

## Стохастические системы

© 2020 г. А.В. ГОРБУНОВА, канд. физ.-мат. наук (avgorbunova@list.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
А.В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук (avlebed@yandex.ru)  
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

### СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДВУМЯ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ, АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ И СТОХАСТИЧЕСКИМ СБРОСОМ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с накопителем неограниченной емкости, в которую с различными интенсивностями поступают два пуассоновских потока заявок. Заявки первого типа имеют абсолютный приоритет относительно заявок второго типа. Кроме того, в момент окончания обслуживания приоритетная заявка с некоторой вероятностью может сбросить все неприоритетные заявки, находящиеся в очереди. Обслуживание заявок обоих типов имеет экспоненциальное распределение с разными параметрами. Представлены выражения для вычисления стационарных вероятностей системы, вероятности обслуживания неприоритетной заявки в терминах производящей функции и формула для среднего числа заявок второго типа.

*Ключевые слова:* система массового обслуживания, абсолютный приоритет, обобщенное обновление, стохастический сброс заявок.

DOI: 10.31857/S0005231020120077

#### 1. Введение

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с двумя входящими потоками, заявки первого потока имеют абсолютный приоритет относительно заявок второго потока, причем в момент окончания обслуживания приоритетная заявка может с некоторой вероятностью сбросить все неприоритетные заявки.

Подобное явление, когда заявка при уходе сбрасывает другие заявки из накопителя, называется обновлением (renovation). Класс систем с обновлением возник в результате развития идей СМО с отрицательными заявками [1]. Разница в том, что отрицательные заявки представляют собой отдельный тип заявок и “убивают” или выталкивают куда-то обычные заявки при своем поступлении, а не уходе, причем сами не требуют обслуживания. Системам с отрицательными заявками посвящена обширная литература, подробный обзор которой можно найти, например, в [2], начиная с самых ранних работ на эту тему, или в [3], где обсуждаются более свежие публикации. В свою очередь упомянем лишь некоторые статьи, отражающие различные направления исследований. Так, в [4, 5] изучаются системы с отрицательными заявками и

ограниченным временем пребывания, в [6–10] представлены системы с отрицательными заявками и повторными обращениями, ряд работ [11–16] посвящен изучению подобных систем в дискретном времени, кроме того известны статьи, в которых рассматриваются системы с групповыми поступлениями заявок, причем некоторые из них предполагают коррелированные входные потоки [16–20], также стоит отметить ряд публикаций, освещающих характеристики так называемых СМО с доходами [21–25], при этом выделенные категории не исключают взаимных пересечений и наложений дополнительных условий, так, например, в [6, 13, 16, 18, 20, 26] исследуемые системы подразумевают еще и прогулки или отдых (vacations) приборов на периодах простоя. Отметим также ряд последних зарубежных работ [27–29], где можно найти соответствующую библиографию.

Одной из первых статей, посвященных системам с обновлением, была [30], где стационарное распределение вероятностей было получено в терминах производящей функции. В более поздних публикациях [31–33] был предложен другой метод нахождения искомых вероятностей и найдены некоторые временные характеристики. При этом было введено понятие обобщенного обновления, когда из накопителя сбрасываются не все заявки, а случайное число с заданным распределением.

Заметим, что обобщенное обновление можно рассматривать как механизм активного управления очередью (Active Queue Management, AQM). Такие механизмы предполагают принятие решения об отказе заявке в обслуживании в зависимости от состояния системы, с целью ограничения числа заявок в очереди. Простейшей, но часто оптимальной оказывается пороговая стратегия управления [34, 35]. В других случаях широко используются различные стохастические алгоритмы, например RED (Random Early Detection), согласно которому вероятность отказа линейно возрастает на определенном промежутке числа заявок. Обычно решение принимается в момент прихода заявки, однако ничто не мешает его принимать и в момент ухода заявки (в отношении имеющихся или будущих заявок). Следуя такому подходу, в [36] проведено сравнение обобщенного обновления с RED-подобными алгоритмами. Основные результаты исследований по AQM можно найти в [37, 38].

Рассматриваемая в настоящей статье модель со стохастическим сбросом также может рассматриваться как вариант AQM. В частности, модель эффективно ограничивает число заявок 2-го типа, при любой интенсивности их поступления система остается эргодической, что может быть важно в случае DDoS-атак (Distributed Denial of Service attack) (см. далее).

Классическая система с двумя типами заявок и абсолютным приоритетом была введена в [39]. Там, в частности, были выведены условие эргодичности, вероятность простоя, среднее и дисперсия числа неприоритетных заявок и др. Отметим, что понятие обновления может быть обобщено на системы с приоритетами многими способами. Авторы будут придерживаться направления, заданного публикациями [40, 41], где предполагалось, что приоритетные заявки (1-го типа) при уходе с некоторой вероятностью сбрасывают все неприоритетные заявки (2-го типа). Таким образом, заявки 1-го типа отчасти играют роль отрицательных заявок в отношении заявок 2-го типа, но с указанными выше различиями.

Практический интерес к перечисленным системам массового обслуживания объясняется следующим. Во-первых, с помощью такого рода моделей возможно проанализировать поведение компьютерных и телекоммуникационных систем в условиях потери данных, которые могут быть вызваны всевозможными причинами, начиная с банальных поломок, оптимизации работы подобным образом и заканчивая нетерпеливостью пользователей таких систем [40]. Также механизм сброса может применяться с целью регулирования интенсивности потока данных и политики дифференцированного обслуживания пользователей [42, 43]. Все названные варианты могут действовать в рамках различных стратегий AQM.

Кроме того, речь может идти и об анализе (мониторинге) угроз информационной безопасности, поскольку безопасность сети является довольно важной проблемой как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения инженерных приложений. Существует множество типов сетевых атак (вирусы, черви, трояны, DDoS-атаки), которые могут вызывать значительные сбои и создавать серьезные проблемы в работе компьютерных сетей. Большинство исследований в этой области концентрируется на способах обнаружения атак и ответных действиях, а работ, посвященных аналитическому изучению данной проблемы не так много, несмотря на то что это могло бы способствовать увеличению знаний о поведении вредоносных программ и соответственно улучшить качество оценки их влияния на систему [44–47].

Таким образом, анализируемая авторами СМО может моделировать функционирование какой-либо информационной системы, которая подвергается различного рода атакам с целью нарушения ее деятельности или получения несанкционированного доступа к данным. В систему поступает обычный для нее пользовательский поток запросов (заявки 2-го типа) и периодически приходит условная “вирусная” заявка (заявка 1-го типа). В случае пассивной атаки вредоносная заявка просто покидает систему. Либо эту ситуацию можно расценить как то, что система безопасности угрозу распознала и обработала, не дав ей навредить. В противном случае, когда система безопасности не справилась с угрозой либо атака оказалась активной, эта вредоносная заявка сбрасывает весь поток “хороших” заявок.

Исследование рассматриваемой в статье системы было начато в [41], но тогда удалось получить некоторые результаты<sup>1</sup> только для специального случая детерминированного сброса при уходе заявки (с вероятностью единица), в том числе вывести формулу вероятности простоя. В [40] рассматривалась аналогичная система с относительным приоритетом, однако она оказалась более сложной для теоретического анализа. Заметим, что при малом среднем времени обслуживания заявки 2-го типа характеристики систем с абсолютным и относительным приоритетом должны быть близкими.

Поскольку терминология обновления систем с приоритетами пока не принята, будем называть рассматриваемую модель системой со стохастическим сбросом.

Отметим, что данная система является промежуточной между классической системой с абсолютным приоритетом без сброса [39] и системой с детер-

---

<sup>1</sup> При этом в (4) и (17) были допущены логические ошибки.

минированным сбросом [41], поэтому можно ожидать, что ее характеристики также окажутся промежуточными, а характеристики в крайних случаях могут быть получены соответствующими предельными переходами. Теоретический и численный анализ подтверждают это предположение.

Итак, статья организована следующим образом: во втором разделе описана математическая модель СМО и представлены формулы для распределения числа заявок в системе, в третьем разделе описывается способ вычисления вероятности простоя системы, в четвертом — основное внимание уделено вычислению среднего числа заявок 2-го типа, в пятом — нахождению вероятности обслуживания заявки 2-го типа, а в шестом разделе приведен численный пример.

## 2. Математическая модель

В однолинейную систему массового обслуживания с накопителем неограниченной емкости поступают заявки двух типов. Входящие в систему потоки являются пуассоновскими с интенсивностью  $\lambda_1$  для заявок 1-го типа и интенсивностью  $\lambda_2$  для заявок 2-го типа. Времена обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение с параметрами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Заявки 1-го типа имеют абсолютный приоритет по сравнению с заявками 2-го типа, т.е. при наличии в очереди заявок обоих потоков на обслуживание выбирается приоритетная заявка, а неприоритетная заявка может быть выбрана на обслуживание только в том случае, когда в очереди нет заявок 1-го типа. Кроме того, если в момент поступления приоритетной заявки на обслуживание находится заявка 2-го типа, то ее обслуживание немедленно прерывается и она возвращается в начало очереди, а заявка 1-го типа поступает на прибор. Заявки одного потока обслуживаются в порядке поступления. Более того, приоритетная заявка, находящаяся на приборе, может в момент окончания обслуживания либо с вероятностью  $p$  просто покинуть систему, либо с вероятностью  $q$  еще и сбросить все заявки второго типа из накопителя,  $p + q = 1$ .

Функционирование представленной СМО можно описать марковским процессом  $X(t) = \{\nu_1(t), \nu_2(t)\}$ , где  $\nu_1(t)$  и  $\nu_2(t)$  — число заявок первого ( $i$ ) и второго ( $j$ ) типов, с дискретным множеством состояний  $X = \{(i, j), i \geq 0, j \geq 0\}$  (рис. 1).

Зададимся вопросом об эргодичности системы. Поскольку заявки 2-го типа никак не влияют на заявки 1-го типа, то поведение  $\nu_1(t)$  будет таким же, как в соответствующей системе  $M|M|1$ , с условием эргодичности  $\rho_1 < 1$ ,  $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ . При этом поскольку время от времени происходит полный сброс заявок 2-го типа (через промежутки времени с конечным средним), то  $\nu_2(t)$  не может стремиться к бесконечности, независимо от  $\rho_2$ . Таким образом, условием эргодичности системы оказывается  $\rho_1 < 1$ , в чем имеется качественное различие с классической системой [39], где условием эргодичности было  $\rho_1 + \rho_2 < 1$ . Далее будем считать условие  $\rho_1 < 1$  выполненным по умолчанию.

Обозначим через  $p_{i,j}$ ,  $i \geq 0, j \geq 0$  — стационарную вероятность того, что в системе находится  $i$  приоритетных заявок и  $j$  неприоритетных заявок. Ста-

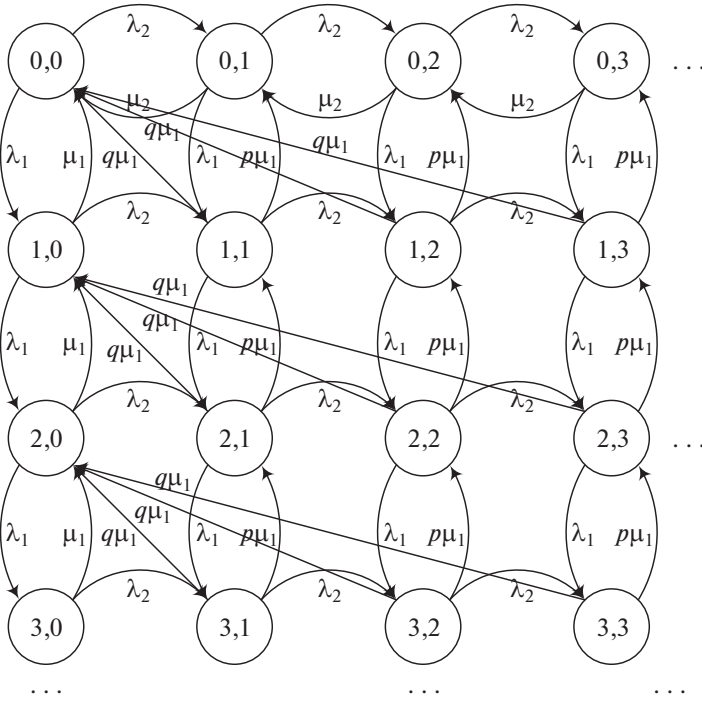


Рис. 1. Диаграмма интенсивностей переходов.

ационарное распределение существует и удовлетворяет системе уравнений равновесия:

$$(1) \quad (\lambda_1 + \lambda_2)p_{0,0} = \mu_1 p p_{1,0} + \mu_2 p_{0,1} + \mu_1 q \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j},$$

$$(2) \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)p_{i,0} = \lambda_1 p_{i-1,0} + \mu_1 p p_{i+1,0} + \mu_1 q \sum_{j=0}^{\infty} p_{i+1,j}, \quad i \geq 1,$$

$$(3) \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)p_{0,j} = \mu_1 p p_{1,j} + \lambda_2 p_{0,j-1} + \mu_2 p_{0,j+1}, \quad j \geq 1,$$

$$(4) \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)p_{i,j} = \mu_1 p p_{i+1,j} + \lambda_1 p_{i-1,j} + \lambda_2 p_{i,j-1}, \quad i, j \geq 1.$$

Введем обозначения для маргинальных вероятностей:

$$p_{i,\cdot} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}, \quad p_{\cdot,j} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j}, \quad i, j \geq 0.$$

Поскольку заявки 2-го типа никак не влияют на приоритетные заявки, то распределение числа приоритетных заявок будет соответствовать распределению числа заявок в СМО типа \$M|M|1\$, т.е.

$$p_{i,\cdot} = (1 - \rho_1)\rho_1^i, \quad i \geq 0,$$

причем должно выполняться условие эргодичности \$\rho\_1 < 1\$.

Далее введем обозначение для производящей функции

$$(5) \quad B(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} u^i v^j.$$

Тогда справедливо, что

$$\begin{aligned} B(u, 0) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,0} u^i, \\ B(0, v) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j} v^j, \\ B(u, 1) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} u^i = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,\cdot} u^i = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 u}, \\ B(1, v) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} v^j = \sum_{j=0}^{\infty} p_{\cdot,j} v^j. \end{aligned}$$

Теперь найдем выражение для производящей функции. Для этого умножим уравнения (1)–(4) на  $u^i v^j$  и просуммируем по всем возможным значениям  $i$  и  $j$ , т.е.

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)B(u, v) - \mu_1 p_{0,0} + (\mu_2 - \mu_1) \sum_{j=1}^{\infty} p_{0,j} v^j = \\ &= \mu_1 p p_{1,0} + \mu_2 p_{0,1} + \mu_1 q \frac{1}{u} \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j} u + \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} p_{i-1,0} u^i + \mu_1 p \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1,0} u^i + \\ &+ \mu_1 q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i+1,j} u^i + \mu_1 p \sum_{j=1}^{\infty} p_{1,j} v^j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{\infty} p_{0,j-1} v^j + \mu_2 \sum_{j=1}^{\infty} p_{0,j+1} v^j + \\ &+ \mu_1 p \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{i+1,j} u^i v^j + \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{i-1,j} u^i v^j + \lambda_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{i,j-1} u^i v^j. \end{aligned}$$

После преобразований получим, что

$$(6) \quad \begin{aligned} &B(u, v) = \\ &= \frac{(\mu_1 v(u - p) - \mu_2 u(v - 1))B(0, v) + \mu_1 q v (B(u, 1) - p_{0,\cdot}) + \mu_2 p_{0,0} u (v - 1)}{\lambda_1 u v (1 - u) + \lambda_2 u v (1 - v) + \mu_1 v (u - p)}. \end{aligned}$$

Тогда распределение числа заявок, не обладающих приоритетом, описывается выражением

$$p_{\cdot,j} = \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j B(1, v)}{\partial v^j} \right|_{v=0},$$

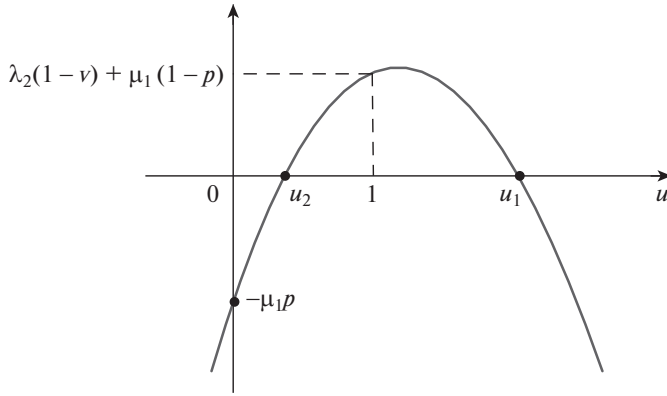


Рис. 2. Иллюстрация к утверждению, что  $0 < u_2(v) < 1$ .

а распределение числа заявок первого и второго типов определяется формулой

$$p_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \left. \frac{\partial^{i+j} B(u,v)}{\partial u^i \partial v^j} \right|_{u=v=0}.$$

Далее найдем нули знаменателя (6), т.е. получим корни квадратного трехчлена относительно переменной  $u$

$$(7) \quad u_{1,2} = u_{1,2}(v) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2(1-v) + \mu_1 \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2(1-v) + \mu_1)^2 - 4\lambda_1\mu_1 p}}{2\lambda_1}.$$

Докажем, что  $0 < u_2(v) < 1$  с учетом того, что  $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 < 1$ . Для этого рассмотрим поведение функции  $\lambda_1 u(1-u) + \lambda_2 u(1-v) + \mu_1(u-p)$  из знаменателя (6). При  $u=0$  получаем  $-\mu_1 p < 0$ , при  $u=1$  имеем  $\lambda_2(1-v) + \mu_1(1-p) > 0$ ,  $0 < p < 1$ . Поскольку графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз (рис. 2), можем сделать вывод, что корень квадратного трехчлена, лежащий в интервале от 0 до 1, существует, кроме того, он будет являться меньшим корнем этого трехчлена.

В силу того что производящая функция  $B(u,v)$  является непрерывной функцией при  $u, v \in [0, 1]$ , при подстановке  $(u_2, v)$ ,  $0 < u_2 < 1$ , в выражение (6) одновременно со знаменателем в ноль должен обращаться и числитель. Следовательно, имеем

$$(\mu_1 v(u_2 - p) - \mu_2 u_2(v - 1))B(0, v) + \mu_1 q v (B(u_2, 1) - p_{0,\cdot}) + \mu_2 p_{0,0} u_2(v - 1) = 0,$$

где, напомним,

$$B(u_2, 1) = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 u_2}, \quad p_{0,\cdot} = (1 - \rho_1).$$

Таким образом, выражение для  $B(0, v)$  примет вид

$$(8) \quad B(0, v) = \frac{\mu_1 q \rho_1 u_2 (\rho_1 - 1) v + (1 - \rho_1 u_2) \mu_2 u_2 (1 - v) p_{0,0}}{(1 - \rho_1 u_2) (\mu_1 v (u_2 - p) - \mu_2 u_2 (v - 1))},$$

и для полного решения задачи остается только найти вероятность простоя системы  $p_{0,0}$ .

### 3. Вероятность простоя системы

Рассмотрим знаменатель выражения (8). Поскольку  $v \in [0, 1]$ , то в крайних точках отрезка выражение принимает значение  $\mu_2 u_2 > 0$  при  $v = 0$  и при  $v = 1$  — значение  $\mu_1 v(u_2 - p)$ , определим его знак. В силу того что из знаменателя (6)

$$\lambda_1 u_2(1 - u_2) + \lambda_2 u_2(1 - v) + \mu_1(u_2 - p) = 0,$$

где  $\lambda_1 u_2(1 - u_2) > 0$  и  $\lambda_2 u_2(1 - v) > 0$ , можем заключить, что  $\mu_1(u_2 - p) < 0$ . Это означает, что существует такое  $v^* \in (0, 1)$ , при котором знаменатель (8) обращается в ноль, а значит, и числитель (8) должен обращаться в ноль:

$$\mu_1 q \rho_1 u_2(v^*)(\rho_1 - 1)v^* + (1 - \rho_1 u_2(v^*))\mu_2 u_2(v^*)(1 - v^*)p_{0,0} = 0,$$

откуда с учетом  $0 < u_2(v) < 1$  получаем, что

$$(9) \quad p_{0,0} = \frac{\lambda_1 q(1 - \rho_1)v^*}{\mu_2(1 - \rho_1 u_2(v^*))(1 - v^*)}.$$

Зная  $p_{0,0}$ , можем вычислить все стационарные вероятности и характеристики системы.

Теперь покажем, что поведение  $p_{0,0}$  на обеих границах отрезка  $p \in [0, 1]$  соответствует результатам, полученным ранее в [39, 41].

*Случай 1.* Пусть  $p \rightarrow 0$ , тогда необходимо доказать, что

$$p_{0,0} \rightarrow p_{0,0}^{(0)} = \frac{\lambda_1(1 - \rho_1)}{\mu_2} \frac{z_2}{1 - z_2}, \quad v^* \rightarrow z_2, u_2 \rightarrow 0,$$

где выражение для  $z_2$  имеет вид [41]:

$$(10) \quad z_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)^2 - 4\lambda_2\mu_2}}{2\lambda_2}.$$

При  $p \rightarrow 0$  для любого значения  $v$  выполняется  $u_2 \rightarrow 0$ . Поэтому чтобы найти  $v^*$ , получим асимптотическое разложение выражения для  $u_2$  с помощью формулы Тейлора при  $p \rightarrow 0$

$$(11) \quad u_2 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \lambda_2(1 - v) + \mu_1} p + o(p),$$

тогда

$$(12) \quad p - u_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2(1 - v)}{\lambda_1 + \lambda_2(1 - v) + \mu_1} p + o(p).$$

Далее приравниваем знаменатель в (8) к нулю и получаем

$$(13) \quad \frac{v}{1 - v} = \frac{\mu_2 u_2}{\mu_1(p - u_2)}.$$



В правую часть полученного равенства подставляем асимптотические выражения (11) и (12), откуда

$$(14) \quad \frac{v}{1-v} = \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2(1-v)} + o(1),$$

в результате после перехода к пределу при  $p \rightarrow 0$  получаем уравнение

$$\lambda_2 v^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)v + \mu_2 = 0,$$

которое в точности соответствует уравнению из [41] для вычисления  $0 < z_2 < 1$ . Таким образом, из  $v^* \rightarrow z_2$ ,  $u_2 \rightarrow 0$  сходимость  $p_{0,0}$  к  $p_{0,0}^{(0)}$  следует автоматически.

*Случай 2.* Положим  $\rho_1 + \rho_2 < 1$ . Пусть  $p \rightarrow 1$ , тогда необходимо доказать, что

$$p_{0,0} \rightarrow p_{0,0}^{(1)} = 1 - \rho_1 - \rho_2, \quad v^* \rightarrow 1, u_2 \rightarrow 1,$$

где выражение для  $p_{0,0}^{(1)}$  из [39]. Из того что  $p \rightarrow 1$  следует, что  $v^* \rightarrow 1$  и  $u_2 \rightarrow 1$ . Введем обозначение  $\varepsilon = 1 - v$ , тогда  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow 0$ . Далее, воспользовавшись аналогичным образом асимптотическим разложением  $u_2$  с помощью формулы Тейлора, можем записать, что

$$u_2 = 1 - \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_1} \varepsilon - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \lambda_1} q + o(\varepsilon) + o(q).$$

Тогда

$$p - u_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_1} \varepsilon + \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} q + o(\varepsilon) + o(q).$$

Из равенства (13) при  $v \rightarrow 1$ ,  $u_2 \rightarrow 1$ ,  $p \rightarrow 1$  получаем, что

$$1 - v \sim \frac{\mu_1}{\mu_2} (p - u_2),$$

т.е. при  $\varepsilon, q \rightarrow 0$

$$\varepsilon \sim \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_1} \varepsilon + \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} q \right),$$

следовательно,

$$\varepsilon \sim \frac{\lambda_1 \mu_1}{\mu_1 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} q.$$

Тогда

$$p_{0,0} \sim \frac{\lambda_1 q}{\mu_2 \varepsilon} \rightarrow \frac{\mu_1 \mu_2 - \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{\mu_1 \mu_2} = 1 - \rho_1 - \rho_2 = p_{0,0}^{(1)},$$

что соответствует классическому результату [39].

#### 4. Среднее число заявок 2-го типа в системе

Среднее число неприоритетных заявок в системе равно

$$N_2 = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{\cdot, j} = \left. \frac{\partial B(1, v)}{\partial v} \right|_{v=1}.$$

После соответствующих преобразований получим

$$\left. \frac{\partial B(1, v)}{\partial v} \right|_{v=1} = \left. \frac{\partial B(0, v)}{\partial v} \right|_{v=1} + \frac{\lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_2 (1 - p_{0,0})}{\mu_1^2 q},$$

где

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial B(0, v)}{\partial v} \right|_{v=1} = \\ &= \frac{u_2'(1) \lambda_1 q (1 - \rho_1) + \lambda_1 u_2(1) q (1 - \rho_1) + \mu_2 u_2(1) (1 - \rho_1 u_2(1)) p_{0,0}}{\mu_1 (1 - \rho_1 u_2(1)) (p - u_2(1))} - \\ & - \frac{\lambda_1 u_2(1) q (1 - \rho_1) [\mu_1 (p - u_2(1)) + \mu_2 u_2(1) - u_2'(1) \mu_1]}{\mu_1^2 (1 - \rho_1 u_2(1)) (p - u_2(1))^2} + \\ & + \frac{u_2'(1) \lambda_1^2 u_2(1) q (1 - \rho_1)}{\mu_1^2 (1 - \rho_1 u_2(1))^2 (p - u_2(1))}, \\ & u_2(1) = \frac{\lambda_1 + \mu_1 - \sqrt{(\lambda_1 + \mu_1)^2 - 4 \lambda_1 \mu_1 p}}{2 \lambda_1}, \\ & u_2'(1) = \left. \frac{\partial u_2(v)}{\partial v} \right|_{v=1} = \frac{1}{2 \lambda_1} \left( \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \mu_1)}{\sqrt{(\lambda_1 + \mu_1)^2 - 4 \lambda_1 \mu_1 p}} - \lambda_2 \right). \end{aligned}$$

Среднее время пребывания в системе неприоритетной заявки можно вычислить с помощью формулы Литтла, т.е. справедливо, что

$$N_2 = \lambda_2 v_2,$$

где  $v_2$  — среднее время пребывания заявки 2-го типа в системе, тогда

$$v_2 = \frac{N_2}{\lambda_2} = w_2 + \frac{1}{\mu_2},$$

откуда среднее время пребывания неприоритетной заявки в очереди равно

$$w_2 = v_2 - \frac{1}{\mu_2}.$$

Среднее число приоритетных заявок в системе, среднее время пребывания приоритетных заявок в очереди и в системе определяется с помощью известных формул для СМО  $M|M|1$  из-за отсутствия влияния на них заявок второго типа.

## 5. Вероятность обслуживания заявки 2-го типа

Теперь определим вероятность обслуживания неприоритетной заявки. Отметим, что это непростая задача, поскольку судьба заявки зависит не только от состояния системы в момент ее поступления, но и от дальнейшего развития событий.

Для этого введем величину  $s_{i,j}$  – вероятность того, что заявка второго типа будет обслужена, если перед ней в очереди (с учетом заявки на приборе) находится  $i$  приоритетных и  $j$  неприоритетных заявок.

Возможны следующие ситуации (рис. 3):

- 1) если в системе перед неприоритетной заявкой находятся  $i$  заявок первого и  $j$  заявок второго типа, то с вероятностью  $\lambda_1/(\lambda_1 + \mu_1)$  в систему может поступить новая приоритетная заявка и занять место перед рассматриваемой неприоритетной (не обязательно непосредственно перед ней), т.е. приоритетных заявок станет  $(i + 1)$ , либо с вероятностью  $\mu_1/(\lambda_1 + \mu_1)$  может обслужиться заявка первого типа и при этом с вероятностью  $p$  просто покинет систему, не сбрасывая неприоритетные заявки, тогда перед заявкой второго типа станет  $(i - 1)$  приоритетных заявок (рис. 3,а);
- 2) если в системе перед неприоритетной заявкой находятся только  $j$  заявок второго типа, то с вероятностью  $\lambda_1/(\lambda_1 + \mu_2)$  в систему может поступить приоритетная заявка и занять место перед рассматриваемой неприоритетной, либо с вероятностью  $\mu_2/(\lambda_1 + \mu_2)$  может обслужиться заявка второго типа (рис. 3,б);
- 3) если в системе перед неприоритетной заявкой нет других заявок, то с вероятностью  $\lambda_1/(\lambda_1 + \mu_2)$  в систему может поступить приоритетная заявка и занять место перед рассматриваемой неприоритетной, либо с вероятностью  $\mu_2/(\lambda_1 + \mu_2)$  заявка второго типа успеет успешно обслужиться.

Заметим, что поступления новых неприоритетных заявок в систему никак не влияют на обслуживание неприоритетных заявок, уже находящихся в систе-

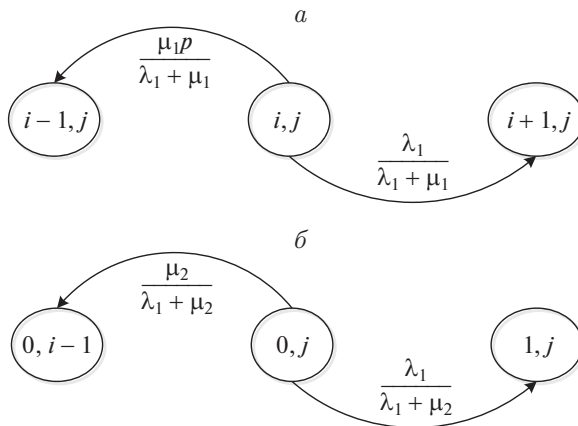


Рис. 3. Возможные изменения состояний СМО в условиях ожидания неприоритетной заявки.

ме, поэтому эти события нигде не учитываются. Составим систему уравнений

$$(15) \quad s_{i,j} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} s_{i+1,j} + \frac{\mu_1 p}{\lambda_1 + \mu_1} s_{i-1,j}, \quad i \geq 1, j \geq 0,$$

$$(16) \quad s_{0,j} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_2} s_{1,j} + \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2} s_{0,j-1}, \quad j \geq 1,$$

$$(17) \quad s_{0,0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_2} s_{1,0} + \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2}.$$

Будем искать решение (15) в виде

$$(18) \quad s_{i,j} = \gamma^i s_{0,j}, \quad i \geq 1, j \geq 0,$$

тогда при подстановке (18) в (15) при  $i = 1$  можем записать, что

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \gamma^2 + \frac{\mu_1 p}{\lambda_1 + \mu_1},$$

т.е. получаем квадратное уравнение относительно переменной  $\gamma$

$$\lambda_1 \gamma^2 - (\lambda_1 + \mu_1) \gamma + \mu_1 p = 0.$$

Решением уравнения является

$$\gamma_{1,2} = \frac{\lambda_1 + \mu_1 \pm \sqrt{(\lambda_1 + \mu_1)^2 - 4\lambda_1 \mu_1 p}}{2\lambda_1}.$$

Выбираем корень, лежащий в интервале от 0 до 1, т.е.  $\gamma_2$ . Таким образом, получаем, что

$$(19) \quad s_{i,j} = \gamma_2^i s_{0,j}, \quad j \geq 0.$$

Теперь подставляем полученное решение для  $s_{i,j}$  в (16), откуда можем выразить  $s_{0,j}$  в виде:

$$s_{0,j} = \frac{\mu_2}{\lambda_1(1 - \gamma_2) + \mu_2} s_{0,j-1}, \quad j \geq 1.$$

Далее подставим (19) при  $i = 1$  и  $j = 0$  в (17), что позволит выразить вероятность  $s_{0,0}$  в явном виде:

$$s_{0,0} = \frac{\mu_2}{\lambda_1(1 - \gamma_2) + \mu_2}.$$

Следовательно,

$$(20) \quad s_{0,j} = \delta^{j+1}, \quad j \geq 0,$$

где

$$\delta = \frac{\mu_2}{\lambda_1(1 - \gamma_2) + \mu_2}.$$

Таким образом, получаем формулу для искомым вероятностей

$$s_{i,j} = \gamma_2^i \delta^{j+1}, \quad i, j \geq 0.$$

Теперь, определив величины  $s_{i,j}$ , можем выразить вероятность обслуживания непериприоритетной заявки

$$p^{(serv)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} s_{i,j} = \delta \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} \gamma_2^i \delta^j = \delta B(\gamma_2, \delta),$$

где  $B(\gamma_2, \delta)$  определяется выражением для производящей функции (5).

Заметим, что при  $p \rightarrow 1$  имеем  $\gamma_2 \rightarrow 1$ ,  $\delta \rightarrow 1$  и  $p^{(serv)} \rightarrow 1$ , что согласуется с  $p^{(serv)} = 1$  в классической системе [39]. С другой стороны, при  $p \rightarrow 0$  имеем  $\gamma_2 \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow \mu_2/(\lambda_1 + \mu_2)$  и

$$p^{(serv)} \rightarrow \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2} B\left(0, \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2}\right),$$

что представляет собой правильный результат в специальном случае  $q = 1$  (детерминированного сброса), рассмотренном в [41].

## 6. Численный пример

Проиллюстрируем поведение среднего числа непериприоритетных заявок в системе и вероятности их обслуживания, а также вероятности простоя в зависимости от значения вероятности  $p$ . Положим  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 4$ .

Значения  $p_{0,0}$ ,  $N_2$  и  $p^{(serv)}$  в зависимости от вероятности  $p$ ;  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 4$

№ П/П	$p$	$p_{0,0}$	$N_2$	$p^{(serv)}$
1	0,00001	0,42692456	0,72138505	0,44783943
2	0,0001	0,42691639	0,72142797	0,44785372
3	0,001	0,42683463	0,72185751	0,44799666
4	0,01	0,42601289	0,72618609	0,44943427
5	0,05	0,42226759	0,74618419	0,45601022
6	0,1	0,41735867	0,77308223	0,46468915
7	0,2	0,40668331	0,83441279	0,48380588
8	0,3	0,39464575	0,90860175	0,50577935
9	0,4	0,38089405	1,00059049	0,53145181
10	0,5	0,36491803	1,11839002	0,56207704
11	0,6	0,34593336	1,27603001	0,59963204
12	0,7	0,32262946	1,50090229	0,64748988
13	0,8	0,29251571	1,85620264	0,71212093
14	0,9	0,24962267	2,53878264	0,80873235
15	0,95	0,21798769	3,23966558	0,88200599
16	0,97	0,20130170	3,70732327	0,92074722
17	0,99	0,18016569	4,43379884	0,96939467
18	0,999	0,16814903	4,93317210	0,99666168
19	0,9999	0,16681649	4,99318955	0,99966287
20	0,99999	0,16668166	4,99931765	0,99996625

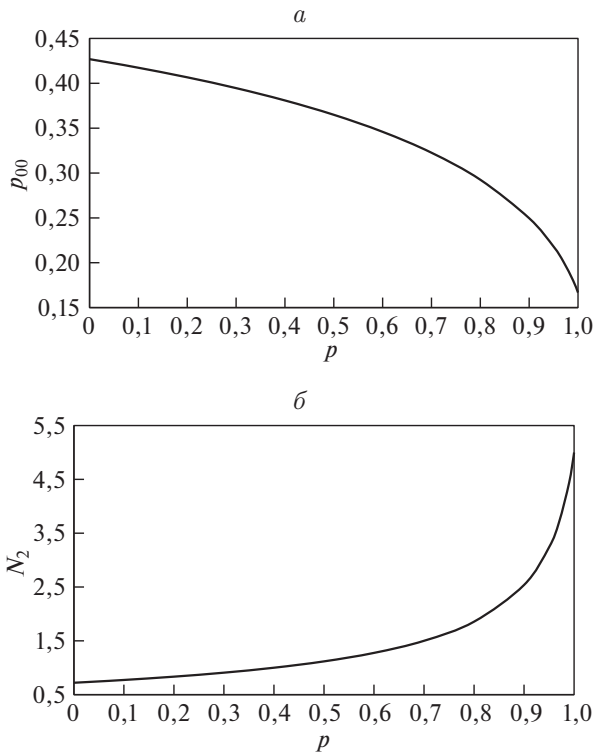


Рис. 4. Зависимости: *a* — вероятности простоя системы от вероятности  $p$ ; *б* — среднего числа неприоритетных заявок в системе от вероятности  $p$ ;  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 4$ .

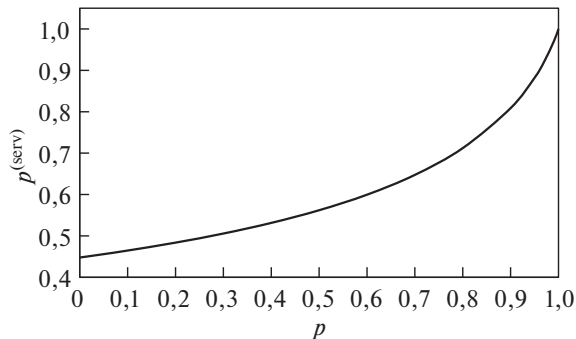


Рис. 5. Зависимость вероятности обслуживания неприоритетной заявки  $p^{(serv)}$  от вероятности  $p$ ;  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 4$ .

Как видно из графиков (рис. 4) и таблицы среднее число неприоритетных заявок в системе с увеличением  $p$  растет, а сама вероятность  $p_{0,0}$  при этом убывает. Причем заметим, что вероятность простоя в классической СМО без возможности сброса неприоритетных заявок, вычисляемая по формуле из [39]

$$p_{0,0}^{(1)} = 1 - \rho_1 - \rho_2, \quad \rho_i = \lambda_i / \mu_i, \quad i = 1, 2,$$

равна 0,16667 (или 1/6), а среднее число неприоритетных заявок в той же классической системе, описываемое формулой из [39]

$$N_2^{(1)} = \frac{\lambda_2(\mu_1(\mu_1 - \lambda_1) + \lambda_1\mu_2)}{(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)} = \frac{\rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2} \left( 1 + \frac{\mu_2\rho_1}{\mu_1(1 - \rho_1)} \right),$$

в точности равно 5. Таким образом, значения  $N_2$  и  $p_{0,0}$  с приближением вероятности сброса заявок второго типа  $q$  к нулю стремятся к соответствующим значениям  $N_2^{(1)}$  и  $p_{0,0}^{(1)}$  для классической системы с отсутствием возможности такого сброса, чего и следовало ожидать. С другой стороны, из [41] известна вероятность простоя при  $p = 0$ , которая оказывается равна  $p_{0,0}^{(0)} \approx 0,426925$ , что также согласуется с таблицей. Что касается вероятности обслуживания заявок второго типа  $p^{(serv)}$ , то она, что естественно, с ростом  $p$  стремится к единице (рис. 5).

## 7. Заключение

В статье рассмотрена СМО с абсолютным приоритетом заявок первого типа над заявками второго типа и стохастическим сбросом. Представлены выражения для вычисления стационарных вероятностей системы, вероятности простоя, вероятности обслуживания неприоритетной заявки (в терминах производящей функции), а также формула для среднего числа заявок второго типа. Проведено сравнение с ранее известными результатами для крайних случаев и показано, что они получаются соответствующими предельными переходами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelenbe E., Glynn P., Sigman K. Queues with Negative Arrivals // J. Appl. Prob. 1991. V. 28. No. 1. P. 245–250.
2. Do T.V. Bibliography on G-networks, Negative Customers and Applications // Math. Comput. Model. 2011. V. 53. P. 205–212.
3. Caglayan M. G-Networks and their Applications to Machine Learning, Energy Packet Networks and Routing: Introduction to the Special Issue // Prob. Eng. Inform. Sci. 2017. V. 31. No. 4. P. 381–395.
4. Малинковский Ю.В., Бородин Н.Н. Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания // Пробл. физики, математики и техники. 2017. № 1. С. 64–68.
5. Малинковский Ю.В. Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания // АИТ. 2017. № 10. С. 155–167.  
Malinkovskii Y.V. Stationary Probability Distribution for States of G-Networks with Constrained Sojourn Time // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1857–1866.
6. Dimitriou I. A Mixed Priority Retrial Queue with Negative Arrivals, Unreliable Server and Multiple Vacations // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. P. 1295–1309.
7. Rajkumar M. An  $(s, S)$  Retrial Inventory System with Impatient and Negative Customers // Int. J. Math. Oper. Res. 2014. V. 6. P. 106–122.

8. *Farkhadov M., Fedorova E.* Asymptotic Analysis of Retrial Queue  $M|M|1$  with Negative Calls Under Heavy Load Condition // Distributed Comput. Commun. Networks. 2017. P. 470–475.
9. *Farkhadov M., Fedorova E.* Retrial Queue  $M|M|1$  with Negative Calls Under Heavy Load Condition // Commun. Comput. Inform. Sci. 2017. V. 700. P. 406–416.
10. *Zidani N., Spiteri P., Djellab N.* Numerical Solution for the Performance Characteristics of the  $M|M|C|K$  Retrial Queue with Negative Customers and Exponential Abandonments by Using Value Extrapolation Method // RAIRO-Oper. Res. 2019. V. 53. P. 767–786.
11. *Kyung C. Chae, Hyun M. Park, Won S. Yang.* A  $GI|Geo|1$  Queue with Negative and Positive Customers // Appl. Math. Model. 2010. V. 34. P. 1662–1671.
12. *Wang J., Huang Y., Dai Z.* A Discrete-Time On-Off Source Queueing System with Negative Customers // Comput. Ind. Eng. 2011. V. 61. P. 1226–1232.
13. *Gao Sh., Wang J., Zhang D.* Discrete-Time  $GI^X|Geo|1|N$  Queue with Negative Customers and Multiple Working Vacations // J. Korean Stat. Soc. 2013. V. 42. P. 515–528.
14. *Wang J., Huang Y., Do T.* A Single-Server Discrete-Time Queue with Correlated Positive and Negative Customer Arrivals // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. P. 6212–6224.
15. *Lee D.H., Kim K.* Analysis of Repairable  $Geo|G|1$  Queues with Negative Customers // Appl. Math. Model. 2014. Article ID 350621, 10 P.
16. *Senthil Vadivu A., Arumuganathan R., Senthil Kumar M.* Analysis of Discrete-Time Queues with Correlated Arrivals, Negative Customers and Server Interruption // RAIRO-Oper. Res. 2016. V. 50. P. 67–81.
17. *Klimenok V.I., Dudin A.N.* A  $BMAP|PH|N$  Queue with Negative Customers and Partial Protection of Service // Commun. Statist. Simulat. Comput. 2012. V. 41. No. 7. P. 1062–1082.
18. *Rajadurai P., Chandrasekaran M., Saravananarajan M.C.* Steady State Analysis of Batch Arrival Feedback Retrial Queue with Two Phases of Service, Negative Customers, Bernoulli Vacation and Server Breakdown // Int. J. Math. Oper. Res. 2015. V. 7. P. 519–546.
19. *Singh C.J., Jain M., Kaur S., Meena R.K.* Retrial Bulk Queue with State Dependent Arrival and Negative Customers // Proc. Sixth Int. Conf. on Soft Computing for Problem Solving. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2017. V. 547. P. 290–301.
20. *Ayyappan G., Thamizhselvi P.* Transient Analysis of  $M^{[X_1]}, M^{[X_2]}/G_1, G_2/1$  Retrial Queueing System with Priority Services, Working Vacations and Vacation Interruption, Emergency Vacation, Negative Arrival and Delayed Repair // Int. J. Appl. Comput. Math. 2018. V. 4. Article number: 77. 35 P.
21. *Маталыцкий М.А.* Прогнозирование ожидаемых доходов в марковских сетях с положительными и отрицательными заявками // АИТ. 2017. № 5. С. 56–70.  
*Matalytski M.A.* Forecasting Anticipated Incomes in the Markov Networks with Positive and Negative Customers // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 5. P. 815–825.
22. *Lee D.H.* Optimal Pricing Strategies and Customers' Equilibrium Behavior in an Unobservable  $M|M|1$  Queueing System with Negative Customers and Repair // Math. Probl. Eng. 2017. Article ID 8910819. 11 P.
23. *Matalytski M.* Finding Expected Revenues in G-network with Multiple Classes of Positive and Negative Customers Probability in the Engineering and Informational Sciences // Prob. Eng. Inform. Sci. 2019. V. 33. No. 1. P. 105–120.



24. *Matalytski M.* Analysis of the Network with Multiple Classes of Positive and Negative Customers at a Transient Regime // *Prob. Eng. Inform. Sci.* 2019. V. 33, No. 2. P. 172–185.
25. *Sun K., Wang J.* Equilibrium Joining Strategies in the Single Server Queues with Negative Customers // *Int. J. Comput. Math.* 2019. V. 96. No. 6. P. 1169–1191.
26. *Xu Xiu-li, Wang Xian-ying, Song Xiao-feng, Li Xiao-qing.* Fluid Model Modulated by an  $M|M|1$  Working Vacation Queue with Negative Customer // *Acta. Math. Appl. Sin.-E.* 2018. V. 34. No. 2. P. 404–415.
27. *Chin C.H., Koh S.K., Tan Y.F., Pooi A.H., Goh Y.K.* Stationary Queue Length Distribution of A Continuous-Time Queueing System with Negative Arrival // *J. Phy. Conf.* 2018. V. 1132. Article ID 012057.
28. *Peng Y.* The MAP/G/1 G-queue with Unreliable Server and Multiple Vacations // *Informatica.* 2019. V. 43. No. 4. P. 545–550.
29. *Gupta U., Kumar N., Barbhuiya F.* A Queueing System with Batch Renewal Input and Negative Arrivals // 2020. arXiv:2002.08209v1.
30. *Kreinin A.* Queueing Systems with Renovation // *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 1997. V. 10. No. 4. P. 431–443.
31. *Бочаров П.П., Зарядов И.С.* Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением // *Вест. Росс. ун-та дружбы народов. Сер. “Математика. Информатика. Физика”.* 2007. № 1–2. С. 14–23.
32. *Зарядов И.С., Печинкин А.В.* Стационарные временные характеристики системы  $GI|M|n|_{\infty}$  с некоторыми вариантами дисциплины обобщенного обновления // *АиТ.* 2009. № 12. С. 161–174;  
*Zaryadov I.S., Pechinkin A.V.* Stationary Time Characteristics of the  $GI|M|n|_{\infty}$  System with Some Variants of the Generalized Renovation Discipline // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 12. P. 2085–2097.
33. *Зарядов И.С.* Система массового обслуживания  $GI|M|n|_{\infty}$  с обобщенным обновлением // *АиТ.* 2010. № 4. P. 130–139.  
*Zaryadov I.S.* The  $GI|M|n|_{\infty}$  Queueing System with Generalized Renovation // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 4. P. 663–671.
34. *Гришунина Ю.Б.* Оптимальное управление очередью в системе  $M|G|1|_{\infty}$  с возможностью ограничения приема заявок // *АиТ.* 2015. № 3. С. 79–93.  
*Grishunina Y.B.* Optimal Control of Queue in the  $M|G|1|_{\infty}$  System with Possibility of Customer Admission Restriction // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 3. P. 433–445.
35. *Агаларов Я.М., Шоргин В.С.* Об одной задаче максимизации дохода СМО типа  $G|M|1$  с пороговым управлением очередью // *Информатика и ее применения.* 2017. Т. 11. Вып. 4. С. 55–64.
36. *Konovalov M.G., Razumchik R.V.* Comparison of Two Active Queue Management Schemes through the  $M|D|1|N$  Queue // *Inform. Appl.* 2018. V. 12. No. 4. P. 9–15.
37. *Adams R.* Active Queue Management: A Survey // *IEEE Commun. Surveys Tutorials.* 2013. V. 15. No. 3. P. 1425–1476.
38. *Anup Sh., Ashok B.* A Survey on Active Queue Management Techniques // *Int. J. Eng. Comput. Sci.* 2016. V. 5. P. 18993–18997.
39. *White H., Christie Lee S.* Queueing with Preemptive Priorities or with Breakdown // *Oper. Res.* 1958. V. 6. No. 1. P. 79–95.
40. *Зарядов И.С., Горбунова А.В.* Анализ характеристик системы массового обслуживания с двумя входящими потоками, относительным приоритетом и сбросом // *Современные информационные технологии и ИТ-образование.* 2014. № 10. С. 388–393.

41. *Zaryadov I.S., Gorbunova A.V.* The Analysis of Queueing System with Two Input Flows and Stochastic Drop Mechanism // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Informatics. Physics". 2015. No. 2. P. 33–37.
42. *Зарядов И.С., Королькова А.В.* Применение модели с обобщенным обновлением к анализу характеристик систем активного управления очередями типа Random Early Detection (RED) // T-Comm – Телекоммуникации и транспорт. 2011. № 7. С. 84–88.
43. *Chydzinski A., Mrozowski P.* Queues with Dropping Functions and General Arrival Processes // PLoS ONE. 2016. V. 11. Article ID 0150702.
44. *Wang Y., Lin Ch., Li Q.-L., Fang Y.* A Queueing Analysis for the Denial of Service (DoS) Attacks in Computer Networks // Computer Networks. 2007. V. 51. P. 3564–3573.
45. *Imamverdiyev Y., Nabiyev B.* Queueing Model for Information Security Monitoring Systems // PIT. 2016. V. 07. No. 1. P. 28–32.
46. *Kammas P., Komninos T., Stamatiou Y.C.* Queueing Theory Based Models for Studying Intrusion Evolution and Elimination in Computer Networks // Fourth Int. Conf. on Information Assurance and Security. 2008. P. 167–171.
47. *Ariba Y., Gouaisbaut F., Rahme S., Labit Y.* Traffic Monitoring in Transmission Control Protocol/Active Queue Management Networks through a Time-Delay Observer // IET Control Theory A. 2012. V. 6. No. 2. P. 506–517.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.*

Поступила в редакцию 26.12.2019

После доработки 27.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020