Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Нелинейные системы

© 2020 г. **В.Р. БАРСЕГЯН, д-р физ.-мат. наук (barseghyan@sci.am)**
(Ереванский государственный университет;
Институт механики НАН Армении, Ереван)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАННЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимального управления для уравнения колебания струны с заданными начальным и конечным условиями, с неразделенными значениями состояния в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Задача решена с использованием методов разделения переменных и теории оптимального управления конечномерными системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. В качестве примера применения предложенного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданным нелокальным значением прогиба точек струны в некоторые промежуточные моменты времени.

Ключевые слова: колебания струны, оптимальное управление колебаниями, промежуточные значения состояния, неразделенные многоточечные условия, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0005231020020038

1. Введение

Физические процессы, связанные с колебательными системами, моделируются волновым уравнением [1–4]. При этом на практике часто возникают задачи управления и оптимального управления (УиОУ), в которых нужно сгенерировать желаемую форму колебания, удовлетворяющую многоточечным промежуточным условиям. Характерной чертой многоточечных краевых задач УиОУ является наличие неразделенных условий в нескольких промежуточных точках интервала исследования. Многоточечные краевые задачи УиОУ, в которых, наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями, заданы неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия, исследованы в [5–16]. Неразделенные многоточечные краевые задачи, с одной стороны, возникают как математические модели реальных процессов, а с другой — потому, что для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. В частности, неразделенность многоточечных условий может быть обусловлена также невозможностью на практике проводить измерения требуемых параметров состояния объекта мгновенно. Подобные задачи имеют прикладное значение и важны с теоретической точки зрения, поэтому требуют своего исследования в различных постановках.

Многочисленные примеры технологических процессов, приводящих к задачам УиОУ в системах с распределенными параметрами, рассмотрены в работах [1–4], в которых предложены различные методы решения задач УиОУ, например метод моментов, метод Фурье, метод гармоник. Задачи УиОУ колебательных процессов с помощью как внешних, так и граничных управляющих воздействий при различных типах граничных условий рассмотрены в [1–4, 8–22], где предложены различные методы решения задач управления. В [12, 13] рассмотрена граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени колебания струны и построено решение задачи.

В настоящей статье рассматривается задача оптимального управления для уравнения колебания струны с заданными начальным и конечным условиями, с неразделенными значениями состояния в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Методом разделения переменных исходная задача сведена к задаче оптимального управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Построено оптимальное управляющее воздействие с помощью методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную, упругую натянутую струну длиной l, концы которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x,t)$.

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 < t < T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{2.1}$$

с однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.2}$$

и удовлетворяет начальным и конечным условиям:

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2.3}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{2.4}$$

В уравнении (2.1) $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны. Функция $Q(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (2.1), дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы области.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < < t_m < t_{m+1} = T$ на значения функции состояния струны наложены неразделенные (нелокальные) условия в виде

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q(x, t_k) = \alpha(x), \tag{2.5}$$

где f_k — заданные величины $(k = 1, \ldots, m)$, $\alpha(x)$ — некоторая известная функция. В частности, в случае $m = 1$, $f_1 = 1$ условие (2.5) принимает вид $Q(x, t_1) = \alpha(x)$.

Здесь $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$ и $\alpha(x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования. Предполагается, что система (2.1) при ограничениях (2.2)–(2.5) на промежутке времени $[0, T]$ является вполне управляемой [6, 7, 23]. Это означает, что на промежутке времени $[0, T]$ можно выбрать управляющее воздействие $u(x, t)$, при котором функция состояния струны $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и заданным условиям (2.2)–(2.5).

Задачу оптимального управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции состояния в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x, t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(x, t)$, переводящее колебания струны (2.1) с граничными условиями (2.2) из заданного начального состояния (2.3) в заданное конечное состояние (2.4), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (2.5) с минимизацией функционала

$$J[u] = \left[\int_0^T \int_0^l (u(x, t))^2 \, dxdt \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

3. Решение задачи

Для построения решения поставленной задачи решение уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2) ищем в виде

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{3.1}$$

Представим функции $u(x, t)$ и $\alpha(x)$ в виде рядов Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{3.2}$$

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в соотношения (2.1)–(2.5), в силу ортогональности системы собственных функций получим, что коэффициенты Фурье $Q_n(t)$ удовлетворяют счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{Q}_n(t) + \lambda_n^2 Q_n(t) = u_n(t), \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_n(0) = \varphi_n^{(0)}, \quad \dot{Q}_n(0) = \psi_n^{(0)}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q_n(t_k) = \alpha_n, \tag{3.5}$$

$$Q_n(T) = \varphi_n^{(T)} = \varphi_n^{(m+1)}, \quad \dot{Q}_n(T) = \psi_n^{(T)} = \psi_n^{(m+1)}, \tag{3.6}$$

где через $\varphi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)}$, $\varphi_n^{(m+1)}$, $\psi_n^{(m+1)}$, $u_n(t)$ и α_n обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+1}(x)$, $u(x,t)$ и $\alpha(x)$.

Общее решение уравнения (3.3) с начальными условиями (3.4) имеет вид

$$Q_n(t) = \varphi_n^{(0)} \cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)} \sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t u_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)d\tau. \tag{3.7}$$

Теперь, учитывая промежуточные неразделенные (3.5) и конечные (3.6) условия, из уравнения (3.7) получим, что функции $u_n(\tau)$ для каждого n должны удовлетворять системе равенств:

$$\begin{gathered}
\int_0^T u_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{1n}(T), \\
\int_0^T u_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{2n}(T), \\
\sum_{k=1}^{m} f_k \int_0^{t_k} u_n(\tau)\sin\lambda_n(t_k-\tau)d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m),
\end{gathered} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{gathered}
C_{1n}(T) = \lambda_n \varphi_n^{(m+1)} - \lambda_n \varphi_n^{(0)} \cos\lambda_n T - \psi_n^{(0)} \sin\lambda_n T, \\
C_{2n}(T) = \psi_n^{(m+1)} + \lambda_n \varphi_n^{(0)} \sin\lambda_n T - \psi_n^{(0)} \cos\lambda_n T, \\
C_{1n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) = \lambda_n \left[\alpha_n - \sum_{k=1}^{m} f_k \left(\varphi_n^{(0)} \cos\lambda_n t_k + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)} \sin\lambda_n t_k\right)\right].
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Введем функции

$$h_{1n}(\tau) = \sin\lambda_n(T-\tau), \quad h_{2n}(\tau) = \cos\lambda_n(T-\tau), \quad 0 \le \tau \le T,$$

$$(3.10)\qquad h_{1n}^{(m)}(\tau)=\sum_{k=1}^{m} f_k h_{1n}^{(k)}(\tau),\quad h_{1n}^{(k)}(\tau)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t_k-\tau) \text{ при } 0\le\tau\le t_k,\\ 0 \text{ при } t_k<\tau\le t_{m+1}=T.\end{cases}$$

Тогда интегральные соотношения (3.6) при помощи функции (3.10) запишутся следующим образом:

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{1n}(\tau)d\tau = C_{1n}(T),$$

$$(3.11)\qquad \int_0^T u_n(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = C_{2n}(T),$$

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{1n}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m),\quad n=1,2,\ldots$$

Учитывая разложение (3.2) и ортогональность системы собственных функций, минимизируемый функционал (2.6) запишется в виде

$$\int_0^T\int_0^l [u(x,t)]^2 dxdt = \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T u_n^2(\tau)\,d\tau.$$

Но так как для каждого $n=1,2,\ldots$ $\int_0^T u_n^2(\tau)d\tau\ge 0$, то минимизация функционала (2.6) равносильна минимизации функционалов

$$(3.12)\qquad \int_0^T u_n^2(\tau)\,d\tau,\quad n=1,2,\ldots$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления (2.1)–(2.6) для каждого $n=1,2,\ldots$ сводится к нахождению такого оптимального управления $u_n^0(t)$, $t\in[0,\,T]$, которое удовлетворяет интегральным соотношениям (3.11) и доставляет минимум функционалу (3.12). Задачу оптимального управления при функционале (3.12) с интегральными условиями (3.11) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления. Однако, как видно из обозначения (3.10), подынтегральная функция в третьем соотношении (3.11) является разрывной, поэтому классические методы вариационного исчисления неприменимы для исследования этой задачи [6, 23].

Отметим, что, в силу линейности условий (3.11), порожденных функцией $u_n(t)$ на промежутке времени $[0,\,T]$, и из-за того что функционал (3.12) является нормой линейного нормированного пространства, решение полученной задачи оптимального управления (3.11)–(3.12) целесообразно искать с помощью алгоритма решения проблемы моментов [6, 23].

Следуя [6, 23], для решения конечномерной проблемы моментов (3.11)–(3.12) нужно найти некоторые величины p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}, $n=1,2,\ldots$, связанные условиями

$$p_{1n}C_{1n}(T)+p_{2n}C_{2n}(T)+q_{1n}C_{1n}^{(m)}=1, \tag{3.13}$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2=\min_{(3.13)}\int\limits_0^T h_n^2(t)dt, \tag{3.14}$$

где

$$h_n(t)=p_{1n}h_{1n}(t)+p_{2n}h_{2n}(t)+q_{1n}h_{1n}^{(m)}(t). \tag{3.15}$$

Для определения величин p_{1n}^0, p_{2n}^0, q_{1n}^0, $n=1,2,\ldots$, минимизирующих (3.14) с условиями (3.13), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f(p_{1n},p_{2n},q_{1n})=\int\limits_0^T\left[p_{1n}h_{1n}(t)+p_{2n}h_{2n}(t)+q_{1n}h_{1n}^{(m)}(t)\right]^2dt+$$
$$+\gamma_n\left[p_{1n}C_{1n}(T)+p_{2n}C_{2n}(T)+q_{1n}C_{1n}^{(m)}-1\right],$$

где γ_n — неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}, $n=1,2,\ldots$, функции $f(p_{1n},p_{2n},q_{1n})$ и приравнивая нулю, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
a_n^{(1)}p_{1n}+a_n^{(2)}p_{2n}+b_n^{(2)}q_{1n}=-\frac{\gamma_n}{2}C_{1n}(T),\\
a_n^{(2)}p_{1n}+b_n^{(1)}p_{2n}+d_n^{(2)}q_{1n}=-\frac{\gamma_n}{2}C_{2n}(T),\\
b_n^{(2)}p_{1n}+d_n^{(2)}p_{2n}+d_n^{(1)}q_{1n}=-\frac{\gamma_n}{2}C_{1n}^{(m)},\quad n=1,2,\ldots,
\end{gathered} \tag{3.16}$$

где приняты обозначения:

$$a_n^{(1)}=\int\limits_0^T(h_{1n}(\tau))^2d\tau,\quad b_n^{(1)}=\int\limits_0^T(h_{2n}(\tau))^2d\tau,$$

$$a_n^{(2)}=\int\limits_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau,$$

$$d_n^{(1)}=\int\limits_0^T\left(h_{1n}^{(m)}(\tau)\right)^2d\tau=\int\limits_0^T\left(\sum_{k=1}^m f_kh_{1n}^{(k)}(\tau)\right)^2d\tau, \tag{3.17}$$

$$b_n^{(2)} = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau) h_{1n}^{(m)}(\tau) d\tau = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau) \left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau) \right) d\tau,$$

$$d_n^{(2)} = \int\limits_0^T h_{2n}(\tau) h_{1n}^{(m)}(\tau) d\tau = \int\limits_0^T h_{2n}(\tau) \left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau) \right) d\tau.$$

Присоединяя к уравнениям (3.16) условие (3.13), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}, γ_n $n = 1, 2, \ldots$

Введем обозначения

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & b_n^{(2)} \\ a_n^{(2)} & b_n^{(1)} & d_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} & d_n^{(2)} & d_n^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(p_{1n}) = \begin{vmatrix} C_{1n}(T) & a_n^{(2)} & b_n^{(2)} \\ C_{2n}(T) & b_n^{(1)} & d_n^{(2)} \\ C_{1n}^{(m)} & d_n^{(2)} & d_n^{(1)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n(p_{2n}) = \begin{vmatrix} a_n^{(1)} & C_{1n}(T) & b_n^{(2)} \\ a_n^{(2)} & C_{2n}(T) & d_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} & C_{1n}^{(m)} & d_n^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(q_{1n}) = \begin{vmatrix} a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & C_{1n}(T) \\ a_n^{(2)} & b_n^{(1)} & C_{2n}(T) \\ b_n^{(2)} & d_n^{(2)} & C_{1n}^{(m)} \end{vmatrix}$$

и предположим, что $\Delta_n \neq 0$.

Тогда решение системы (3.16) с условием (3.13) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} p_{1n}^0 = \frac{\Delta_n(p_{1n})}{A_n}, \quad p_{2n}^0 = \frac{\Delta_n(p_{2n})}{A_n}, \\ q_{1k}^0 = \frac{\Delta_n(q_{1n})}{A_n}, \quad \gamma_n = -2\frac{\Delta_n}{A_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{3.18}$$

Здесь приняты обозначения

$$A_n = \Delta_n(p_{1n}) C_{1n}(T) + \Delta_n(p_{2n}) C_{2n}(T) + \Delta_n(q_{1n}) C_{1n}^{(m)}.$$

Подставляя из (3.18) значения для $p_{1n}^0, p_{2n}^0, q_{1n}^0$ в (3.15), получим, что

$$h_n^0(t) = \frac{\tilde{h}_n^0(t)}{A_n},$$

где

$$\tilde{h}_n^0(t) = \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) h_{1n}^{(m)}(t). \tag{3.19}$$

Имея оптимальную функцию $h_n^0(t)$, из (3.14), с учетом (3.19) будем иметь, что

$$(\rho_n^0)^2 = \frac{B_n}{A_n^2}, \quad \text{где } B_n = \int\limits_0^T \left(\tilde{h}_n^0(t) \right)^2 dt.$$

Таким образом, согласно [6, 23] искомое оптимальное управление $u_n^0(t)$ определится выражением

$$u_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(t) = \frac{A_n}{B_n} \tilde{h}_n^0(t). \tag{3.20}$$

Отметим, что согласно обозначениям (3.10) будем иметь

$$h_{1n}^{(m)}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), & 0 \le t \le t_1, \\ \sum\limits_{k=2}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), & t_1 < t \le t_2, \\ \quad \dots & \\ \sum\limits_{k=m-1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), & t_{m-2} < t \le t_{m-1}, \\ f_m \sin \lambda_n (t_m - t), & t_{m-1} < t \le t_m, \\ 0, & t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases}$$

Подставляя значения функции $h_{1n}(t)$, $h_{2n}(t)$, $h_{1n}^{(m)}(t)$ в (3.19), получим

$$\tilde{h}_n^0(t) = \begin{cases} \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), \\ \hfill 0 \le t \le t_1, \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=2}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), \\ \hfill t_1 < t \le t_2, \\ \qquad \dots \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=m-1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), \\ \hfill t_{m-2} < t \le t_{m-1}, \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) f_m \sin \lambda_n (t_m - t), \\ \hfill t_{m-1} < t \le t_m, \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t), \qquad t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases} \tag{3.21}$$

Таким образом, имея явное выражение функции $\tilde{h}_n^0(t)$, из (3.20) получим оптимальную функцию $u_n^0(t)$ для каждого $n = 1, 2, \dots$ Далее, подставляя оптимальную функцию $u_n^0(t)$ в (3.7), получим $Q_n^0(t)$ на промежутке времени $t \in [0, T]$. Следовательно, из (3.1) и (3.2) получим оптимальную функцию $Q^0(x, t)$ состояния струны и оптимальное управление $u^0(x, t)$. Таким образом, для оптимального управления будем иметь

$$u^0(x,t)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{1n})\sum\limits_{k=1}^{m}f_k\sin\lambda_n(t_k-t)\right]\times\\ \qquad\qquad\times\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\ 0\le t\le t_1,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{1n})\sum\limits_{k=2}^{m}f_k\sin\lambda_n(t_k-t)\right]\times\\ \qquad\qquad\times\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\ t_1<t\le t_2,\\ \dots\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{1n})\sum\limits_{k=m-1}^{m}f_k\sin\lambda_n(t_k-t)\right]\times\\ \qquad\qquad\times\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\ t_{m-2}<t\le t_{m-1},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{1n})f_m\sin\lambda_n(t_m-t)\right]\times\\ \qquad\qquad\times\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\ t_{m-1}<t\le t_m,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)\right]\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\quad t_m<t\le t_{m+1}=T.\end{cases}$$

Из этого выражения видно, что оптимальное управляющее воздействие $u^0(x,t)$, решающее поставленную задачу, является кусочно-непрерывной функцией.

4. Пример

Предположим, что $m=2$ (т.е. $0<t_1<t_2<t_3=T$), тогда из (3.17) с учетом обозначений (3.10) будем иметь:

$$a_n^{(1)}=\frac{T}{2}-\frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_nT,\quad b_n^{(1)}=\frac{T}{2}+\frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_nT,\quad a_n^{(2)}=\frac{\sin^2\lambda_nT}{2\lambda_n},$$

$$b_n^{(2)}=\frac{1}{2}\left[f_1t_1\cos\lambda_n(T-t_1)+f_2t_2\cos\lambda_n(T-t_2)\right]-$$
$$-\frac{\cos\lambda_nT}{2\lambda_n}\left[f_1\sin\lambda_nt_1+f_2\sin\lambda_nt_2\right],$$

$$d_n^{(1)}=\frac{1}{4\lambda_n}\Big[2\lambda_n\left(f_1^2t_1+f_2^2t_2\right)+4f_1f_2t_1\lambda_n\cos\lambda_n(t_1-t_2)-$$
$$-f_1^2\sin 2\lambda_nt_1-2f_2\cos\lambda_nt_2\left(2f_1\sin\lambda_nt_1+f_2\sin\lambda_nt_2\right)\Big],$$

$$d_n^{(2)}=\frac{1}{4\lambda_n}\left\{2f_1\sin\lambda_nT\sin\lambda_nt_1-2\lambda_n\left[f_1t_1\sin\lambda_n(T-t_1)+f_2t_2\sin\lambda_n(T-t_2)\right]+\right.$$
$$\left.+\,2f_2\sin\lambda_nT\sin\lambda_nt_2\right\}.$$

Предполагая, что $t_1=\frac{l}{a}$, $t_2=2\frac{l}{a}$, $T=4\frac{l}{a}$, получим, что $t_1\lambda_n=\pi n$, $t_2\lambda_n==2\pi n$, $T\lambda_n=4\pi n$, $\lambda_n(T-t_1)=3\pi n$, $\lambda_n(T-t_2)=2\pi n$, $\lambda_n(t_1-t_2)=-\pi n$. Следовательно, из приведенных выражений и формул (3.9) получим:

$$a_n^{(1)}=b_n^{(1)}=\frac{2l}{a},\quad a_n^{(2)}=d_n^{(2)}=0,\quad b_n^{(2)}=\frac{l}{2a}\left[(-1)^nf_1+2f_2\right],$$

$$d_n^{(1)} = \frac{l}{2a}\left[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2\right],$$
$$C_{1n}(T) = \lambda_n\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right), \quad C_{2n}(T) = \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)},$$
$$C_{1n}^{(m)} = \lambda_n\left[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}\left((-1)^n f_1 + f_2\right)\right].$$

Для определителей Δ_n, $\Delta_n(p_{1n})$, $\Delta_n(p_{2n})$, $\Delta_n(q_{1n})$ будем иметь следующие значения:

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{a}\right)^3\left[2f_1^2 + \left((-1)^n f_1 + 2f_2\right)^2\right],$$
$$\Delta_n(p_{1n}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2\lambda_n\left\{\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right)\left[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2\right] - \right.$$
$$\left. - \left[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}\left((-1)^n f_1 + f_2\right)\right]\left[(-1)^n f_1 + 2f_2\right]\right\},$$
$$\Delta_n(p_{2n}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2\left(\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)}\right)\left\{\left[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2\right] - \frac{l}{4}\left[(-1)^n f_1 + 2f_2\right]\right\},$$
$$\Delta_n(q_{1n}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2\lambda_n\left\{4\left[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}\left((-1)^n f_1 + f_2\right)\right] - \left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right)\left[(-1)^n f_1 + 2f_2\right]\right\}.$$

Отметим, что $\Delta_n \neq 0$ при $f_1 \neq 0$ и $f_2 \neq 0$.

Вычисляя значения величин A_n и B_n, согласно (3.20) будем иметь оптимальную функцию $u_n^0(t)$, $t \in [0, T]$.

Явные выражения функции оптимального управления $u^0(x,t)$ получим в виде:

а) при $0 \le t \le \frac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left\{\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t) + \Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t) + \right.$$
$$\left. + \Delta_n(q_{1n})\left[f_1\sin\lambda_n(t_1 - t) + f_2\sin\lambda_n(t_2 - t)\right]\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

б) при $\frac{l}{a} < t \le 2\frac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t) + \Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t) + \right.$$
$$\left. + \Delta_n(q_{1n})f_2\sin\lambda_n(t_2 - t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

в) при $2\frac{l}{a} < t \le 4\frac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t) + \Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Таким образом, выражения функций оптимального управления получены в явном виде. С помощью приведенных формул можно найти соответствующее выражение функции состояния струны.

5. Заключение

Исследована задача оптимального управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции состояния в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных она сведена к задаче управления в форме счетного числа обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени управления. Эта задача решается с использованием методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. Предложенный для волнового уравнения типа (2.1) подход (использование метода Фурье вместо метода Даламбера) допускает распространение на другие (неодномерные) системы. В качестве примера применения предложенного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями прогиба точек струны в некоторые промежуточные моменты времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
3. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Наука, 1986.
4. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004.
5. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.
6. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.
7. *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // АиТ. 2015. № 4. С. 3–15.

   Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. On an Approach to the Problems of Control of Dynamic Systems with Nonseparated Multipoint Intermediate Conditions // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 4. P. 549–559.
8. *Барсегян В.Р., Саакян М.А.* Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времении // Из. НАН РА. Механика. 2008. Т. 61. № 2. С. 52–60.
9. *Барсегян В.Р.* Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. 1998. № 1 (188). С. 24–29.
10. *Барсегян В.Р.* Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // “Аналитическая механика, устойчивость и управление”. Тр. XI Междунар. Четаевской конф. Т. 3. Ч. I. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 119–125.

11. *Barseghyan V.R., Movsisyan L.A.* Optimal Control of the Vibration of Elastic Systems Described by the Wave Equation // Int. Appl. Mech. 2012. V. 48. No. 2. P. 234–239.

12. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I // Тр. ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 22–35.

13. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т. 19. № 1. С. 62–70.

14. *Макаров А.А., Левкин Д.А.* Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое // Вісн. Харків. національн. універ. ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика і механіка. 2014. № 1120. Вып. 69. С. 64–74.

15. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.* О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вестн. Карагандинского ун-та. Сер. Математика. 2016. № 1 (81). С. 15–20.

16. *Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2016. № 5. С. 168–175.

17. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6 (366). С. 89–114.

18. *Xiuying Li.* Numerical Solution of an Initial-Boundary Value Problemwith Nonlocal Condition for the Wave Equation // J. Math. Sci. 2008. V. 2. No. 3. P. 281–292.

19. *Dreglea A.I., Sidorov N.A.* Integral Equations in Identification of Externalforce and Heat Source Density Dynamics // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2018. No. 3. P. 68–77.

20. *Szijártó A.L., Hegedüs J.* Vibrating Infinite String under General Observation Conditions and Minimally Smooth Force // Electron. J. Qualit. Theory Differ. Equat. 2016. No. 113. P. 1–11.

21. *Moiseev E.I., Kholomeeva A.A.* Optimal Boundary Displacement Controlat One End of a String with a Medium Exerting Resistance at the Other End // Differ. Equat. 2013. V. 49. No. 10. P. 1317–1322.

22. *Sadybekov M.A., Yessirkegenov N.A.* Boundary-Value Problems for Wave Equations with Data on the Whole Boundary // Electron. J. Differ. Equat. 2016. No. 281. P. 1–9.

23. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 30.01.2019

После доработки 16.04.2019

Принята к публикации 18.07.2019