Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Линейные системы

© 2020 г. **В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)**
(Сочинский институт Российского университета дружбы народов)

К ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ДЕТЕКТИРУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается нелинейная нестационарная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием общего вида, допускающая «частичное» (по части переменных) нулевое положение равновесия. Находятся условия, при которых устойчивость (асимптотическая устойчивость) по части переменных «частичного» положения равновесия означает его устойчивость (асимптотическую устойчивость) по всем переменным. Дается анализ указанных условий с позиций проблемы частичной детектируемости рассматриваемой системы и вводится понятие ее частичной нуль-динамики. Обсуждается приложение к задаче частичной стабилизации управляемых систем.

Ключевые слова: нелинейная нестационарная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием), частичная устойчивость, частичная детектируемость, частичная нуль-динамика.

DOI: 10.31857/S0005231020020014

1. Введение

Классическое определение Ляпунова – Румянцева устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия (невозмущенного движения) [1, 2] дано для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и предполагает, что область начальных возмущений является достаточно малой окрестностью этого положения равновесия. Наряду с данной постановкой задачи также анализируются случаи, когда начальные возмущения, являясь малыми по исследуемой на устойчивость части переменных, могут быть в то же время произвольными [3–5] или большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) [4, 5] по оставшимся «неконтролируемым» переменным. Рассмотрена [6] и более общая ситуация, когда начальные возмущения являются большими по одной части и произвольными по другой части «неконтролируемых» переменных.

С другой стороны, в задачах устойчивости «частичных» (по части переменных) нулевых положений равновесия также естественно [6] допущение о том, что начальные возмущения «неконтролируемых» переменных, не определяющих «частичное» положение равновесия, могут быть большими по одной части и произвольными по оставшейся их части. В данном случае анализ устойчивости «частичного» положения равновесия проводится при более «мягких» требованиях к функциям Ляпунова, чем в случае произвольных начальных возмущений «неконтролируемых» переменных. Поэтому возможен определенный компромисс между содержательным смыслом понятия устойчивости и требованиями к функциям Ляпунова.

Помимо систем обыкновенных дифференциальных уравнений, указанные задачи частичной устойчивости анализируются [7] также применительно к системам функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием). Для решения используется метод функционалов Ляпунова – Красовского с соответствующими дополнениями.

В данной работе рассматривается нелинейная нестационарная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) общего вида, допускающая «частичное» (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия. Предполагается, что данное положение равновесия устойчиво (асимптотически устойчиво) также по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только по их заданной части. При этом делается допущение [7] о том, что значения нормы тех компонент начальной вектор-функции, которые соответствуют переменным, не определяющим указанное «частичное» положение равновесия, могут быть большими по одной части и произвольными по отношению к их оставшейся части.

Находятся условия, при выполнении которых установленная устойчивость (асимптотическая устойчивость) по части переменных «частичного» нулевого положения равновесия означает его устойчивость (асимптотическую устойчивость) по всем переменным. Указанные условия включают требование равномерной асимптотической устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия подсистемы, «приведенной» по переменным, устойчивость «частичного» положения равновесия по которым изначально не известна. Также накладывается ограничение на связь «приведенной» подсистемы с другими частями системы.

Дается анализ полученных условий с позиций проблемы частичной детектируемости [8–11] рассматриваемой системы; при этом вводится понятие ее частичной нуль-динамики. Обсуждается приложение полученных результатов к задаче частичной стабилизации [3, 4, 10, 12–18].

2. Постановка задачи

Пусть $\tau > 0$ — заданное число, R^n — линейное пространство n-мерных векторов $\mathbf{x}$ с нормой $|\mathbf{x}| = \max|x_i|$ (i-я компонента вектора $\mathbf{x}$), C — банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi} : [-\tau, 0] \to R^n$ со стандартной нормой $||\boldsymbol{\varphi}|| = \max|\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$ ($\theta \in [-\tau, 0]$), $R_+ = [0, +\infty)$. Если $t_0, \beta \in R_+$, $\beta \geq t_0$, то для непрерывной функции $\mathbf{x}(t) : [t_0 - \tau, \beta] \to R^n$ определим функцию $\mathbf{x}_t \in C$ соотношением $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t + \theta)$ ($\theta \in [-\tau, 0]$); под $\mathbf{x}'(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Сделаем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ (T — знак транспонирования), где $\mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{z} \in R^{n-m}$ ($1 \leq m \leq n$). В соответствии с этим разбиением положим $C = C^{\mathbf{y}} \times C^{\mathbf{z}}$, где $C^{\mathbf{y}}$ и $C^{\mathbf{z}}$ — банаховы пространства непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}} : [-\tau, 0] \to R^m$ и $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}} : [-\tau, 0] \to R^{n-m}$ с нормами $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| = \max|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(\theta)|$

и $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}|| = \max|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}(\theta)|$ $(\theta\in[-\tau,0])$. Для $\boldsymbol{\varphi}\in C$ имеем $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и $||\boldsymbol{\varphi}|| = \max(\,||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}||,\ ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}||)$.

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) [19]

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{X}(t,\mathbf{x}_t),$$

которую с учетом указанных разбиений представим в виде

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Y}(t,\mathbf{y}_t,\mathbf{z}_t), \quad \mathbf{z}'(t) = \mathbf{Z}(t,\mathbf{y}_t,\mathbf{z}_t). \tag{1}$$

Допустим, что оператор $\mathbf{X}: R_+\times C\to R^n$, определяющий правую часть системы (1), вполне непрерывен в области

$$G = R_+\times S = \{t\geq 0,\ ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| < h,\ \ ||\boldsymbol{\varphi}_z|| < \infty\} \tag{2}$$

(h — достаточно малое положительное число) и на каждом компактном подмножестве K из области (2) выполняется условие Коши – Липшица: существует постоянная $l = l(K) > 0$ такая, что для любых $(t,\boldsymbol{\varphi}_1),(t,\boldsymbol{\varphi}_2)\in K$ имеет место неравенство $|\mathbf{X}(t,\boldsymbol{\varphi}_2)-\mathbf{X}(t,\boldsymbol{\varphi}_1)|\leq l||\boldsymbol{\varphi}_2-\boldsymbol{\varphi}_1||$.

Тогда [19] для каждой точки $t_0,\boldsymbol{\varphi}$ из области (2) существует единственное решение $\mathbf{x}(t_0,\boldsymbol{\varphi})$ системы (1), продолжимое до границы области S и непрерывно зависящее от $t_0,\boldsymbol{\varphi}$. Следуя [20], обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t;t_0,\boldsymbol{\varphi})$ значение $\mathbf{x}(t_0,\boldsymbol{\varphi})$ в момент времени t и введем предположение о $\mathbf{z}$-продолжимости решений [3, 4, 7]: решения системы (1) определены для тех $t\geq t_0$, при которых $|\mathbf{y}(t;t_0,\boldsymbol{\varphi})| < h$.

Рассмотрим два понятия частичной устойчивости системы (1).

1. *Устойчивость «частичного» положения равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. В пространстве C рассмотрим [7, 21] множество $M = \{\boldsymbol{\varphi}\in C:\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}} = \mathbf{0}\}$. Если $\mathbf{Y}(t,\boldsymbol{\varphi})\equiv\mathbf{0}$ при $\boldsymbol{\varphi}\in M$, то решение $\mathbf{x}(t_0,\boldsymbol{\varphi})$ системы (1) удовлетворяет условию $||\mathbf{y}_t(t_0,\boldsymbol{\varphi})||\equiv\mathbf{0}$. Другими словами, множество $M = \{\mathbf{x}:\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ есть «частичное» положение равновесия системы (1), являющееся (при сделанном предположении о единственности решений) инвариантным множеством этой системы. В этом случае «полное» нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) может и не существовать.

Имея в виду рассмотрение наряду с задачей устойчивости также задачи устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, допустим, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}},\mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Соответственно, компоненту $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ разобьем на две части $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Кроме того, чтобы сделать рассматриваемые задачи частичной устойчивости более содержательными, компоненту $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ также разобьем на две части и представим в виде $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Обозначим через S_δ область в пространстве C такую, что $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| < \delta$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}||\leq L$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}|| < \infty$ (область S_Δ получается заменой δ на Δ), так что рассматриваемые далее понятия устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) будут иметь место при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}$ (for a large values of $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}$ and on the whole with respect to $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}$ [4]).

О п р е д е л е н и е 1 [7]. *«Частичное» положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$:

1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если для каждого* $t_0 \geq 0$*, а также для произвольного числа* $\varepsilon > 0$*, как бы мало оно не было, и для любого заданного числа* $L > 0$ *найдется число* $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ *такое, что из* $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ *следует неравенство* $|\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если* $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если оно равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво и найдется число* $\Delta(L) > 0$ *такое, что произвольное решение* $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ *системы* (1) *с* $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta$ *равномерно по* $t_0, \boldsymbol{\varphi}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta$ *удовлетворяет предельному соотношению*

$$\lim |\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0, \quad t \to \infty. \tag{3}$$

Соответствующие понятия устойчивости по всем переменным «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ определяются как частный случай, заменой $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$.

2. *Устойчивость по части переменных положения равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Допустим, что имеет место условие $\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и система (1) имеет «полное» нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

О п р е д е л е н и е 2 [4]. *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если для каждого* $t_0 \geq 0$*, а также для произвольного числа* $\varepsilon > 0$*, как бы мало оно не было, найдется число* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из* $||\boldsymbol{\varphi}|| < \delta$ *следует неравенство* $|\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если* $\delta = \delta(\varepsilon)$;

3) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если оно равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво и найдется число* $\Delta > 0$ *такое, что произвольное решение* $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ *системы* (1) *с* $||\boldsymbol{\varphi}|| < \Delta$ *равномерно по* t_0, $\boldsymbol{\varphi}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}|| < \Delta$ *удовлетворяет предельному соотношению* (3).

Соответствующие понятия $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ получаются заменой $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$.

З а д а ч а 1. Требуется указать общую структурную форму нелинейной системы (1), для которой: 1) $\mathbf{y}_1$-устойчивость «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ означает его устойчивость по всем переменным; 2) $\mathbf{y}_1$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ означает его $\mathbf{y}$-устойчивость.

З а м е ч а н и е 1. Изучаемые свойства системы (1) при соответствующей детализации можно трактовать как локальную *частичную* устойчивость по «*выходу — состоянию*» (output to state stability [8]) в случае 1), устойчивость по «*измеримому — заданному выходу*» (measurement to error stability [9]) в случае 2), а также как соответствующие свойства *частичной детектируемости* этой системы. Детализация связана с функционально-дифференциальной формой системы (1), рассмотрением не только «полного», но и «частичного» положения равновесия, а также с особенностью используемых понятий устойчивости «частичного» положения равновесия.

З а м е ч а н и е 2. Общий подход [8–11] к анализу указанных свойств системы (1) основан на прямом методе Ляпунова, применение которого в конкретных случаях может быть затруднено. Это обстоятельство определяет актуальность поставленной задачи выявления общей структурной формы системы (1), наделенной изучаемыми свойствами.

3. Условия частичной устойчивости

В соответствии со сделанным разбиением $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим первую группу уравнений системы (1) в виде двух групп уравнений

$$\mathbf{y}_1'(t) = \mathbf{Y}_1(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t), \quad \mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t),$$

а оператор $\mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi})$ представим следующим образом:

$$\mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) + \mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}),$$
$$(R(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}), \mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \mathbf{0}) \equiv R(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}) \equiv \mathbf{0}).$$

Система функционально-дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_{2t}) \tag{4}$$

будет «приведенной» (по переменным $\mathbf{y}_2$) подсистемой системы (1).

Допустим, что оператор $\mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$ вполне непрерывен в области $t \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < h$ и на каждом компактном подмножестве из этой области удовлетворяет условию Коши – Липшица.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) *найдется вполне непрерывный оператор* $\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$, $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такой, что в области* (2) *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})| \leq |\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})|\,; \tag{5}$$

2) *положение равновесия* $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ *«приведенной» подсистемы* (4) *равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным*;

3) *«частичное» положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво* (*равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво*).

Тогда «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *равномерно устойчиво* (*равномерно асимптотически устойчиво*) *по всем переменным.*

Доказательство теоремы 1 вынесено в Приложение.

Условие 1) теоремы 1 можно ослабить, заменяя соответствующие требования $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) более сильными требованиями $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости, где $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ – некоторая непрерывная в области $D = \{t \geq 0, ||\mathbf{y}|| < h, ||\mathbf{z}|| < \infty\}$ вектор-функция. Наличие такой устойчивости позволяет использовать вместо неравенства (5) менее ограничительное неравенство

$$|\mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})| \leq |\mathbf{Y}_2^{**}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})|\,, \tag{6}$$

выполняющееся в области $G^* = R_+ \times S = \{t \geq 0, ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| + ||\boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{x})|| < h,$ $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}|| < \infty\}$. Здесь $\mathbf{Y}_2^{**}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$ – вполне непрерывный в G^* оператор, $\mathbf{Y}_2^{**}(\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \equiv \mathbf{Y}_2^{**}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$; $||\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{\varphi})|| = \sup|\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{\varphi}(\theta))|$ при $\theta \in [-\tau, 0]$, $t \in R_+$. Кроме того, в результате «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ также обладает более сильным соответствующим свойством $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости.

Понятия $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости формально вводятся заменой $\mathbf{y}_1(t;t_0,\boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}_1(t;t_0,\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\mu}(t;t_0,\boldsymbol{\varphi})$ в определении 1. Содержательно их можно трактовать как *«расширенно-оценочную»* $\mathbf{y}_1$-устойчивость (дополненную оценкой для подбираемой $\boldsymbol{\mu}$-функции) «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1). По смыслу задачи такая устойчивость должна быть «промежуточной» между $\mathbf{y}_1$-устойчивостью и устойчивостью по всем переменным «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. В этих рамках «расширение» понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости может происходить за счет зависимости $\boldsymbol{\mu}$-функции не только от $t, \mathbf{y}$, но и от $\mathbf{z}$, что и требуется для перехода к неравенству (6). Учитывая включение $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, ограничимся подбором «пробных» $\boldsymbol{\mu}$-функций вида $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{y},\mathbf{z}_1)$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{0},\mathbf{z}_1) \equiv \mathbf{0}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 2) *теоремы 1 и найдется непрерывная в области D вектор-функция $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{y},\mathbf{z}_1)$ такая, что*:

1) *«частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы* (1) *равномерно* $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$*-устойчиво* (*равномерно асимптотически* $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$*-устойчиво*);

2) *в области G^* выполняется неравенство* (6).

Тогда «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) по всем переменным.

Доказательство по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Допустим, что $\mathbf{X}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и система (1) имеет нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; соответственно $\mathbf{R}(t,\mathbf{0},\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2},\mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}(t,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Следствие. Пусть выполнены условия 1), 2) *теоремы 1 и положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы* (1) *равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво* (*равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво*). *Тогда это положение равновесия равномерно $\mathbf{y}$-устойчиво* (*равномерно асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво*).

В данном случае неравенство (5) также можно заменить менее ограничительным неравенством (6), используя понятия $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости, получающиеся заменой $\mathbf{y}_1(t;t_0,\boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}_1(t;t_0,\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\mu}(t;t_0,\boldsymbol{\varphi})$ в определении 2. Поскольку вместо включения $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ предполагается условие $||\boldsymbol{\varphi}|| < \delta$, то сделанное ранее ограничение $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{y},\mathbf{z}_1)$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t,0,\mathbf{z}_1) \equiv \mathbf{0}$ не требуется.

Замечание 3. Теоремы 1, 2 являются развитием соответствующих результатов А. Халаная [22], а также результатов [23]. В отличие от [22], где анализируется связь между устойчивостью по части и по всем переменным нулевого положения равновесия, изучаются более общие свойства системы (1). Такие свойства рассмотрены ранее в [23], но без учета эффекта последействия в изучаемой системе. Кроме того, в отличие от [23] ограничение на связь «приведенной» подсистемы с другими частями системы анализируется на основе введенных понятий $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости.

З а м е ч а н и е 4. Неравенство (5) легко проверяется, если из тех или иных соображений известна заранее равномерная (по $t_0, \boldsymbol{\varphi}$) $\mathbf{z}$-ограниченность решений системы (1), начинающихся при $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$.

З а м е ч а н и е 5. Анализ задач частичной устойчивости и стабилизации, а также обзор результатов можно найти в [3, 4, 10, 12].

П р и м е р 1. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$
\begin{gathered}
y_1' = -2y_1(t) + y_1(t-\tau) + y_1^2(t) + y_2^2(t-\tau)z_1(t-\tau), \\
y_2' = [-1 + y_1(t)\sin z_2(t-\tau)]y_2(t) + f(\mathbf{x}(t)), \\
z_1'(t) = [1 - 2y_1(t)\sin z_2(t-\tau)]z_1(t), \\
z_2'(t) = e^t y_1(t-\tau)z_2(t).
\end{gathered} \tag{7}
$$

1. Допустим, что $f(\mathbf{x}(t)) \equiv 0$. Введением новой переменной $\mu_1 = y_2^2 z_1$ из системы (7) можно выделить подсистему

$$
\begin{gathered}
y_1' = -2y_1(t) + y_1(t-\tau) + \mu_1(t-\tau) + y_1^2(t), \\
\mu_1'(t) = -\mu_1(t),
\end{gathered} \tag{8}
$$

нулевое положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ которой равномерно асимптотически устойчиво по y_1, μ_1 на основании теоремы об устойчивости (по всем переменным) по линейному приближению [24].

Поскольку для переменной $\mu_1 = \mu_1(y_2, z_1) = y_2^2 z_1$ имеет место тождество $\mu_1(0, z_1) \equiv 0$ и эта переменная не зависит от z_2, то «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) равномерно асимптотически y_1-устойчиво (при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2}).

«Приведенная» подсистема (4) в данном случае имеет вид

$$
y_2' = -y_2(t), \tag{9}
$$

и ее нулевое положение равновесия $y_2 = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Кроме того, в данном случае выполнено неравенство (5), в котором $|Y_2^*| = |\varphi_{y_1}(0)| \cdot |\varphi_{y_2}(0)|$.

На основании теоремы 1 заключаем, что «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным (при больших значениях φ_{z_1}в целом по φ_{z_2}).

Система (7) допускает также положение равновесия $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$, которое равномерно асимптотически (y_1, y_2)-устойчиво.

2. Допустим, что $f(\mathbf{x}(t)) = y_2^3(t)z_1(t)$. В этом случае из системы (7) можно выделить подсистему, первое уравнение которой совпадает с первым уравнением подсистемы (8), а второе уравнение заменяется уравнением

$$
\mu_1' = -\mu_1(t) + 2\mu_1^2(t).
$$

Нулевое положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ указанной подсистемы также равномерно асимптотически устойчиво. В рассматриваемом случае с точки зрения проверки выполнимости условий теоремы 2 важно, что «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) не только равномерно асимптотически y_1-устойчиво, но и равномерно асимптотически (y_1, μ_1)-устойчиво (при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2}).

«Приведенная» подсистема (4) также имеет вид (9). Кроме того, выполнено неравенство (6), в котором $|Y_2^{**}| = |\varphi_{y_1}(0)| \cdot [|\varphi_{y_2}(0)| + |\mu_1(-\tau)|]$.

На основании теоремы 2 заключаем, что в данном случае «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) равномерно асимптотически устойчиво (при больших значениях φ_{z_1}в целом по φ_{z_2}).

4. Приложение к нелинейным управляемым системам

Пусть система функционально-дифференциальных уравнений (1), в которой $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ описывает возмущенное движение объекта управления с учетом позиционных управлений $\mathbf{u}$, формируемых по принципу обратной связи с задержками (запаздыванием) в каналах управления.

Считаем, что переменные, входящие в векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}$, измеряются и используются для формирования управлений $\mathbf{u}$ вида $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{z}_t)$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, а переменные, входящие в вектор $\mathbf{y}_2$, не измеряются. Пусть формируемые управления таковы, что замкнутая система (1) удовлетворяет общим требованиям, указанным в разделе 2, и «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ этой системы равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво.

Поскольку при $\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ управления нулевые, то динамика «приведенной» подсистемы (4) не зависит от формируемых управлений, а определяется только структурой и параметрами объекта. Считаем их выбранными так, что нулевое положение равновесия «приведенной» подсистемы (4) равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным.

В результате при выбранной структуре и параметрах объекта достигнутая за счет выбора управлений равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) означает равномерную асимптотическую устойчивость по всем переменным.

Аналогично рассматривается ситуация, когда достигнутая равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ замкнутой системы (1) означает равномерную асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость.

5. Условия частичной детектируемости

При выполнении условия (5) динамика решений $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1), для которых $\mathbf{y}_{1t} = \mathbf{0}$ (нуль-динамика системы (1) по $\mathbf{y}_1$, следуя терминологии [25, 26]), определяется подсистемой

$$\mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_{2t}), \quad \mathbf{z}'(t) = Z(t, \mathbf{0}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t).$$

«Приведенная» подсистема (4) определяет *частичную нуль-динамику* системы (1) по «измеримым» переменным, входящим в вектор $\mathbf{y}_1$: динамику $\mathbf{y}$-компоненты решений $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$, для которых $\mathbf{y}_{1t} = \mathbf{0}$.

Определение 3. Система (1) *локально частично детектируема* (*zero – partial state – detectable*), *если для каждого* $t_0 \geq 0$, *произвольного числа* $\varepsilon > 0$ *и для любого заданного числа* $L > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, L) > 0$ *такое, что*

$$\mathbf{y}_{1t} \equiv \mathbf{0} \quad (t \geq t_0) \quad \Rightarrow \quad \lim |\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0, \quad t \to \infty$$

(*и, кроме того,* $|\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$) *при* $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ *и всех* $t \geq t_0$.

Теорема 3. Если выполнены условия 1) *и* 2) *теоремы 1, то система* (1) *локально частично детектируема в смысле определения 3.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1; при этом условие 3) теоремы 1 рассматривается как предположение.

Рассмотрим линейную систему с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1'(t) &= A_{11}\mathbf{y}_1(t) + B_{11}\mathbf{y}_2(t) + C_{11}\mathbf{z}(t) + \\
&\quad + A_{12}\mathbf{y}_1(t-\tau) + B_{12}\mathbf{y}_2(t-\tau) + C_{12}\mathbf{z}(t-\tau), \\
\mathbf{y}_2'(t) &= A_{21}\mathbf{y}_1(t) + B_{21}\mathbf{y}_2(t) + C_{21}\mathbf{z}(t) + \\
&\quad + A_{22}\mathbf{y}_1(t-\tau) + B_{22}\mathbf{y}_2(t-\tau) + C_{22}\mathbf{z}(t-\tau), \\
\mathbf{z}'(t) &= A_{31}\mathbf{y}_1(t) + B_{31}\mathbf{y}_2(t) + C_{31}\mathbf{z}(t) + \\
&\quad + A_{32}\mathbf{y}_1(t-\tau) + B_{32}\mathbf{y}_2(t-\tau) + C_{32}\mathbf{z}(t-\tau),
\end{aligned} \tag{10}$$

где A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Определение 4. Линейная система (10) *частично детектируема* ($\mathbf{y}$*-детектируема по* $\mathbf{y}_1$), *если ее асимптотическая* $\mathbf{y}_1$*-устойчивость означает асимптотическую* $\mathbf{y}$*-устойчивость.*

Введем матрицы

$$D_j = (B_{1j}, \quad C_{1j}), \quad G_j = \begin{pmatrix} B_{2j} & C_{2j} \\ B_{3j} & C_{3j} \end{pmatrix}, \quad L_j = \begin{pmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \end{pmatrix},$$

$$K_{10} = \left(D_1^{\mathrm{T}},\ D_2^{\mathrm{T}}\right), \quad K_{20} = \left(L_1^{\mathrm{T}},\ L_2^{\mathrm{T}}\right),$$

$$K_{1i} = \left(G_1^{\mathrm{T}} K_{1,\,i-1},\, G_2^{\mathrm{T}} K_{1,\,i-1}\right), \quad K_{2i} = \left(C_{31}^{\mathrm{T}} K_{2,\,i-1},\, C_{32}^{\mathrm{T}} K_{2,\,i-1}\right),$$

$$(1 \leq i \leq p-1; j = 1, 2;\ p = \dim(\mathbf{z})),$$

и обозначим через s_j – минимальные числа s такие, что

$$\operatorname{rank} K_{j,\,s-1}^* = \operatorname{rank} K_{j,\,s}^*,$$
$$K_{j0}^* = K_{j0}, \quad K_{j\,s}^* = (K_{j0},\, K_{j1}, \ldots,\, K_{j\,s})\,(1 \leq s \leq p-1; j = 1, 2)\,.$$

Теорема 4. Если выполняется условие

$$\operatorname{rank} K_{1,\,s_1}^* = \dim(\mathbf{y}_2) + \operatorname{rank} K_{2,\,s_2}^*, \tag{11}$$

то система (10) $\mathbf{y}$*-детектируема по* $\mathbf{y}_1$.

Доказательство теоремы 4 вынесено в Приложение.

З а м е ч а н и е 6. Условие (11) не предполагает анализ частичной нуль-динамики, но и не охватывает случай «слабых» связей в системе (10). Например, если матрицы B_{11}, C_{11} и B_{12}, C_{12} нулевые, для $\mathbf{y}$-детектируемости по $\mathbf{y}_1$ требуется асимптотическая $\mathbf{y}_2$-устойчивость подсистемы, «приведенной» по $\mathbf{y}_2, \mathbf{z}$.

П р и м е р 2. Пусть система (10) имеет вид

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -a & 2a \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_1(t-\tau), \tag{12}$$
$$\mathbf{x} = (y_1, y_2, z_1, z_2)^{\mathrm{T}}, \quad a = \mathrm{const}.$$

В данном случае

$$K_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad K_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ -(1+a) \\ 2(1+a) \end{pmatrix}, \quad K_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2a \\ -2(1+2a) \end{pmatrix},$$
$$K_{20} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -2 & 2a \end{pmatrix}, \quad K_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 2 & 2a \end{pmatrix},$$
$$s_1 = \begin{cases} 2 & (\operatorname{rank} K_{10}^* < \operatorname{rank} K_{11}^* = \operatorname{rank} K_{12}^*) \text{ при } a \neq 0, \\ 1 & (\operatorname{rank} K_{10}^* = \operatorname{rank} K_{11}^*) \text{ при } a = 0 \end{cases}$$
$$s_2 = 1 \quad (\operatorname{rank} K_{20}^* = \operatorname{rank} K_{21}^*) \text{ при любом } a$$

и имеют место соотношения

$$\operatorname{rank} K_{12}^* = 1 + \operatorname{rank} K_{21}^* = 2 \text{ при } a \neq 0,$$
$$\operatorname{rank} K_{11}^* = 1 < 1 + \operatorname{rank} K_{21}^* = 2 \text{ при } a = 0.$$

Условие (11) (y_1, y_2)-детектируемости по y_1 системы (12) выполнено при $a \neq 0$. Отметим, что при любом a система (12) асимптотически (y_1, y_2)-устойчива, но неустойчива по Ляпунову (по всем переменным).

6. Заключение

Получены легко интерпретируемые условия, определяющие структурную форму нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений, для которой равномерная устойчивость (равномерная асимптотическая устойчивость) по части переменных «частичного» нулевого положения равновесия означает его равномерную устойчивость (равномерную асимптотическую устойчивость) по всем переменным. Эти условия включают требование равномерной асимптотической устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия подсистемы, «приведенной» по переменным, устойчивость «частичного» положения равновесия по которым изначально не известна, а также ограничение на связь «приведенной» подсистемы с другими частями системы. Прямой метод Ляпунова используется как средство получения таких условий.

Полученные условия проанализированы с позиций проблемы частичной детектируемости системы; с этой целью введено понятие ее частичной нуль-динамики. Дано приложение к задаче частичной стабилизации.

Также найдены достаточные условия частичной детектируемости линейных систем с постоянными коэффициентами и запаздыванием, не требующие анализа устойчивости «приведенной» подсистемы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. При выполнении условия 2) для системы (4) найдется [24] функционал $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$, определенный и непрерывный в области $t \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| \leq h$ и удовлетворяющий условию ($k = \text{const} > 0$)

$$(\text{П.1}) \qquad |V(t, \boldsymbol{\varphi}''_{\mathbf{y}_2}) - V(t, \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}_2})| \leq k||\boldsymbol{\varphi}''_{\mathbf{y}_2} - \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}_2}||,$$

для которого

$$(\text{П.2}) \qquad a_1(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||) \leq V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq a_2(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||),$$

$$(\text{П.3}) \qquad V'_{(4)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq -a_3(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||),$$

где $a_i(r), a_i(0) = 0$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in R_+$ функции (функции типа Хана).

Под производной V' функционала понимается величина [19, 24]

$$V' = \overline{\lim} \frac{1}{\delta}\{V[t+\delta, \mathbf{y}_{2t+\delta}] - V[t, \mathbf{y}_{2t}]\}, \quad \delta \to 0^+,$$

и при сделанных предположениях относительно V-функционала указанный предел определяется единственным образом.

Кроме того, при сделанных предположениях относительно V-функционала аналогично [24] можно показать, что производные V-функционала в силу систем (1) и (4) связаны соотношением

$$(\text{П.4}) \qquad V'_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq V'_{(4)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) + k|\mathbf{R}(t,\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})|.$$

Учитывая неравенства (5), (П.1)–(П.3) заключаем, что соотношение (П.4) принимает вид

$$(\text{П.5}) \qquad V'_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq -a_3(a_2^{-1}(V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}))) + k|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})|.$$

Дальнейшее доказательство разобьем на две части, соответствующие случаям, когда в силу условия 3) теоремы «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1): 1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво; 2) равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво.

I. Если «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво, то для каждого $t_0 \geq 0$, произвольного числа $\varepsilon > 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, L) > 0$ такое, что из $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ следует $||\mathbf{y}_{1t}|| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Положим $\delta_1(\varepsilon) = b(\varepsilon)/k$, $b(\varepsilon) = a_3(a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)))$. Можно указать $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что из $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}|| < \delta_2$ следует $|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})| \leq \delta_1$ для $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < \varepsilon$. С другой стороны, в силу равномерной $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) имеем $||\mathbf{y}_{1t}|| < \delta_2(\varepsilon)$ при всех $t \geq t_0$, если $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ и $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$. Поскольку в области $t \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < \varepsilon$ при $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$, выполнено условие $|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})| \leq \delta_1$, то из неравенства (П.5) следует, что

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) < 0 \quad \text{при} \quad V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\varepsilon). \tag{П.6}$$

Пусть $\delta^*(\varepsilon, L) = \min\{\delta(\varepsilon, L), \delta[\delta_2(\varepsilon)], \delta_3(\varepsilon)\}$, $\delta_3(\varepsilon) = a_2^{-1}(a_1(\varepsilon))$. Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1) с $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$. В силу условий (П.2) в данном случае имеем $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq a_2(\delta_3(\varepsilon))$ и, следовательно, $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq a_1(\varepsilon)$. Покажем, что

$$V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad t \geq t_0. \tag{П.7}$$

Предположим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\varepsilon)$ при $t \in [t_0, t_1)$, но $V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\varepsilon)$ при $t_0 = t_1$. Тогда имеет место неравенство $V'_{(1)}(t_1, \mathbf{y}_{2t}) \geq 0$, которое противоречит условию (П.6). Значит, неравенство (П.7) справедливо для всех $t \geq t_0$ и на основании условия $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \geq a_1(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||)$ заключаем, что $||\mathbf{y}_{2t}|| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$, если $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ и $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$.

II. Равномерная $\mathbf{y}_2$-устойчивость «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) следует из первой части доказательства теоремы 1: для каждого $t_0 \geq 0$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta^*(\varepsilon, L) > 0$ такое, что из $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$, следует $||\mathbf{y}_{2t}|| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. Покажем, что «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) является также равномерно $\mathbf{y}_2$-притягивающим. Это значит, что при заданном $\delta^*(\varepsilon, L) > 0$ для любого $\eta \in (0, \delta^*)$ существует число $T(\eta, L) > 0$ такое, что из $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$, следует $||\mathbf{y}_{2t}|| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + T(\eta, L)$.

В рассматриваемом случае предельное соотношение

$$|\mathbf{R}(t, \mathbf{y}_{1t}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})| \to 0, \quad t \to \infty \tag{П.8}$$

будет выполняться равномерно по $t_0 \geq 0$ и $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta$ ($\Delta < \delta^*$), если $\Delta > 0$ определяет область равномерного $\mathbf{y}_1$-притяжения «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1).

Положим $\eta \in (0, \Delta)$; в этом случае $\eta < \delta^*(\varepsilon, L) < a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)) < \varepsilon$. В силу условий (П.4), (П.8) при $a_2^{-1}(a_1(\eta)) \leq ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < \varepsilon$ и $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta(\Delta < \delta^*)$ найдется такое $T_1(\eta, L) > 0$, что для всех $t \geq T_1(\eta, L)$ выполняется неравенство

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) \leq -1/2b(\eta). \tag{П.9}$$

Следовательно, при $t \geq T_1(\eta, L)$ имеем

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) < 0 \quad \text{при} \quad V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\eta). \tag{П.10}$$

Положим

$$t_{0*} = \max\left[t_0, T_1(\eta, L)\right], \quad T_2(\eta) = \frac{2a_2(\eta) - a_1(\eta)}{b(\eta)}.$$

Покажем, что на отрезке $[t_{0*}, t_{0*} + T_2(\eta, L)]$ существует момент времени t_*, для которого

$$V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta) \quad \text{при} \quad t = t_*. \tag{П.11}$$

Допустим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) \geq a_1(\eta)$ для всех $t \in (t_{0*}, t_{0*} + T_2(\eta, L))$. Тогда на этом интервале времени $||\mathbf{y}_{2t}|| \geq a_2^{-1}(a_1(\eta))$ и справедливо соотношение (П.9), что приводит к противоречивым неравенствам

$$0 < a_1(\eta) \leq V\left(t_{0*} + T_2(\eta, L), \mathbf{y}_{2(t_{0*}+T_2(\eta,L))}\right) = V(t_{0*}, \mathbf{y}_{2(t_{0*})}) +$$
$$+ \int\limits_{t_{0*}}^{t_{0*}+T_2(\eta,L)} V'_{(1)}(s, \mathbf{y}_{2s}) ds \leq a_2(\eta) - 1/2 b(\eta) T_2(\eta, L) = 1/2 a_1(\eta).$$

Из условий (П.10), (П.11) заключаем, что неравенство $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta)$ имеет место для всех $t = t_*$. Действительно, допустим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta)$ при $t \in [t_*, t^*)$, но $V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\eta)$ при $t = t^*$. Тогда $V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) \geq 0$ при $t = t^*$, что противоречит условию (П.11). Поэтому неравенство $||\mathbf{y}_{2t}|| < \eta$ выполняется для всех $t \geq t_*$ на основании условия $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \geq a_1(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||)$. Следовательно, имеем $||\mathbf{y}_{2t}|| < \eta$ для любого $t \geq t_0 + T(\eta, L)$, где $T = T_1(\eta, L) + T_2(\eta, L)$, если $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta(\Delta < \delta^*)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Для понимания «механизма» влияния структурной формы линейной системы (10) на возникновение свойства $\mathbf{y}$-детектируемости по $\mathbf{y}_1$ введем [4] вспомогательные линейные системы уравнений (с постоянными коэффициентами)

$$\mathbf{w}'_1(t) = A_1^* \mathbf{w}_1(t) + B_1^* \mathbf{w}_1(t - \tau), \quad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1), \tag{П.12}$$

$$\mathbf{w}'_2(t) = A_2^* \mathbf{w}_2(t) + B_2^* \mathbf{w}_2(t - \tau), \quad \mathbf{w}_2 = (\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_2), \tag{П.13}$$

определяющие динамику переменных системы (10), входящих соответственно в векторы $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}$. Отметим, что в процессе построения вспомогательных систем (П.12), (П.13) компоненты вектора $\boldsymbol{\mu}_1$ являются линейными комбинациями компонент векторов $\mathbf{y}_2, \mathbf{z}$, а компоненты вектора $\boldsymbol{\mu}_2$ являются линейными комбинациями компонент вектора $\mathbf{z}$.

При выполнении условия (11) системы (П.12), (П.13) имеют одинаковую размерность. Множества корней характеристического квазиполинома указанных вспомогательных систем, являющиеся подмножествами множества корней характеристического квазиполинома системы (10), также совпадают. В такой ситуации асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость системы (10) будет означать ее асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб. 1893. Т. 17. Вып. 2. С. 253–333.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
4. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
5. *Воротников В.И.* Два класса задач частичной устойчивости: к унификации понятий и единым условиям разрешимости // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 47–51.
6. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23–31.
7. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* Об устойчивости по части переменных «частичных» положений равновесия систем с последействием // Мат. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 4. С. 496–503.
8. *Sontag E.D., Wang Y.* Output-to-State Stability and Detectability of Nonlinear Systems // Syst. & Control Lett. 1997. V. 29. No. 5. P. 279–290.
9. *Ingalls B.P., Sontag E.D., Wang Y.* Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems // Proc. 41 IEEE Conf. Decision Control. Las Vegas, Nevada. 2002. P. 3946–3951.
10. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.
11. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // АиТ. 2011. № 8. С. 3–40.

    Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to State Stability and Allied System Properties // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1579–1614.
12. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.

    Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.
13. *Jammazi C.* Backstepping and Partial Asymptotic Stabilization // Int. J. Control, Autom., Syst. 2008. V. 6. No. 6. P. 859–872.
14. *Efimov D.V., Fradkov A.L.* Input-to-Output Stabilization of Nonlinear Systems via Backstepping // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2009. V. 19. No. 6. P. 613–633.
15. *Binazadeh T., Yazdanpanah M.J.* Partial Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems // ISA Trans. 2012. V. 51. No. 2. P. 298–303.
16. *Lamooki G.R.R.* Recursive Partial Stabilization: Backstepping and Generalized Strict Feedback Form // Int. J. Control, Autom., Syst. 2013. V. 11. No. 2. P. 250–257.
17. *Zuyev A.L.* Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements. Cham: Springer Int. Publ., 2015.
18. *L'Afflitto A., Haddad W.M., Bakolas E.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2016. V. 26. No. 5. P. 1026–1050.
19. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations. 2 ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1977.

20. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Academ. Press, 1985.

21. *Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O.* On the Stability of Invariant Sets of Functional Differential Equations // Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl. 2003. V. 55. No. 4–6. P. 641–656.

22. *Halanay A.* Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. N.Y.: Acad. Press, 1966.

23. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // АиТ. 2009. № 1. С. 25–38.

    Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On Partial Detectability of the Nonlinear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 20–32.

24. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.

25. *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 11. P. 1228–1240.

26. *Isidori A.* The Zero Dynamics of a Nonlinear System: From the Origin to the Latest Progresses of a Long Successful Story // Eur. J. Control. 2013. V. 19. No. 5. P. 369–378.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 14.03.2019

После доработки 25.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019