

© 2020 г. ДАТ ВО КУОК (cuoi.di.em89@gmail.com),
А.А. БОБЦОВ, д-р техн. наук (bobtsov@mail.ru)
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

АДАПТИВНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАДАННЫМИ НЕ ТОЧНО¹

Рассматривается задача синтеза адаптивного наблюдателя переменных состояния для линейных нестационарных систем. Допускается, что часть параметров нестационарного объекта могут быть неизвестными числами, умноженными на известные функции времени. Предлагаемый подход базируется на идентификационных методах адаптации. Другими словами, основная идея заключается в преобразовании математической модели в виде линейной нестационарного дифференциального уравнения к статической линейной регрессионной модели, содержащей неизвестные параметры. При этом в качестве неизвестных параметров упомянутой регрессионной модели, выступают как неизвестные параметры объекта, так и начальные условия переменных состояния. Далее, с использованием стандартных градиентных методов или других подходов параметрической идентификации осуществляется оценивание неизвестных параметров регрессионной модели и строится наблюдатель. Представленные результаты компьютерного моделирования иллюстрируют достижение заданной цели синтеза наблюдателя переменных состояния.

Ключевые слова: линейные нестационарные системы, наблюдатели переменных состояния, идентификация параметров.

DOI: 10.31857/S0005231020120065

1. Введение

В статье рассматривается новый метод синтеза наблюдателей переменных состояния для линейных нестационарных систем. Хотя данная проблематика не является новой, она до сих пор активно исследуется. Однако, с точки зрения авторов, на текущий момент универсальных подходов практически не существует. На сегодняшний день в современной научной литературе хорошо зарекомендовал себя универсальный подход, предусматривающий решение матричного дифференциального уравнения Риккати (см, например, [1, 2]). Суть этого подхода заключается в следующем. Рассматривается линейная нестационарная система вида

$$\begin{aligned}\dot{v} &= M(t)v + U, \\ w &= Lv,\end{aligned}$$

¹ Данная статья выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, паспорт госзадания № 2019-0898.

для которой синтезируется наблюдатель

$$\dot{\hat{v}} = M\hat{v} + U - HL^T(L\hat{v} - w),$$

где $v(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемый вектор переменных состояния, $\hat{v}(t)$ – текущая оценка $v(t)$, $w(t)$ – измеряемый выход, матрица $H(t)$ является решением дифференциального матричного уравнения Риккати

$$\dot{H} = HM^T + MH - HL^T LH + Q.$$

Хорошо известно (см., например, [1, 2]), что данный наблюдатель обеспечивает асимптотическую сходимость, если система является равномерно наблюдаемой, т.е. существуют положительные числа T_0 , δ_1 и δ_2 , такие что для любого момента времени t выполняется неравенство

$$\delta_1 I \leq \int_t^{t+T_0} X^T(t, \tau) L^T L X(t, \tau) d\tau \leq \delta_2 I,$$

где $X(\cdot, \cdot)$ – переходная матрица системы.

Однако реализация подобных наблюдателей имеет ряд недостатков. Прежде всего, это вычисление матрицы H , требующее решения онлайн n дифференциальных уравнений с квадратичными членами, которые могут быть чувствительны к численным методам. Еще одним существенным недостатком является необходимость точного знания всех параметров объекта управления. В данной статье предлагается новый подход, позволяющий синтезировать наблюдателей для систем, в которых некоторые параметры являются частично неизвестными.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейный нестационарный полностью управляемый и наблюдаемый одноканальный объект управления вида

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t),$$

$$(2) \quad y(t) = c^T(t)x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемый вектор переменных состояния; $A(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – нестационарные матрицы с частично известными коэффициентами; $y(t)$ и $u(t)$ – соответственно измеряемый выход и сигнал управления.

Ставится задача синтеза наблюдателя переменных состояния

$$(3) \quad \hat{x}(t) = f(y, u),$$

обеспечивающего для системы (1), (2) достижение целевого условия

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0,$$

где $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

Решение задачи синтеза наблюдателя (3) для полностью управляемого и наблюдаемого объекта (1), (2), обеспечивающего выполнение (4), будет обеспечиваться при выполнении следующих предположений.

Предположение 1. Матрица $A(t)$ имеет структуру

$$A(t) = A_0(t) + g(t)c^T(t),$$

где $A_0(t)$ – нестационарная матрица с известными параметрами; $g(t)$ – вектор неизвестных параметров, элементы которого заданы в виде

$$g_i(t) = a_i s_i(t),$$

где a_i – неизвестное число, но $s_i(t)$ – известная функция.

Предположение 2. Векторы $b(t)$ и $c(t)$ имеют вид

$$(5) \quad b(t) = \beta b_0(t),$$

$$(6) \quad c(t) = \sigma c_0(t),$$

где $b_0(t)$ и $c_0(t)$ – известные функции; $\beta > 0$ и $\sigma > 0$ – неизвестные числа.

Замечание 1. Следует отметить, что структуры (5), (6) можно было бы обобщить до уровня

$$b_i(t) = \beta_i b_{0i}(t),$$

$$c_i(t) = \sigma_i c_{0i}(t),$$

где β_i, σ_i – неизвестные числа и $\beta_i b_{0i}(t), c_{0i}(t)$ – известные функции. Однако в этом случае задача идентификации существенно усложняется из-за большого количества настраиваемых параметров, а содержательная идея подхода синтеза наблюдателя переменных состояния может исчезнуть за большим числом математических манипуляций.

3. Синтез адаптивного наблюдателя

Рассмотрим новый метод синтеза наблюдателя для объекта управления (1), (2). Для синтеза наблюдателя будем использовать идеи, опубликованные в [3, 4]. Рассмотрим уравнение (1) при структурных предположениях

$$A(t) = A_0(t) + g(t)c^T(t),$$

$$b(t) = \beta b_0(t).$$

Тогда (1) примет вид

$$(7) \quad \dot{x} = (A_0 + gc^T)x + \beta b_0 u = A_0 x + gy + \beta b_0(t)u.$$

Для системы (7) введем в рассмотрение новый вектор $\xi = \text{col}\{x, a, \beta\}$, где $a = \text{col}\{a_1, \dots, a_n\}$ – вектор неизвестных постоянных параметров. Тогда (7) можно записать в виде

$$(8) \quad \dot{\xi} = F(t)\xi = \begin{bmatrix} A_0 & y\Omega & b_0 u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$(9) \quad y = r^T \xi,$$

где матрица $\Omega = \text{diag}\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$ и $r^T = [c^T \ 0 \ 0]$.

Введем в рассмотрение новую переменную $z(t)$, являющуюся решением уравнения

$$(10) \quad \dot{z} = F(t)z.$$

Рассмотрим вектор ошибок

$$(11) \quad e(t) = z(t) - \xi(t).$$

Дифференцируя (11), получаем

$$(12) \quad \dot{e}(t) = F(t)e(t).$$

Сформируем фундаментальную матрицу решения уравнения (12)

$$\dot{\Phi}(t) = F(t)\Phi(t),$$

где для простоты выберем $\Phi(0) = I$.

Хорошо известно (см, например, [5]), что

$$e(t) = \Phi(t)\theta,$$

где $\theta = z(0) - \xi(0)$.

Тогда из уравнения (11) следует

$$\xi(t) = z(t) - e(t) = z(t) - \Phi(t)\theta,$$

откуда легко видеть, что задача оценивания вектора $\xi(t)$ может быть сведена к идентификации вектора неизвестных параметров θ , т.е.

$$(13) \quad \hat{\xi}(t) = z(t) - \Phi(t)\hat{\theta},$$

где $\hat{\theta}$ – оценка θ .

Для идентификации вектора неизвестных параметров θ воспользуемся выражением (9). Подставляя в (9) слагаемое $\xi(t) = z(t) - e(t)$, получаем

$$(14) \quad y(t) = r^T(z(t) - e(t)) = r^Tz(t) - r^T\Phi(t)\theta = \sigma\psi_1(t) - \sigma\psi_2^T(t)\theta,$$

где $\psi_1 = [c_0(t)^T \ 0 \ 0]z$ и $\psi_2 = [c_0(t)^T \ 0 \ 0]\Phi$ – соответственно скаляр и вектор, полученные из уравнений

$$\begin{aligned} \sigma\psi_1 &= r^Tz = [\sigma c_0(t)^T \ 0 \ 0]z = \sigma [c_0(t)^T \ 0 \ 0]z, \\ \sigma\psi_2^T &= r^T\Phi = \sigma [c_0(t)^T \ 0 \ 0]\Phi. \end{aligned}$$

Из (14) получаем классическую регрессионную модель вида

$$(15) \quad y = \psi^T\eta,$$

где $\psi = \text{col}\{\psi_1, -\psi_2\}$ – вектор известных функций и $\eta = \text{col}\{\sigma, \sigma\theta\}$ – вектор неизвестных постоянных параметров.

Для идентификации вектора неизвестных параметров η можно воспользоваться стандартными процедурами, например градиентным алгоритмом вида

$$(16) \quad \dot{\hat{\eta}} = -k\psi\psi^T\hat{\eta} + k\psi y,$$

где $k > 0$ – коэффициент настройки.

Из $\eta = \text{col}\{\sigma, \sigma\theta\}$ следует, что для вычисления вектора θ необходимо воспользоваться уравнением

$$(17) \quad \hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\eta}_1} \text{col}(\hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_{n+1}).$$

Из (17) следует, что для вычисления $\hat{\theta}$ требуется осуществлять деление на функцию $\hat{\eta}_1$, которая может пересекать ноль. Данная проблема не является тривиальной, но ее можно избежать, например используя алгоритм, опубликованный в [6]. Однако заметим, что если число σ известно, то данная проблема существенно упрощается.

Утверждение. Рассмотрим систему (8), (9), полученную путем расширения объекта (1), (2). Пусть для оценивания вектора переменных состояния $\xi(t)$ используется уравнение (13) с настройкой вектора неизвестных параметров вида (16), (17) при предположении, что вектор ψ удовлетворяет условиям незатухающего возбуждения (см., подробнее, [7–9]). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \hat{\xi}(t) - \xi(t) \right| = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим вектор

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \xi(t) &= z(t) - e(t) = z(t) - \Phi(t)\theta, \\ \hat{\xi}(t) &= z(t) - \Phi(t)\hat{\theta}, \end{aligned}$$

то для $\tilde{\xi}$ имеем

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi = -\Phi\hat{\theta} + \Phi\theta = -\Phi\tilde{\theta},$$

где $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

Поскольку в рамках утверждения допускается, что вектор ψ удовлетворяет условиям незатухающего возбуждения, то гарантируется экспоненциальная сходимость $\hat{\eta}$ к $\eta = \text{col}\{\sigma, \sigma\theta\}$. Так как $\hat{\eta}$ сходится экспоненциально к η , то из уравнения (17) следует асимптотическая сходимость $\hat{\theta}$ к θ , откуда имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \Phi\tilde{\theta} \right| = 0.$$

Из последнего выражения следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \hat{\xi}(t) - \xi(t) \right| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Следует отметить, что выбор в качестве $\Phi(0)$ единичной матрицы не вносит никаких принципиальных изменений в алгоритм вычисления переменной $\xi(t)$ и, как следствие, вектора $x(t)$. Разница будет состоять в изменении уравнения

$$\theta = z(0) - \xi(0)$$

на аналогичное уравнение вида

$$\theta = \Phi^{-1}(0)(z(0) - \xi(0)),$$

что в свою очередь повлияет только на качество переходных процессов, но не на сходимость оценки $\hat{\xi}(t)$ к истинному значению $\xi(t)$.

Замечание 3. Хорошо известно, что в случае градиентного алгоритма настройки (16) вектор $\hat{\eta}$ экспоненциально сходится к η при условии незатухающего возбуждения. Более того, алгоритм (16) не дает возможности существенного ускорения процессов идентификации за счет выбора коэффициента настройки $k > 0$. Поэтому для обеспечения высокого быстродействия оценивания параметров целесообразно воспользоваться другими подходами, например методом DREM (см., например, [7]).

4. Пример

Для иллюстрации работоспособности предлагаемой схемы синтеза наблюдателя, а также для наибольшей прозрачности предлагаемого подхода рассмотрим пример. Пусть система (1), (2) имеет вид

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & \sin 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$(19) \quad y = 5x_1,$$

где a_1 – неизвестный постоянный параметр.

Легко видеть, что с помощью представленных далее простых манипуляций система (18) может быть приведена к виду (8). Для этого рассмотрим новый вектор переменных состояния $\xi = [x_1 \quad x_2 \quad a_1]^T$. Тогда легко видеть, что модель (18), (19) можно записать в виде

$$(20) \quad \dot{\xi} = F\xi + Gu, \quad y = r^T\xi,$$

где

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2y \\ 0 & \sin 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r^T = [5 \quad 0 \quad 0].$$

Далее рассмотрим динамическую систему, полностью эквивалентную (20),

$$\dot{z}(t) = F(t)z(t) + G(t)u(t).$$

Сформируем матрицу $\Phi(t)$ с единичными начальными условиями

$$\dot{\Phi}(t) = F(t)\Phi(t)$$

и регрессионное уравнение для поиска вектора неизвестных параметров

$$(21) \quad y(t) = r^T(t)z(t) - r^T(t)\Phi(t)\theta.$$

Из уравнения (21) получаем

$$(22) \quad q = \omega^T\theta,$$

где $q = r^T(t)z(t) - y(t)$ и вектор $\omega^T = r^T(t)\Phi(t)$.

Для обеспечения быстродействия оценивания параметров и монотонности их переходных процессов воспользуемся методом DREM (см., например, [7]). Следуя [7], пропустим известные элементы регрессионной модели (22) через блоки запаздывания $[H(\cdot)](t) = (\cdot)(t - \tau)$, где $\tau \in R_+$. Тогда для (22) имеем

$$(23) \quad q_{f_i} = \omega_{f_i}^T\theta.$$

Сформулируем на основе исходной регрессионной модели (22) и новой отфильтрованной регрессионной модели (23) расширенную модель

$$(24) \quad q_e = A_e\theta,$$

где

$$q_e = \begin{bmatrix} q \\ q_{f_1} \\ \vdots \\ q_{f_{n-1}} \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} \omega^T \\ \omega_{f_1}^T \\ \vdots \\ \omega_{f_{n-1}}^T \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}.$$

Умножая (24) на алгебраическое дополнение A_e , получаем

$$Y = \text{adj}A_e q_e = \Delta\theta,$$

откуда имеем скалярную модель вида

$$Y_i = \Delta\theta_i,$$

где $\Delta = \det\{A_e\}$ – определитель матрицы A_e .

Оценку θ_i будем вычислять по формуле

$$(25) \quad d\hat{\theta}_i/dt = -k_i\Delta(\Delta\hat{\theta}_i - Y_i),$$

где k_i – положительное число, увеличивая которое можно добиваться ускорения процессов сходимости неизвестных параметров к истинным значениям.

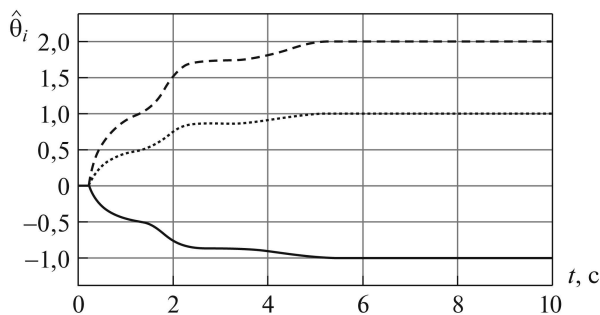


Рис. 1. Графики переходных процессов для $\hat{\theta}_i$ при $k_i = 10$ ($\hat{\theta}_1$ – сплошная линия; $\hat{\theta}_2$ – штриховая линия; $\hat{\theta}_3$ – точечная линия).

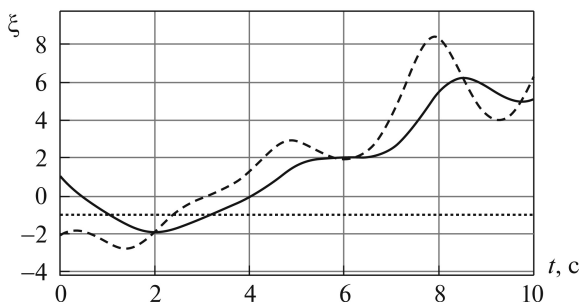


Рис. 2. Графики переменных вектора ξ при $k_i = 10$ (x_1 – сплошная линия; x_2 – штриховая линия; a_1 – точечная линия).

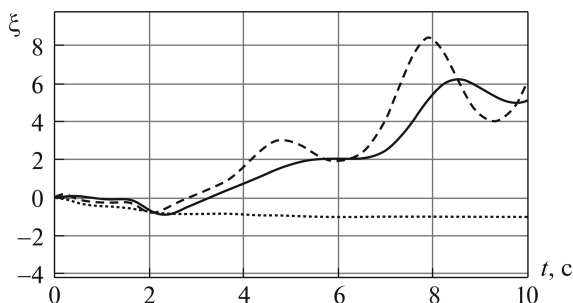


Рис. 3. Графики оценок переменных вектора $\hat{\xi}$ при $k_i = 10$ (\hat{x}_1 – сплошная линия; \hat{x}_2 – штриховая линия; \hat{a}_1 – точечная линия).

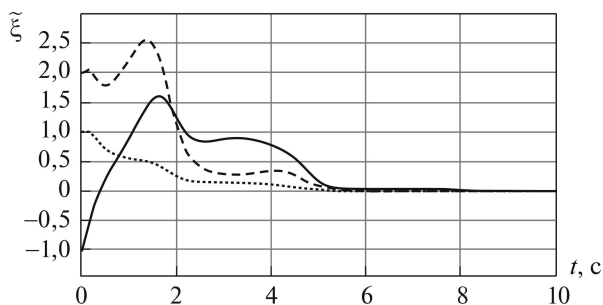


Рис. 4. Графики оценок сигналов $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$ при $k_i = 10$ (\tilde{x}_1 – сплошная линия; \tilde{x}_2 – штриховая линия; \tilde{a}_1 – точечная линия).

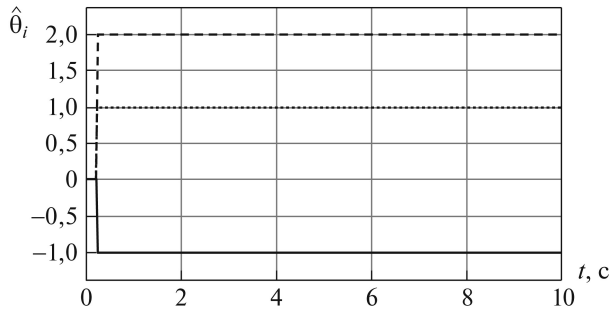


Рис. 5. Графики переходных процессов для $\hat{\theta}_i$ при $k_i = 1000$ ($\hat{\theta}_1$ – сплошная линия; $\hat{\theta}_2$ – штриховая линия; $\hat{\theta}_3$ – точечная линия).

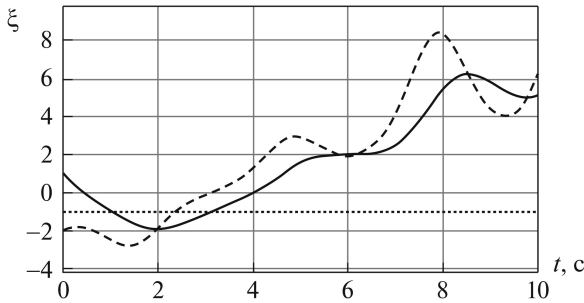


Рис. 6. Графики переменных вектора ξ при $k_i = 1000$ (x_1 – сплошная линия; x_2 – штриховая линия; a_1 – точечная линия).

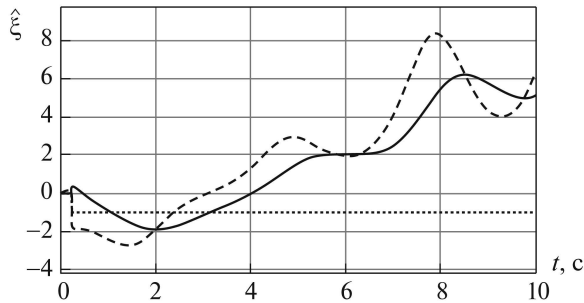


Рис. 7. Графики оценок переменных вектора $\hat{\xi}$ при $k_i = 1000$ (\hat{x}_1 – сплошная линия; \hat{x}_2 – штриховая линия; \hat{a}_1 – точечная линия).

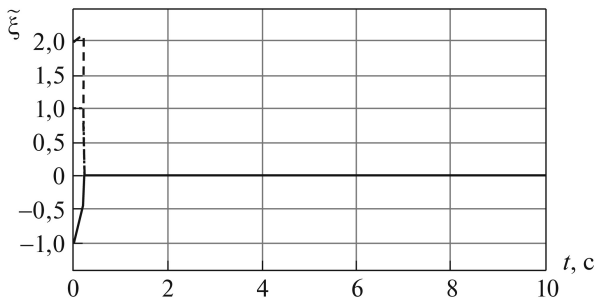


Рис. 8. Графики оценок сигналов $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$ при $k_i = 1000$ (\tilde{x}_1 – сплошная линия; \tilde{x}_2 – штриховая линия; \tilde{a}_1 – точечная линия).

Для формирования оценок вектора ξ подставим полученные значения оцениваемых параметров в уравнение

$$(26) \quad \hat{\xi}(t) = z(t) - \Phi(t)\hat{\theta}.$$

Замечание 4. Легко показать, что для ошибки оценивания параметра $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i$ справедливо

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = -k_i \Delta^2 \tilde{\theta}_i,$$

откуда легко видеть, что за счет увеличения числа k_i можно добиваться увеличения скорости сходимости $\tilde{\theta}_i$ к нулю.

При моделировании адаптивного наблюдателя (25), (26) были выбраны: $\tau = 0,1$, $z(0) = 0$, $u = 1$. На рис. 1–4 и 5–8 соответственно представлены графики переходных процессов для $\hat{\theta}_i$, ξ , $\hat{\xi}$, $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$ при $k_i = 10$ и $k_i = 1000$. Из графиков переходных процессов можно видеть, что предлагаемый подход синтеза адаптивного наблюдателя обеспечивает достижение целевого условия (4), демонстрируя улучшение быстродействия за счет увеличения коэффициента k_i .

5. Заключение

В статье предложен новый метод синтеза наблюдателя переменных состояния для линейной, полностью управляемой и наблюдаемой нестационарной системы (1), (2). Допуская, что параметры системы (1), (2) могут быть неизвестными, был синтезирован наблюдатель переменных состояния (13)–(17), обеспечивающий асимптотическую сходимость настраиваемых оценок к истинным значениям. Данная задача была решена в некотором классе структурных ограничений, представленных в предположениях 1 и 2. Для синтеза наблюдателя был использован новый подход, предусматривающий преобразование исходной модели объекта управления к линейной регрессионной модели вида (14), (15). Представленные в статье результаты компьютерного моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного подхода и демонстрируют хорошее качество переходных процессов.

В качестве перспектив развития рассмотренного подхода видится его расширение на класс многоканальных объектов управления. Рассмотрим многоканальный объект вида

$$(27) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

$$(28) \quad y(t) = C(t)x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемый вектор переменных состояния; $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – нестационарные матрицы соответствующих размеров; $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ и $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – соответственно измеряемые выход и сигнал управления.

Действуя по аналогии с одноканальным случаем, будем предполагать (см. предположения 1 и 2), что

$$A(t) = A_0(t) + G_s(t)C(t), \quad B(t) = \beta B_0(t), \quad C(t) = \sigma C_0(t)$$

и квадратная матрица $G_s(t) = \text{diag}\{g_1(t), \dots, g_n(t)\}$ с элементами $g_i(t) = a_i s_i(t)$. Тогда, следуя (13)–(17), с несущественными изменениями может быть построен наблюдатель переменных состояния для объекта (27), (28).

Также дальнейшее развитие данного подхода может быть связано с усложнением предположений на структуру матрицы $A(t)$ и на системы, подверженные влиянию внешних возмущающих воздействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rugh W.J.* Linear system theory. Prentice Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
2. *Rueda-Escobedo J., Ushirobira R., Efimov D., Moreno J.* Gramian-Based Uniform Convergent Observer for Stable LTV Systems with Delayed Measurements // Int. J. Control. 2019. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1569256>.
3. *Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S.* A Parameter Estimation Approach to State Observation of Nonlinear Systems // Syst. Control Lett. 2015. V. 85. No. 11. P. 8–94.
4. *Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N.* State Observers for Reaction Systems with Improved Convergence Rates // J. Process Control. 2019. V. 83. No. 11. P. 53–62.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
6. *Bobtsov A.A., Miroshnik I.V.* A Dynamic Adaptation Algorithm for Time-varying Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 12. 1773–1781.
7. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
8. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
9. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Mineola: Dover, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 12.04.2020

После доработки 02.07.2020

Принята к публикации 09.07.2020