутренний максимум берется от функции потерь по реализациям вектора случайных параметров на ядре вероятностного распределения этого вектора, а внешний минимум — по оптимизируемой стратегии на заданном множестве допустимых стратегий. На основе принципа расширения оптимизационных задач устанавливается, что достаточным условием оптимальности решения этой минимаксной задачи в исходной задаче с квантильным критерием является выполнение некоторого вероятностного ограничения.

Ключевые слова: стохастическое программирование, функция квантили, принцип расширения, ядро вероятностного распределения, вероятностное ограничение.

DOI: 10.31857/S0005231020120041

1. Введение

Конечномерные задачи оптимизации квантильного критерия являются частными случаями более общих оптимизационных моделей, изучаемых в теории стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Сам квантильный критерий определяется как квантиль заданного уровня вероятностного распределения некоторой функции потерь, зависящей от оптимизируемой стратегии и вектора случайных параметров. Видимо, впервые такой критерий введен в рассмотрение в [1] для учета инвестиционного риска в задаче оптимизации портфеля ценных бумаг, но в [1] он не был назван квантильным. В этой статье приведена лишь математическая формула для определения квантильного критерия и подчеркнуто, что это доверительная граница для дохода портфеля. Впервые термин функция (функционал) квантили использован Райком [2], который заложил основы качественной теории стохастических оптимизационных задач с вероятностными критериями, к числу которых относится и квантильный. Бурное развитие теории в области оптимизационных задач с квантильным критерием связано с публикацией [3], в которой было установлено, что задача минимизации

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00595).

квантильного критерия эквивалентна обобщенной минимаксной задаче, в которой внутренний максимум (на самом деле точная верхняя грань) функции потерь ищется по реализациям случайных параметров на доверительном множестве, а внешний минимум — по оптимизируемой стратегии и по доверительным множествам. Таким образом, в обобщенной минимаксной задаче требуется подобрать множество неопределенности. Этот результат получил название “обобщенный минимаксный подход” и сразу зарекомендовал себя как методологическая основа для решения прикладных задач, модельных примеров и разработки численных методов минимизации квантильного критерия. Важное свойство, фактически аналитическое представление оптимального доверительного множества, установлено в [4]. Подробнее об этом речь пойдет далее. Многочисленные примеры и некоторые прикладные задачи были решены сравнительно в короткое время, что нашло отражение в [5]. Можно отметить, что использование обобщенного минимаксного подхода для разработки приближенных методов в течение длительного времени шло в основном по пути сужения класса доверительных множеств, который используется в обобщенной минимаксной задаче. Такое сужение подбиралось в каждом конкретном случае с использованием специфики решаемой задачи. Некоторые результаты в этом направлении собраны в [6], но общих рекомендаций по построению таких сужений к настоящему времени практически не сформулировано.

Отметим, что для случая, когда вектор случайных параметров является дискретным с конечным числом реализаций, существует лишь конечное число доверительных множеств. В этом случае обобщенная минимаксная задача может быть решена простым перебором этих множеств. Такая идея реализована в [7] для случая, когда функция потерь имеет полиэдральную структуру. В общем случае реализация этой идеи затруднена ввиду того, что возникающие на этом пути оптимизационные модели могут иметь ярко выраженную многоэкстремальную структуру, примером является минимум конечного числа выпуклых функций.

Структура статьи следующая. В разделе 2 формулируется задача минимизации квантильного критерия, которая часто называется также задачей квантильной оптимизации. Рассматривается частный случай, когда функция потерь линейна по случайным параметрам. Важность именно такой структуры подкрепляется методом линеаризации [8]. В разделе 3 формулируются результаты, составляющие теоретическую основу доверительного метода: обобщенная минимаксная задача, свойство оптимального доверительного множества, понятие и свойства α-ядра вероятностного распределения. С использованием α-ядра формулируется вспомогательная минимаксная задача, в которой внутренний максимум функции потерь берется по реализациям случайных параметров на α-ядре, а внешний минимум — по оптимизируемой стратегии. Эта минимаксная задача является нижней аппроксимацией обобщенной минимаксной, а следовательно и исходной задачи квантильной оптимизации. В разделе 4 приводится формулировка известного принципа расширения (название ввел В.И. Гурман в [9]), позволяющего конструировать достаточные условия оптимальности решений нижних аппроксимаций абстрактных задач минимизации. С помощью этого принципа в разделе 5 выводится достаточное условие оптимальности решения указанной выше вспомогательной минимаксной задачи для исходной задачи квантильной оптимизации. Это условие имеет вид некоторого вероятностного неравенства и составляет основной результат настоящей статьи. Различные аспекты этого результата иллюстрируются в разделе 6 тремя примерами. В разделе 7 приводится обобщение предлагаемого достаточного условия для минимизирующих последовательностей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим функцию вероятности:

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\left(f(u,\xi) \leqslant \varphi\right),$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – вектор стратегии (на самом деле можно считать, что U – множество элементов u произвольной природы, не обязательно векторов), φ – скалярный параметр, ξ – n-мерный случайный вектор с распределением $\mathbf{P}$, т.е. $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, определенная на борелевских подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$ и определяющая вероятность принадлежности вектора ξ этим подмножествам. Функция $f(u,\xi)$ называется далее функцией потерь и предполагается линейной по ξ:

$$f(u,\xi) = a^{\mathrm{T}}(u)\xi + b(u), \tag{1}$$

где $a(u)$ и $b(u)$ – некоторые векторная и скалярная функции, $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования.

Введем в рассмотрение функцию квантили (квантильный критерий):

$$\varphi_\alpha(u) = [f(u,\xi)]_\alpha = \min\left\{\varphi :\ P_\varphi(u) \geqslant \alpha\right\}, \tag{2}$$

где $\alpha \in (0,1)$ – доверительная вероятность.

Предметом исследования настоящей статьи является задача квантильной оптимизации:

$$\varphi_\alpha^0 = \varphi_\alpha\left(u_\alpha\right) = \min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \tag{3}$$

Цель статьи – вывод достаточных условий оптимальности. По этой причине вопрос существования решения u_α задачи (3) здесь не затрагивается.

3. Обобщенные минимаксные задачи и α-ядра

Отправной точкой исследования задачи квантильной оптимизации (3) является следующий результат, составляющий основу доверительного метода [6]:

Т е о р е м а 1. *Справедливо обобщенное минимаксное соотношение:*

$$\varphi_\alpha^0 = \min_{u \in U, E \in \mathcal{E}_\alpha} \sup_{x \in E} f(u,x), \tag{4}$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ – семейство всех доверительных борелевских множеств E в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $\mathbf{P}(E) \geqslant \alpha$). Если пара u_α, E_α доставляет минимум в (4)*, то u_α – оптимальная стратегия в задаче* (3)*. При этом минимум по $E \in \mathcal{E}_\alpha$ в* (4) *достигается на множестве*

$$E_\alpha = \left\{x : \ f(u_\alpha, x) \leqslant \varphi_\alpha^0\right\}. \tag{5}$$

Впервые идея доверительного метода была сформулирована в [3], затем развита и уточнена в [4]. Как отмечено в [5], теорема 1 устанавливает взаимосвязь между стохастическими и игровыми (минимаксными) оптимизационными моделями. Но сложность задачи (4) долгое время не позволяла получать на ее основе способы точного решения задач квантильной оптимизации. Эта сложность обусловлена неконструктивностью операции оптимизации доверительного множества. В частном случае, когда доверительных множеств конечное число и их можно просто перебрать, задача (4) распадается на конечное число обычных минимаксных задач, в которых операция оптимизации множества отсутствует. Это обстоятельство использовано в [7] для сведения задачи квантильной оптимизации с полиэдральной функцией потерь и дискретным вектором случайных параметров к задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

В [5] впервые сформулирована идея сужения задачи (4): несмотря на то что оптимальное доверительное множество (5) невозможно использовать для решения задачи (4), так как оно зависит от искомых параметров u_α и φ_α^0, свойства функции потерь $f(u, x)$ делают априори известными геометрические свойства этого множества. В частности, из линейности функции потерь (1) следует, что оптимальное доверительное множество E_α является замкнутым полупространством, т.е. выпуклым замкнутым множеством. Поэтому в [10] предложено сузить задачу (4) следующим образом:

$$\varphi_\alpha^0 = \min_{u \in U, E \in \mathcal{E}_\alpha^c} \sup_{x \in E} f(u, x), \tag{6}$$

где $\mathcal{E}_\alpha^c$ – семейство всех выпуклых, замкнутых, доверительных множеств в $\mathbb{R}^n$. Задача (6) оказывается более конструктивной по сравнению с (4) ввиду того, что пересечение всех множеств семейства $\mathcal{E}_\alpha^c$ может оказаться не пустым в отличие от семейства $\mathcal{E}_\alpha$. В [5] это пересечение K_α, как понятие, использовано, видимо, впервые и названо ядром вероятностной меры уровня α. Но поскольку, как указано выше в постановке задачи, вероятностная мера $\mathbf{P}$ есть распределение случайного вектора ξ, в этом частном случае удобнее называть K_α α-ядром распределения случайного вектора ξ. Итак,

$$K_\alpha = \bigcap_{E \in \mathcal{E}_\alpha^c} E = \bigcap_{c \colon \|c\| = 1} \left\{x : c^{\mathrm{T}} x \leqslant \left[c^{\mathrm{T}} \xi\right]_\alpha\right\}, \tag{7}$$

где $\|\cdot\|$ – любая векторная норма. Непустота α-ядра обоснована в [8] следующей теоремой.

Т е о р е м а 2. *K_α не пусто, если $\alpha > \frac{n}{n+1}$.*

Отметим, что этот результат справедлив для любого распределения **P**. Предположим далее, что K_α не пусто. Очевидно, что оно является выпуклым и компактным множеством. Введем в рассмотрение функцию максимума на ядре:

$$\psi_\alpha(u) = \max_{x \in K_\alpha} f(u, x). \tag{8}$$

В [5] установлено, что

$$\psi_\alpha(u) \leqslant \varphi_\alpha(u) \tag{9}$$

для любой непрерывной и квазивыпуклой по x функции потерь $f(u, x)$. Поскольку в соответствии с (1) рассматриваемая функция потерь линейна по x, то она выпукла по x и неравенство (9) для нее справедливо, т.е. функция максимума на ядре — нижняя граница квантильного критерия.

Определение [10]. *Ядро K_α регулярно, если любое замкнутое полупространство, его содержащее, является доверительным.*

В [10] доказано, что для регулярного α-ядра K_α в неравенстве (9) достигается равенство:

$$\psi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u) \quad \forall u \in U. \tag{10}$$

В этом случае задача (3) оказывается эквивалентной минимаксной задаче

$$\psi_\alpha^* = \psi_\alpha(u_\alpha^*) = \min_{u \in U} \psi_\alpha(u) \tag{11}$$

(если, конечно, оптимальная стратегия u_α^* существует), т.е. $u_\alpha = u_\alpha^*$, $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$. В отличие от (4) в минимаксной задаче (11) отсутствует операция оптимизации доверительного множества. В связи с этим проблема регулярности α-ядра представляется важной.

Теорема 3. Ядро K_α регулярно, если его граница является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$, а ξ имеет плотность вероятности.

Эта теорема впервые сформулирована и доказана в [10], где на ее основе установлено, что регулярность имеет место при $\alpha \geqslant 1/2$ для эллиптически симметричных распределений с плотностями

$$p(x) = h\Big((x - m)^{\mathrm{T}} Q^{-1} (x - m)\Big),$$

где $h(\cdot)$ – некоторая функция скалярного аргумента, $m \in \mathbb{R}^n$ – детерминированный вектор (центр симметрии), Q – симметричная положительно определенная матрица. Примером такого распределения, помимо многомерного нормального и равномерного на эллипсоиде, является равномерное распределение на эллиптическом кольце

$$\Big\{x : r_1^2 \leqslant (x - m)^{\mathrm{T}} Q^{-1} (x - m) \leqslant r_2^2\Big\}, \tag{12}$$

где $r_1 < r_2$. Тогда ядро является эллипсоидом

$$K_\alpha = \left\{ x : \, (x - m)^{\mathrm{T}} K^{-1} (x - m) \leqslant r_\alpha^2 \right\},$$

где параметр r_α зависит от α, функции $h(\cdot)$ и матрицы K. При α, близком к $1/2$, может получиться $r_\alpha < r_1$, т.е. α-ядро для равномерного распределения на эллиптическом кольце (12) может оказаться внутри эллипсоида

$$\left\{ x : \, (x - m)^{\mathrm{T}} Q^{-1} (x - m) \leqslant r_1^2 \right\}$$

и будет иметь пустое пересечение с данным кольцом.

В [11] регулярное α-ядро в случае абсолютно непрерывного распределения случайного вектора ξ названо плавающим телом. При этом понятие α-ядра не использовалось. Под плавающим телом понималось выпуклое тело, для которого любая опорная гиперплоскость отсекает вероятностную меру, в точности равную $1 - \alpha$. Основной результат статьи [11] заключается в том, что существование плавающего тела, т.е. регулярность α-ядра, доказано для абсолютно непрерывных распределений с логарифмически вогнутыми и симметричными плотностями $p(x)$. Отметим, что указанное выше равномерное распределение на эллиптическом кольце (12) не обладает свойством логарифмической вогнутости. Поэтому классы симметричных эллиптических и логарифмически вогнутых плотностей дополняют друг друга.

В [12, 13] предложены алгоритмы построения сколь угодно точных, внешних, полиэдральных аппроксимаций α-ядра. Эти алгоритмы хорошо зарекомендовали себя для $n = 2$, т.е. для плоского случая. Но они имеют один методологический недостаток: указанные аппроксимации всегда имеют кусочно-гладкую границу и поэтому с их помощью невозможно проверить условие гладкости в теореме 3 при исследовании вопроса о регулярности α-ядра. Это обстоятельство затрудняет использование вспомогательной задачи (11) для решения исходной задачи (3). Ведь при отсутствии свойства регулярности или при отсутствии обоснования, что регулярность имеет место, можно лишь гарантировать выполнение неравенства (9), т.е. что функция максимума $\psi_\alpha(u)$ на α-ядре является нижней оценкой квантильного критерия. Математический аппарат, обосновывающий использование нижних оценок оптимизируемого критерия в задачах минимизации для вывода достаточных условий оптимальности, впервые предложен в [14]. В настоящее время он известен как принцип расширения [9].

4. Замечание о принципе расширения

Принцип расширения выражает следующее свойство абстрактных оптимизационных задач. Рассмотрим множество M элементов m произвольной природы.

Л е м м а 1. *Пусть имеются функционалы $I, L : M \to \mathbb{R}^1$ и множества $D, E \subset M$, удовлетворяющие условиям:*

1) $L(m) \leqslant I(m) \; \forall m \in D$,

2) $D \subset E$,

3) $m^* = \arg\min_{m \in E} L(m) \in D$,

4) $I(m^*) = L(m^*)$.

Тогда $m^* = \arg\min_{m \in D} I(m)$.

Эта лемма в такой редакции опубликована в [15]. Ее обоснование дано в [14, 16], а в книге [9] она получила название "принцип расширения". Принцип позволяет получить достаточные условия оптимальности решения m^* вспомогательной оптимизационной задачи $L(m) \to \min_{m \in E}$ в исходной задаче $I(m) \to \min_{m \in D}$. Эти достаточные условия получаются в результате применения третьего и четвертого условий леммы с учетом конкретики исходной задачи оптимизации. При этом четвертое условие имеет форму равенства, которое при конкретизации приводит к некоторому достаточному условию в форме алгебраического соотношения типа равенства. Однако можно указать одну интересную альтернативную возможность. Заменим четвертое условие леммы неравенством

$$I(m^*) \leqslant L(m^*). \tag{13}$$

Это неравенство равносильно четвертому условию леммы 1. Действительно, из выполнения четвертого условия следует выполнение неравенства (13), так как это неравенство нестрогое. С другой стороны, если справедливо неравенство (13), то из первого и третьего условий леммы 1 следует, что в этом неравенстве строгое неравенство невозможно. Однако применение леммы 1 к синтезу достаточных условий оптимальности с заменой четвертого условия неравенством (13) приводит к формулировке некоторого достаточного условия в виде неравенства, что открывает дополнительные возможности, как демонстрируется, например, в разделе 5.

5. Достаточные условия оптимальности в задаче квантильной минимизации

Из (9) и леммы 1 очевидно вытекает истинность следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть существует решение вспомогательной минимаксной задачи* (11), *причем*

$$\varphi_\alpha(u_\alpha^*) \leqslant \psi_\alpha^*. \tag{14}$$

Тогда оно оптимально в задаче (3), *т.е.* $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$, $u_\alpha = u_\alpha^*$.

Неравенство (14) является конкретизацией четвертого условия леммы 1. Именно оно и гарантирует, что решение минимаксной задачи (11) оптимально в исходной задаче квантильной минимизации. Заметим, что проверка (14) требует вычисления квантильного критерия на стратегии u_α^*, которая подозревается на оптимальность в задаче (3). Этого можно избежать, поскольку, как доказано в [17], неравенство (14) равносильно следующему:

$$P_\varphi(u_\alpha^*)\big|_{\varphi=\psi_\alpha^*} \geqslant \alpha. \tag{15}$$

Это неравенство как достаточное условие оптимальности стратегии u_α^* для исходной задачи квантильной оптимизации и составляет основной результат данной статьи, который оформим в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 4. *Пусть существует решение вспомогательной минимаксной задачи* (11), *удовлетворяющее вероятностному ограничению* (15). *Тогда оно оптимально в задаче* (3), *т.е.* $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$, $u_\alpha = u_\alpha^*$.

Обсудим смысл этого утверждения. Пусть

$$\psi_\alpha^* = \max_{x \in K_\alpha} f\left(u_\alpha^*, x\right) = f\left(u_\alpha^*, x_\alpha\right), \tag{16}$$

где x_α – граничная точка K_α. Тогда неравенство (15) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\Big\{x:\ f\left(u_\alpha^*, x\right) \leqslant f\left(u_\alpha^*, x_\alpha\right)\Big\} \geqslant \alpha. \tag{17}$$

Это неравенство, по существу, означает регулярность α-ядра в локальном смысле, в граничной точке x_α. В [18] доказана следующая лемма.

Л е м м а 3. *Для любой граничной точки α-ядра существует замкнутое, доверительное полупространство, для которого эта точка также является граничной.*

Поэтому если некоторая граничная точка α-ядра является точкой гладкости его границы, то существует единственное замкнутое полупространство, содержащее в себе α-ядро, для которого эта точка является граничной. Это опорное полупространство в данной граничной точке. По лемме 3 оно доверительное из-за того, что единственное. Поэтому неравенство (17) оказывается выполненным, если x_α – точка гладкости границы α-ядра. Многочисленные аналитические и численные примеры построения плоских α-ядер, приведенные в [12, 13, 18], свидетельствуют о том, что граница α-ядра является кусочно-гладкой. В указанных примерах число точек негладкости границы не превышает четырех.

6. Примеры

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь

$$f(u, \xi) = u_1\xi_1 + u_2\xi_2, \tag{18}$$

где $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ – двумерный вектор стратегии со значениями из множества допустимых стратегий

$$U = \left\{(u_1, u_2)^{\mathrm{T}}:\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 = 1\right\}. \tag{19}$$

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, причем ξ_1 распределена равномерно на отрезке $[-1/2, 1/2]$, а ξ_2 распределена равномерно в граничных точках этого отрезка, т.е.

$$\mathbf{P}\left(\xi_2 = -1/2\right) = \mathbf{P}\left(\xi_2 = 1/2\right) = \frac{1}{2}.$$

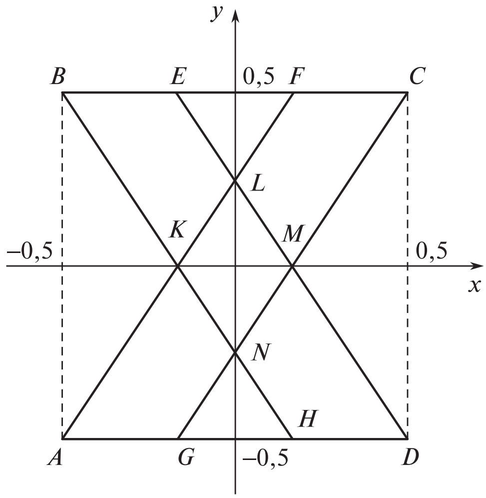

Рис. 1. Нерегулярное ядро $KLMN$. $x_M = 1/6$. $y_L = 1/4$.

Поэтому двумерный случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ распределен равномерно на противоположных сторонах AD и BC квадрата $ABCD$, см. рис. 1. Уровень доверительной вероятности примем равным $\alpha = 2/3$.

В [10] показано, что ядро K_α в рассматриваемом случае не регулярно и представляет собой ромб $KLMN$. Нерегулярность обусловлена тем, что полуплоскость, задаваемая неравенством $y \leqslant 3/8$, содержит целиком отрезок AD и не пересекается с BC. Поэтому она имеет вероятностную меру $1/2$, что меньше $2/3$. На рис. 1 точки E, F, G и H делят каждый из отрезков AD и BC на три равные части, имеющие вероятностную меру $1/6$.

С учетом (19) можно ввести в рассмотрение скалярную переменную $v \in [0, 1]$, с помощью которой можно параметризовать все допустимые стратегии: $u_1 = v$, $u_2 = 1 - v$.

Задача на максимум функции потерь на ядре

$$\psi_\alpha(v) = \max_{(x,y) \in K_\alpha} vx + (1 - v)y$$

является задачей линейного программирования на многоугольнике (ромбе $KLMN$). Из-за того что вектор $(v, 1 - v)^{\mathrm{T}}$ лежит на числовой плоскости в неотрицательном квадранте, этот максимум может достигаться лишь в вершинах M и L. Поэтому

$$\psi_\alpha(v) = \max \{v \cdot x_M, (1 - v) \cdot y_L\} = \max \left\{ \frac{v}{6}, \frac{1 - v}{4} \right\}.$$

Минимум этой функции по v легко находится путем приравнивания двух линейных функций, из которых берется максимум в последнем соотношении. Поэтому решение минимаксной задачи (11) в рассматриваемом примере имеет вид:

$$\frac{v}{6} = \frac{1 - v}{4} \quad \Longrightarrow \quad v_\alpha^* = \frac{3}{5}, \quad \psi_\alpha^* = \frac{1}{10}.$$

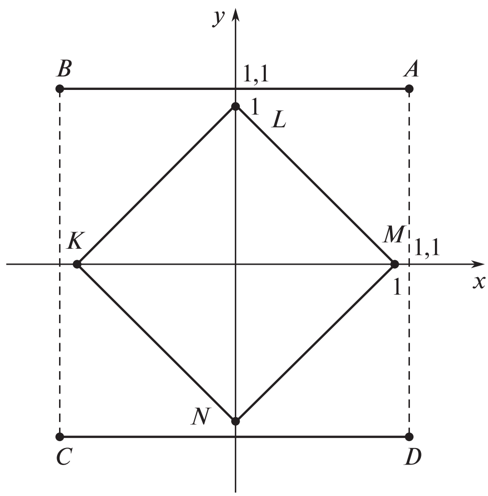

Рис. 2. Нерегулярное ядро $KLMN$ для дискретного распределения.

Проверим достаточное условие оптимальности (15). В данном случае оно приводит к неравенству

$$\mathbf{P}\left\{\frac{3}{5}\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2 \leqslant \frac{1}{10}\right\} \geqslant \alpha. \tag{20}$$

Неравенство

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y \leqslant \frac{1}{10}$$

определяет *доверительную* полуплоскость с границей, содержащей M и L. Поэтому (20) справедливо, и, следовательно, найденное решение минимаксной задачи

$$u_1^* = \frac{3}{5}, \quad u_2^* = \frac{2}{5}, \quad \psi_\alpha^* = \frac{1}{10}$$

есть решение задачи квантильной оптимизации: $u_{1\alpha} = u_1^*$, $u_{2\alpha} = u_2^*$ и $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$.

Пример 2. Рассмотрим задачу примера 1 с другим законом распределения случайного вектора ξ. А именно: функция потерь определена соотношением (18), множество допустимых стратегий – формулой (19), а двумерный случайный вектор ξ имеет дискретное распределение с восемью реализациями в вершинах квадратов $KLMN$ и $ABCD$, изображенных на рис. 2. Вершины внутреннего квадрата $KLMN$ имеют одинаковые вероятностные веса 0,2, а вершины внешнего квадрата $ABCD$ – одинаковые вероятностные веса 0,05. Рассмотрим задачу квантильной оптимизации с $\alpha = 0{,}95$.

Целью данного примера является иллюстрация того обстоятельства, что предложенный подход может успешно применяться и для дискретных распределений случайных параметров.

Нетрудно видеть, что ядро K_α совпадает с внутренним квадратом $KLMN$ и не является регулярным. Действительно, каждая из четырех полуплоскостей, задаваемых неравенствами $x \geqslant -1{,}05$, $x \leqslant 1{,}05$, $y \geqslant -1{,}05$ и $y \leqslant 1{,}05$, содержит α-ядро, но имеет меру 0,9, что меньше, чем $\alpha = 0{,}95$. Так же как и в примере 1, введем в рассмотрение скалярную переменную v. С ее помощью легко находим

$$\psi_\alpha(v) = \max\{v \cdot x_M, (1-v) \cdot y_L\} = \max\{v, 1-v\},$$

откуда $v^* = 1/2$, $\psi_\alpha^* = 1/2$. Достаточное условие оптимальности (15) приводит к неравенству

$$x + y \leqslant 1,$$

которое определяет *доверительную* полуплоскость с границей, содержащей M и L. Следовательно, найденное решение минимаксной задачи

$$u_1^* = v^* = \frac{1}{2}, \quad u_2^* = 1 - v^* = \frac{1}{2}, \quad \psi_\alpha^* = \frac{1}{2}$$

есть решение задачи квантильной оптимизации: $u_{1\alpha} = u_1^*$, $u_{2\alpha} = u_2^*$ и $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$.

Пример 3. Покажем, что в условии (15) на оптимальном решении может иметь место строгое неравенство. С этой целью расширим пример 1 следующим образом. Рассмотрим функцию потерь, характерную для портфеля ценных бумаг:

$$f(u,\xi) = u_0 b + u_1\xi_1 + u_2\xi_2, \tag{21}$$

где $u = (u_0, u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ – трехмерный вектор стратегии со значениями из множества допустимых стратегий

$$U = \left\{(u_0,u_1,u_2)^{\mathrm{T}} : u_0 \geqslant 0,\, u_1 \geqslant 0,\, u_2 \geqslant 0,\, u_0 + u_1 + u_2 = 1\right\}, \tag{22}$$

b – детерминированная константа. В портфельной проблематике величина $(-b)$ имеет смысл доходности безрисковой ценной бумаги, поэтому типичными для b являются отрицательные значения. Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ тот же, что и в примере 1. Т.е. его α-ядро для $\alpha = 2/3$ – тот же самый ромб $KLMN$, как в примере 1.

С целью решения вспомогательной минимаксной задачи (11), как и выше, введем скалярную переменную $v \in [0, 1-u_0]$: $u_1 = v$, $u_2 = 1 - u_0 - v$. Тогда

$$\psi_\alpha(u_0, v) = u_0 b + \max\left\{\frac{v}{6}, \frac{1-u_0-v}{4}\right\}.$$

Приравнивая линейные функции под знаком максимума, находим, что минимум этой функции по v достигается в точке

$$v^* = \frac{3}{5}(1-u_0) \in [0, 1-u_0].$$

Поэтому

$$\min_v \psi_\alpha (u_0, v) = \psi_\alpha (u_0, v^*) = \frac{1}{10} + u_0 \left(b - \frac{1}{10} \right).$$

Минимум этой функции по $u_0 \in [0, 1]$ легко находится. Если $b \geqslant 1/10$, то $u_0^* = 0$, и решением рассматриваемой задачи квантильной оптимизации является решение примера 1. А вот если $b < 1/10$, то $u_0^* = 1$, откуда $v^* = u_1^* = u_2^*$. В этом случае

$$\psi_\alpha^* = \frac{1}{10} + b - \frac{1}{10} = b.$$

Проверим достаточное условие оптимальности (15). В данном случае из-за того что $f(u^*, \xi) \equiv b$, оно имеет вид

$$\mathbf{P}\{b \leqslant b\} = 1 > \alpha,$$

т.е. выполняется как строгое неравенство. Таким образом, в случае $b < 1/10$ решением рассматриваемой задачи квантильной оптимизации является "безрисковая" стратегия $u_{0\alpha} = 1$, $u_{1\alpha} = u_{2\alpha} = 0$, $\varphi_\alpha^0 = b$.

Если же $b \geqslant 1/10$, то как установлено в примере 1, решением является: $u_{0\alpha} = 0$, $u_{1\alpha} = 3/5$, $u_{2\alpha} = 2/5$, $\varphi_\alpha^0 = 1/10$.

7. Обобщение для минимизирующих последовательностей

Минимаксная задача (11) в общем случае является сложной главным образом ввиду того, что α-ядро K_α сложно задать в простой аналитической форме. Следствием этого является то, что оптимальную стратегию для указанной задачи приходится определять с помощью некоторой численной процедуры, приводящей не к нахождению оптимальной стратегии u_α^*, а к построению некоторой минимизирующей последовательности u_α^N. Такую последовательность можно получить, например, следующим образом.

В [12] предложен алгоритм аппроксимации α-ядра последовательностью содержащих его полиэдров K_α^N:

$$K_\alpha^N = \bigcap_{j \in J(N)} \left\{ x : \, c_j^{\mathrm{T}} x \leqslant \left[c_j^{\mathrm{T}} \xi \right]_\alpha \right\}, \tag{23}$$

где c_j, $j \in J(N)$, – конечный, сгущающийся набор векторов на единичной сфере. Предположим, что величины $\left[c_j^{\mathrm{T}} \xi \right]_\alpha$ вычисляются точно, см. по данному вопросу примеры в [12]. Ситуация, когда эти величины определяются с ошибками, возможно случайными, требует специального исследования, выходящего за рамки настоящей статьи. В [18] доказано, что последовательность (23) сходится к K_α в метрике Хаусдорфа. В указанном алгоритме предусмотрена возможность строить сгущающийся набор векторов таким образом, что $J(N) \subset J(N + 1)$. Будем считать, что именно такая возможность реализована. Это приводит к тому, что (23) сходится к K_α монотонно, т.е. $K_\alpha^{N+1} \subset K_\alpha^N$.

Определим последовательность функций максимума

$$\psi_\alpha^N(u) = \max_{x \in K_\alpha^N} f(u, x).$$

Пусть

$$u_\alpha^N = \arg\min_{u \in U} \psi_\alpha^N(u). \tag{24}$$

Если U – компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ и функции $a(u)$ и $b(u)$ в (1) непрерывны, то согласно [19, с. 29] u_α^N существует и является минимизирующей для задачи (11), т.е.

$$\lim_{N \to \infty} \psi_\alpha \left(u_\alpha^N\right) = \psi_\alpha^*.$$

Для формулировки достаточных условий оптимальности последовательности u_α^N в исходной задаче квантильной оптимизации воспользуемся следующей версией принципа расширения [9].

Л е м м а 4. *Пусть имеются функционалы $I, L : M \to \mathbb{R}^1$ и множества $D, E \subset M$ и последовательность $m^N \in D$, удовлетворяющие условиям*:

1) $L(m) \leqslant I(m)\ \forall m \in D$,

2) $D \subset E$,

3) $l \leqslant \inf\limits_{m \in E} L(m)$,

4) $I\left(m^N\right) \to l$.

Тогда m^N минимизирует функционал I на D.

Рассуждая по аналогии с замечанием раздела 4, можно легко установить, что четвертое условие этой леммы равносильно существованию числовой последовательности a^N со свойствами:

$$I\left(m^N\right) \leqslant l + a^N, \tag{25}$$

$a^N \geqslant 0$, $a^N \to 0$ при $N \to \infty$. Роль функционала I, как и выше, играет квантильный критерий, роль функционала L – функция максимума $\psi_\alpha(u)$. Роль константы l в квантильной проблематике играет ψ_α^*. Тогда

$$a^N = \psi_\alpha^N \left(u_\alpha^N\right) - \psi_\alpha^*,$$

где u_α^N определяется согласно (24) (если, конечно, U – компакт). Таким образом, конкретизация четвертого условия леммы 4 приводит к неравенству:

$$\varphi_\alpha \left(u_\alpha^N\right) \leqslant \psi_\alpha^N \left(u_\alpha^N\right),$$

которое по лемме Розенблатта [17] равносильно условию

$$P_\varphi \left(u_\alpha^N\right) \geqslant \alpha, \tag{26}$$

где $\varphi = \psi_\alpha^N \left(u_\alpha^N\right)$. Именно это условие и гарантирует, что последовательность u_α^N минимизирует квантильный критерий качества.

8. Заключение

Можно констатировать, что в статье предложен новый метод оптимизации квантильного критерия для линейной по случайным параметрам функции потерь. Метод сводит задачу квантильной оптимизации к вспомогательной минимаксной, в которой в роли множества неопределенности выступает α-ядро распределения вектора случайных параметров. Эта минимаксная задача получена путем сужения и расширения обобщенной минимаксной задачи, составляющей основу доверительного метода решения задач квантильной оптимизации. Предложено достаточное условие оптимальности решения вспомогательной задачи для исходной задачи с квантильным критерием в форме некоторого вероятностного ограничения. В отличие от известных ранее результатов метод применим без предположения о регулярности α-ядра. На примерах показано, что он работает и в случаях, когда α-ядро не регулярно, в частности для дискретных и непрерывно-дискретных распределений вектора случайных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kataoka S.* On a Stochastic Programming Model // Econometrica. 1963. V. 31. P. 181–196.
2. *Райк Э.* О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании // Изв. АН ЭССР. Физ.-мат. 1971. Т. 20. № 2. С. 229–231.
3. *Кибзун А.И., Малышев В.В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1984. № 1. С. 20–29.
4. *Кибзун А.И., Лебедев А.А., Малышев В.В.* О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1984. № 4. С. 73–80.
5. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
6. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
7. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // АиТ. 2012. № 1. С. 116–129.

   Ivanov S.V., Naumov A.V. Algorithm to Optimize the Quantile Criterion for the Polyhedral Loss Function and Discrete Distribution of Random Parameters // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 105–117.
8. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров // АиТ. 2017. № 7. С. 95–109.

   Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Linearization Method for Solving Quantile Optimization Problems with Loss Function Depending on a Vector of Small Random Parameters // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1251–1263.
9. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
10. *Kan Yu.S.* Application of the Quantile Optimization to Bond Portfolio Selection // Stochastic Optimization Techniques. Numerical Methods and Technical Applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 513. K. Marti, ed. Berlin: Springer, 2002. P. 145–153.

11. *Meyer M., Reisner S.* Characterizations of affinely-rotation-invariant log-concave measures by section-centroid location // Geometric Aspects of Functional Analysis. Lecture Notes in Math. 1989–1990. V. 1469. Berlin: Springer, 1991. P. 145–152.
12. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. A Method for Solving Quantile Optimization Problems with a Bilinear Loss Function // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1582–1597.
13. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информатика и ее применения. 2018. № 12. Вып. 2. С. 60–68.
14. *Кротов В.Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. I // АиТ. 1962. Т. 23. Вып. 12. С. 1571–1583.

    Krotov V.F. Methods for the Solution of Variational Problems Using Sufficient Conditions for an Absolute Minimum. I // Autom. Remote Control. 1962. V. 23. No. 12. P. 1473–1484.
15. *Гурман В.И., Хрусталев М.М.* Анормальность в теории необходимых условий оптимальности // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. № 19. С. 44–61.
16. *Хрусталев М.М.* О достаточных условиях оптимальности в задачах с ограничениями на фазовые координаты // АиТ. 1967. Вып. 4. С. 18–29.

    Khrustalev M.M. On Sufficient Optimality Conditions in the Problems with Phase Coordinates Constraints // Autom. Remote Control. 1967. No. 4. P. 544–554.
17. *Rosenblatt-Roth. M.* Quantiles and Medians // The Annals of Mathematical Statistics. 1965. V. 36. P. 921–925.
18. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // АиТ. 2019. № 11. С. 93–107.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.
19. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 29.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020