Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

© 2020 г. **А.Н. КВИТКО, д-р физ-мат. наук (alkvit46@mail.ru)**
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Предложен достаточно удобный для численной реализации алгоритм построения синтезирующей управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние фазового пространства с учетом ограничений на управление. Получен конструктивный критерий, гарантирующий указанный перевод. Эффективность алгоритма иллюстрируется при численном моделировании решения конкретной практической задачи.

Ключевые слова: управляемость, краевые условия, стабилизация.

DOI: 10.31857/S000523102002004X

1. Введение

При создании автономных интеллектуальных систем управления различными техническими объектами (роботами-манипуляторами, летательными аппаратами, автономными подводными аппаратами и др.) и их моделировании на различных этапах проектирования важную роль приобретают вопросы, связанные с формированием управляющих функций, обеспечивающих перевод управляемого объекта из начального состояния в заданное конечное состояние. Математическими моделями интеллектуальных систем управления многих технических объектов являются сложные нелинейные управляемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Процесс формирования управляющего воздействия сводится к задаче нахождения управляющих функций, при которых соответствующие функции фазовых координат удовлетворяют заданным краевым условиям. Такой класс задач называют краевыми задачами, и он является одной из важных и сложных проблем математической теории управления. Впервые полное решение этих задач для линейных нестационарных систем в классе управляющих функций, суммируемых с квадратом, было выполнено в [1]. В последующие десятилетия появились работы, направленные на исследование локальных и глобальных краевых задач для линейных и нелинейных управляемых систем специального вида [2–15]. Исследование краевых задач ведется по трем основным направлениям. Первое связано с нахождением необходимых и достаточных условий, наложенных на правую часть управляемых систем и гарантирующих перевод систем управления в заданную точку фазового пространства, см. [1, 2, 4, 5, 7, 8, 11–15]. Второе включает исследование множества конечных состояний, в которые возможен перевод управляемой системы из некоторого начального состояния см. [4, 6, 9–11, 14, 15]. Третье направление касается разработки точных или приближенных методов построения управляющих функций и соответствующих им траекторий, соединяющих заданные точки в фазовом пространстве [1, 3, 11–15]. В настоящее время проблема краевых задач достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных управляемых систем специального вида. Однако теория решения граничных задач для нелинейных управляемых систем общего вида ввиду их сложности еще недостаточно разработана.

Главное отличие результатов данной статьи от известных ранее состоит в том, что в ней для достаточно широкого класса нелинейных стационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений разработан удобный для численной реализации и устойчивый к погрешностям вычислений алгоритм решения локальных краевых задач в классе синтезирующих управлений, а также найдено конструктивное легко проверяемое необходимое и достаточное условие, гарантирующие реализацию полученного в работе алгоритма в классе синтезирующих управлений. Это условие совпадает с критерием управляемости Р. Калмана в случае линейных стационарных систем. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной задачи к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующему решению задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x \in R^n$; $u \in R^r$, $u = (u_1, \ldots, u_r)^{\mathrm{T}}$, $t \in [0, 1]$, $r \leq n$;

$$f \in C^{4n}(R^n \times R^r;\ R^n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

$$f(0,\ 0) = 0, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{rank} S = n, \quad S = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B), \\ B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0), \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\|u\| < N. \tag{2.5}$$

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \bar{x}, \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{\mathrm{T}}, \tag{2.6}$$

где $\bar{x}$ — заданный вектор фазового пространства.

Определение 1. Будем говорить, что пара функций $x(t)$, $u(t, x)$ принадлежит множеству Γ, если для нее выполнены условия:

$$x(t) \in C^1([0, 1]; R^n), \quad u(t, x) \in C^1([0, 1) \times R^n; R^r). \tag{2.7}$$

З а д а ч а. Найти пару функций $(x(t), u(t,x)) \in \Gamma$, удовлетворяющую системе (2.1) и условиям (2.6), а также условию

$$(2.8) \qquad u(t,x) \equiv 0, \ \forall t \in [0,1] \quad \text{при} \quad \bar{x} = 0.$$

Указанную пару $x(t)$, $u(t,x)$ будем называть решением задачи (2.1), (2.6).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что задача (2.1), (2.6) *локально разрешима, если существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $\bar{x}$ *таких, что* $\|\bar{x}\| < \varepsilon$ *существует решение задачи* (2.1), (2.6).

Т е о р е м а. Пусть для правой части системы (2.1) *выполнены условия* (2.2), (2.3). *Тогда для локальной разрешимости задачи* (2.1), (2.6) *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (2.4). *При этом соответствующее решение задачи* (2.1), (2.6) *может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Главная идея доказательства теоремы состоит в том, что посредством преобразований зависимых и независимых переменных решение исходной задачи сводится к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится синтезирующее управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части вспомогательной системы. На заключительном этапе осуществляется переход к исходным переменным.

3. Построение вспомогательной системы

Функцию $x(t)$, входящую в решение задачи (2.1), (2.6), ищем в виде

$$(3.1) \qquad x_i(t) = a_i(t) + \bar{x}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

При новых переменных система (2.1) и граничные условия (2.6) примут вид

$$(3.2) \qquad \dot{a} = f(\bar{x} + a, u),$$

$$(3.3) \qquad a(0) = -\bar{x}, a(1) = 0.$$

В соответствии с (2.3), (2.7), (2.8) пару функций $a(t,\bar{x}) \in C^1([0,1]; R^n)$, $\bar{u}(t, a(t,\bar{x})) = u(t, a(t,\bar{x}) + \bar{x}) \in C^1([0,1) \times R^n; R^r)$, $\bar{u}(t, a(t,0)) \equiv 0$, $a(t,0) \equiv 0$ $\forall t \in [0,1]$, удовлетворяющую системе (3.2) и условиям (3.3), будем называть решением задачи (3.2), (3.3). Рассмотрим задачу: найти пару $a(t,\bar{x}) \in C^1[0,1]$, $\bar{u}(t,a) \in C^1([0,1) \times R^n; R^r)$, $\bar{u}(t, a(t,0)) \equiv 0$, $a(t,0) \equiv 0$ $\forall t \in [0,1]$, удовлетворяющую системе (3.2) и условиям

$$(3.4) \qquad a(0) = -\bar{x}, \quad a(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 1.$$

З а м е ч а н и е 1. Переходя к пределу в решении задачи (2.2), (2.4) при $t \to 1$, получим решение задачи (3.2), (3.3).

Сделаем в системе (3.2) преобразование независимой переменной t по формуле

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{3.5}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда при новой независимой переменной τ система (3.2) и условия (3.4) примут вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f(\bar{x} + c, d), \tag{3.6}$$

$$c(0) = -\bar{x}, \quad c(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \tag{3.7}$$

$$c(\tau, \bar{x}) = a(t(\tau), \bar{x}), \quad d(\tau, c) = \bar{u}(t(\tau), c(\tau, \bar{x})), \quad c(\tau, 0) \equiv 0, \quad d(\tau, c(\tau, 0)) \equiv 0, \tag{3.8}$$
$$\tau \in [0, +\infty); \quad c = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}, \quad d = (d_1, \ldots, d_r)^{\mathrm{T}}.$$

Пару функций $c(\tau, \bar{x}) \in C^1([0, \infty); R^n)$, $d(\tau, c) \in C^1([0, \infty) \times R^n; R^r)$, удовлетворяющую системе (3.6) и условиям (3.7), (3.8) будем называть решением задачи (3.6), (3.7). Имея решение задачи (3.6), (3.7), с помощью формул (3.5), (3.8) можно получить решение задачи (3.2), (3.4). Введем обозначения

$$\tilde{c} = \bar{x} + \theta_i c, \quad \tilde{d} = \theta_i d, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{r} m_i, \quad k! = k_1! \ldots k_n!, \quad m! = m_1! \ldots m_r!$$

Используя свойство (2.2) и разложение правой части системы (2.1) в ряд Тейлора в окрестности точки $(\bar{x}, 0)$, систему (3.6) можно записать в виде

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f_i(\bar{x}, 0) + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x}, 0) d_j +$$
$$+ \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) c_j c_k + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) c_j d_k + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) d_j d_k \right] + \ldots \tag{3.9}$$
$$\ldots + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-2} \frac{1}{k! m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r}}(\bar{x}, 0) c_1^{k_1} c_2^{k_2} \times \ldots$$
$$\ldots\ldots \times c^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \times d_r^{m_r} +$$
$$+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-1} \frac{1}{k! m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r}}(\tilde{c}, \tilde{d}) c_1^{k_1} c_2^{k_2} \times \ldots$$
$$\ldots \times c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \times d_r^{m_r}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ограничим область изменения $c(\tau)$ неравенством

$$\|c(\tau)\| < C_1, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{3.10}$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций $c_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент c и d, в области (2.5), (3.10) удовлетворяли оценке $\mathrm{O}(e^{-4n\alpha\tau}\|\bar{x}\|)$ при $\tau \to \infty$, $\|\bar{x}\| \to 0$. На первом этапе выполним замену $c_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_i(\bar{x}, 0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|} f_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

После подстановки (3.11) в левую и правую части системы (3.9) с учетом введенного обозначения получим систему

$$\begin{gathered}
\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) f_j(\bar{x}, 0) + \\
+ \frac{1}{2}\alpha \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) e^{-3\alpha\tau} f_j(\bar{x}, 0) f_k(\bar{x}, 0) + \\
+ \alpha \left(e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) c_j^{(1)} - \ e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) f_k(\bar{x}, 0) c_j^{(1)} \right) + \\
+ \alpha \left(e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\bar{x}, 0) d_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(\bar{x}, 0) e^{-2\alpha\tau} f_j(\bar{x}, 0) d_k \right) + \\
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) c_j^{(1)} c_k^{(1)} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) d_k c_j^{(2)} + \\
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) d_k d_j + \ldots \qquad (3.12) \\
\ldots + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-2} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\bar{x}, 0) (c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_1(\bar{x}, 0))^{k_1} \times \\
\times (c_2^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_2(\bar{x}, 0))^{k_2} \times \ldots \times (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_n(\bar{x}, 0))^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \\
\ldots \times d_r^{m_r} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-1} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\tilde{c}, \tilde{d}) (c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_1(\bar{x}, 0))^{k_1} \times \\
\times (c_2^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_2(\bar{x}, 0))^{k_2} \times \ldots \times (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_n(\bar{x}, 0))^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \times d_r^{m_r}, \\
i = 1, \ldots n.
\end{gathered}$$

Из (3.7), (3.11) следует

$$c_i^{(1)}(0) = -\bar{x}_i + f_i(\bar{x}, 0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (3.12) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов c и d, в области (2.5), (3.10) удовлетворяют условию $\mathrm{O}(e^{-2\alpha\tau}\,\|\bar{x}\|)$, $\tau \to \infty$, $\bar{x} \to 0$. На втором этапе сделаем замену

$$\begin{gathered} c_i^{(1)}(\tau) = c_i^{(2)}(\tau) + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},0)f_j(\bar{x},0) = c_i^{(2)}(\tau) + e^{-2\alpha\tau}\phi_i^{(2)}(\bar{x}), \\ \phi_i^{(2)}(\bar{x}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},0)f_j(\bar{x},0), \quad \phi_i^{(2)}(0) = 0,\ i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.14}$$

В результате в новых переменных начальные условия (3.13) примут вид

$$c_i^{(2)}(0) = -\bar{x}_i + f_i(\bar{x}, 0) - \phi_i^{(2)}(\bar{x}), \quad \phi_i^{(2)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Нетрудно видеть, что в отличие от предыдущей замены в правой части полученной системы слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов c и d, в области (2.5), (3.10) удовлетворяют условию $\mathrm{O}(e^{-3\alpha\tau}\,\|\bar{x}\|)$, $\tau \to \infty$, $\|\bar{x}\| \to 0$, $i = 1, \ldots, n$. Используя (3.11)–(3.15) и индуктивный переход на k-м шаге, получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)}(\tau) = c_i^{(k)} + e^{-k\alpha\tau}\phi_i^{(k)}(\bar{x}), \quad \phi_i^{(k)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Если применить преобразования (3.16) $4n-1$ раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора $c^{(4n-1)}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, n$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора d и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, 2n$, то согласно (3.12)–(3.16) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = Pc^{(4n-1)} + Qd + R_1(c^{(4n-1)}, d, \bar{x}, \tau) + R_2(c^{(4n-1)}, d, \bar{x}, \tau) + \\ + R_3(c^{(4n-1)}, d, \tau) + R_4(\bar{x}, c^{(4n-1)}, d, \tau), \\ R_1 = (R_1^1, \ldots, R_1^n)^{\mathrm{T}}, \quad R_2 = (R_2^1, \ldots, R_2^n)^{\mathrm{T}}, \\ R_3 = (R_3^1, \ldots, R_3^n)^{\mathrm{T}}, \quad R_4 = (R_4^1, \ldots, R_4^n)^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Функции R_4^i состоят из суммы слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $c^{(4n-1)}$ и d; R_1^i содержат все слагаемые, которые линейно зависят от компонент вектора $c^{(4n-1)}$с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geq n+1$, а также слагаемые, входящие в последнюю сумму правой части полученной системы, которые не содержат степеней компонент вектора d и с суммой степеней компонент вектора $c^{(4n-1)}$, равной единице; R_2^i содержат все слагаемые, которые линейно зависят от компонент вектора d с множителями $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geq 2n+1$, а также слагаемые входящие в последнюю сумму правой части полученной системы, которые не содержат степеней компонент вектора $c^{(4n-1)}$ и с суммой степеней компонент вектора d, равной единице. В R_3^i содержатся все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов $c^{(4n-1)}$ и d.

$$
\begin{gathered}
P(\bar{x}) = \alpha e^{-\alpha\tau}\left(P_1(\bar{x}) + e^{-\alpha\tau}P_2(\bar{x}) + \ldots + e^{-(n-1)\alpha\tau}P_{n-1}(\bar{x})\right), \\
P_1(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0), \quad P_1(0) = A; \\
Q(\bar{x}) = \alpha e^{-\alpha\tau}\left(Q_1(\bar{x}) + e^{-\alpha\tau}Q_2(\bar{x}) + \ldots + e^{-(2n-1)\alpha\tau}Q_{2n-1}(\bar{x})\right), \\
Q_1(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0), \quad Q_1(0) = B;
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{gathered}
c^{(4n-1)}(0) = -\bar{x} + f(\bar{x}, 0) - \phi^{(2)}(\bar{x}) - \phi^{(3)}(\bar{x}) - \ldots - \phi^{(4n-1)}(\bar{x}), \\
\phi^{(i)} = \left(\phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_n^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, \ldots, 4n-1, \quad \phi^{(i)}(0) = 0.
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

4. Алгоритм решения задачи

1. Построение вспомогательной системы (3.17).

2. Используя метод Н.Н. Красовского, решаем задачу стабилизации линейной части системы (3.17) с матрицами (3.18):

$$
\frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = Pc^{(4n-1)} + Qd.
$$

В результате получаем управление $d(\tau)$ в виде обратной связи

$$
d(\tau) = M(\tau)c^{(4n-1)}. \tag{4.1}
$$

3. Решаем задачу Коши для системы (3.17), замкнутой управлением (4.1) с начальными данными (2.19). Подстановка полученного решения в (4.1) дает пару функций $c^{(4n-1)}(\tau)$, $d(\tau)$.

4. После перехода в $c^{(4n-1)}(\tau)$, $d(\tau)$ к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (3.16), (3.14), (3.11), (3.8), (3.5), (3.1) на основании замечания 1 получим искомые функции $x(t)$, $u(t, x)$.

5. Решение задачи управления однозвенным манипулятором

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим решение задачи управления однозвенным манипулятором с учетом нестационарных возмущений. В соответствии с [13] система уравнений, описывающая движение манипулятора, имеет вид

$$
\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2 \sin x_1 + u + \mu t, \tag{5.1}
$$

где x_1 — угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 — скорость отклонения угла, $a_1 = \bar{\alpha} L^{-2} m_1^{-1}$, $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$, $a_2 = gL^{-1}\left(m_0 + \frac{M}{2}\right) m_1^{-1}$, g — ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ — коэффициент трения, m_0 — масса переносимого груза, L — длина манипулятора, M — масса манипулятора, $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$. Рассмотрим краевые условия

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(1) = 0, \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^{\mathrm{T}}. \tag{5.2}$$

Система (3.6) и условия (3.7) для задачи (5.1), (5.2) имеют вид

$$\frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \quad \frac{dc_2}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}(-a_2 \sin c_1 - a_1 c_2 + d + \mu(1 - e^{-\alpha\tau})), \tag{5.3}$$

$$c_1(0) = \bar{x}_1, \quad c_2(0) = 0, \quad c_2(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \quad i = 1, 2. \tag{5.4}$$

Для решения задачи (5.3), (5.4) достаточно выполнить одно преобразование функции $c_2(\tau)$:

$$c_2(\tau) = c_2^{(1)}(\tau) - \mu e^{-\alpha\tau}. \tag{5.5}$$

В результате получаем новую функцию $c_2^{(1)}(\tau)$.

$$\begin{gathered} \frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2^{(1)} - \alpha\mu e^{-2\alpha\tau}, \\ \frac{dc_2^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2^{(1)} - \alpha e^{-2\alpha\tau} a_1 \mu + \alpha e^{-\alpha\tau} d - \alpha\mu e^{-2\alpha\tau}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Линейная часть системы (5.6) может быть записана в форме

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} P\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} Qd, \quad \bar{c} = (c_1, c_2^{(1)})^{\mathrm{T}}, \\ P = \left\| \begin{matrix} 0, & 1 \\ -a_2, & -a_1 \end{matrix} \right\|, \quad Q = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|. \end{gathered} \tag{5.7}$$

После решения задачи стабилизации системы (5.7) и перехода к исходным переменным по формулам (5.5), (3.5), (3.8) получаем закон управления

$$\begin{gathered} u(t, x) = -\frac{6\alpha + 4\alpha^2 + 2 - (1-t)^2 a_2 \alpha^2}{\alpha^2 (1-t)^2} x_1 + \frac{-3 - 3\alpha + \alpha(1-t) a_1}{\alpha(1-t)} x_2 + \\ + \mu \frac{-3 - 3\alpha + \alpha(1-t) a_1}{\alpha}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Далее решаем задачу Коши для системы (5.1), замкнутой управлением (5.8) с начальными данными (5.2). В процессе численного моделирования полагалось $\bar{x}_1 = 1$ рад, $\bar{\alpha} = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}25$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $\mu = 0{,}1$, $t \in [0,\ 0{,}9)$. На рисунке *а* и *б* представлены графики изменения соответствующих функций фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управления $u(t)$.

Замечание 2. При $\mu = 0$, $\bar{x} = 0$ из (5.1), (5.8) получаем $u(t, x(t, 0)) \equiv \equiv 0 \; \forall t \in [0, 1]$.

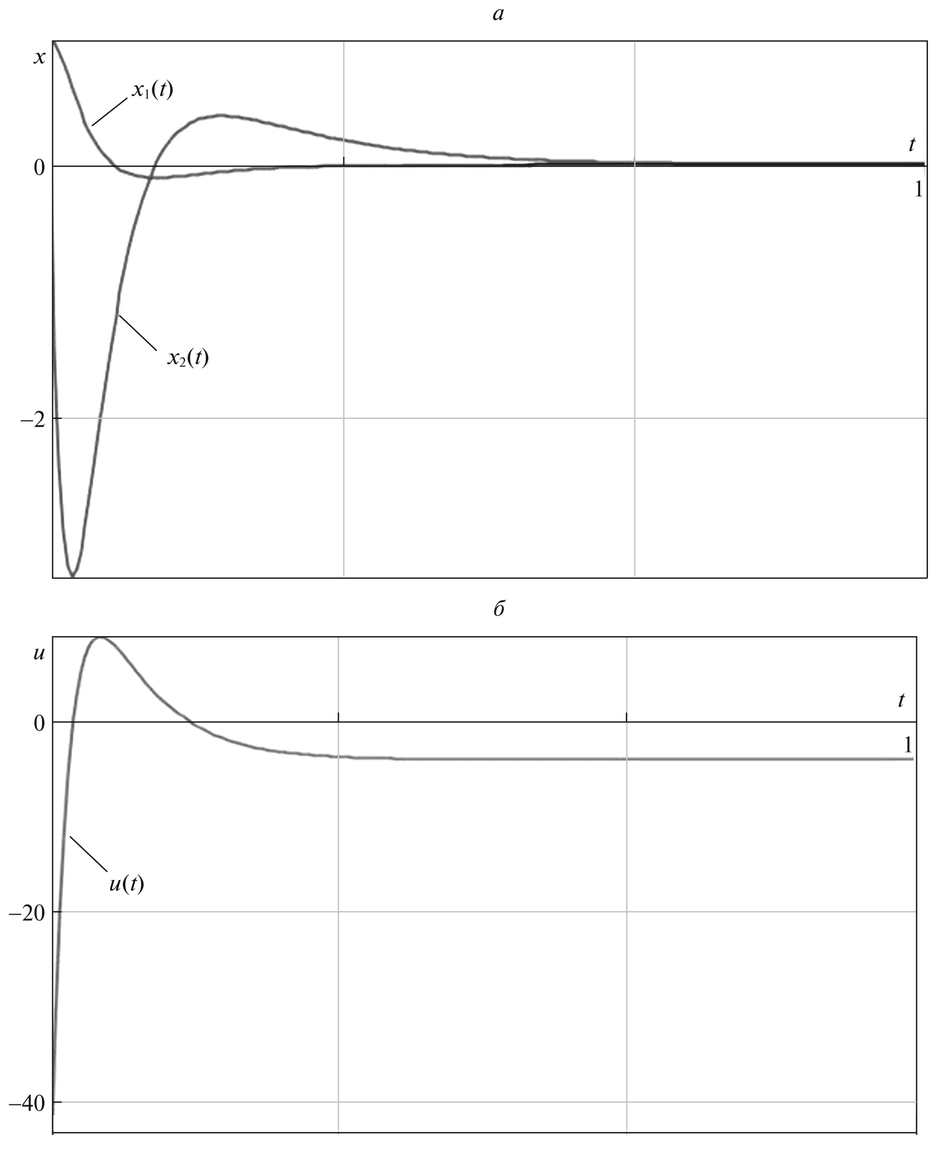

Рисунок.

6. Заключение

Анализ приведенного в разделе 4 алгоритма позволяет утверждать, что наиболее трудоемкая часть процедуры построения решения поставленной задачи, а именно построение вспомогательной системы, нахождение матрицы обратной связи вспомогательного стабилизирующего управления и переход к исходным переменным, может быть выполнена в аналитическом виде с использованием методов компьютерной алгебры. С другой стороны, результаты решения задачи управления роботом-манипулятором показывают, что предложенный в работе метод может быть применен при решении конкретных практических задач с использованием персональных ЭВМ.

Доказательство теоремы. Достаточность. Из процедуры нахождения искомой управляющей функции $u(t,x)$ и соответствующей функции фазовых координат $x(t)$, подробно изложенной в [11], следует, что пара $x(t)$, $u(t,x)$, является решением задачи (2.1), (2.6).

Необходимость. Пусть условие (2.4) не выполнено и предположим противное, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\bar{x} \in R^n : \|\bar{x}\| < \varepsilon$ существует решение задачи (2.1), (2.6). Тогда для $\bar{x}$ существует решение задачи (3.6), (3.7). Согласно (2.2) систему (3.6) можно записать в виде

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f_i(\bar{x},0) + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},0)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x},0)d_j +$$

$$+\frac{1}{2}\,\alpha e^{-\alpha\tau}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_jc_k + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_jd_k + \right. \tag{П.1}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})d_jd_k\right], \quad i = 1,\ldots,n.$$

Из условий (2.2), (2.3) следует

$$f_i(\bar{x},0) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\bar{x}_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{\bar{x}},0)\bar{x}_j\bar{x}_k, \quad \tilde{\bar{x}} = \bar{\theta}_i\bar{x}, \quad \bar{\theta}_i \in [0,1],$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{\tilde{\bar{x}}},0)\bar{x}_k, \quad \tilde{\tilde{\bar{x}}} = \bar{\bar{\theta}}_i\bar{x}, \quad \bar{\bar{\theta}}_i \in [0,1], \tag{П.2}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x},0) = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial x_k}(\tilde{\tilde{\tilde{\bar{x}}}},0)\bar{x}_k, \quad \tilde{\tilde{\tilde{\bar{x}}}} = \bar{\bar{\bar{\theta}}}_i\bar{x}, \quad \bar{\bar{\bar{\theta}}}_i \in [0,1], \quad i = 1,\ldots,n.$$

С учетом (П.2) систему (П.1) можно записать в форме

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\bar{x}_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j x_k}(\tilde{\bar{x}},0)\bar{x}_j\bar{x}_k +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{\tilde{\bar{x}}},0)\bar{x}_kc_j +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0)d_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\partial u_j}(\tilde{\tilde{\tilde{\bar{x}}}},0)\bar{x}_kd_j + \tag{П.3}$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_jc_k + 2\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_jd_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})d_jd_k\right], \quad i = 1,\ldots,n.$$

Запишем систему (П.3) в векторном виде

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}(Ac + Bd + A\bar{x}) + \alpha e^{-\alpha\tau}(\tilde{R}_1(\bar{x}) + \tilde{R}_2(c, \bar{x}) + \tilde{R}_3(d, \bar{x}) + \tilde{R}_4(c, d, \bar{x})),$$

$$\text{(П.4)} \qquad \tilde{R}_1 = (\tilde{R}_1^1, \ldots, \tilde{R}_1^n)^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{R}_2 = (\tilde{R}_2^1, \ldots, \tilde{R}_2^n)^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{R}_3 = (\tilde{R}_3^1, \ldots, \tilde{R}_3^n)^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{R}_4 = (\tilde{R}_4^1, \ldots, \tilde{R}_4^n)^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{R}_1^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\bar{x}}, 0)\bar{x}_j\bar{x}_k, \quad \tilde{R}_2^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(\tilde{\bar{\bar{x}}}, 0)c_j\bar{x}_k,$$

$$\text{(П.5)} \qquad \tilde{R}_3^i = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial x_k}(\tilde{\bar{\bar{x}}}, 0)\bar{x}_k d_j,$$

$$\text{(П.6)} \qquad \tilde{R}_4^i = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{c}, \tilde{d})c_j c_k + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\tilde{c}, \tilde{d})c_j d_k + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{c}, \tilde{d})d_j d_k\right].$$

Из равенств (П.5), (П.6) следует, что при $\|\bar{x}\| < \varepsilon$ в области (2.5), (3.10) справедливы оценки

$$\text{(П.7)} \qquad \left\|\tilde{R}_1\right\| \le \tilde{L}_1 \|\bar{x}\|^2, \quad \left\|\tilde{R}_2\right\| \le \tilde{L}_2 \|c\| \|\bar{x}\|, \quad \left\|\tilde{R}_3\right\| \le \tilde{L}_3 \|d\| \|\bar{x}\|,$$
$$\left\|\tilde{R}_4\right\| \le \tilde{L}_4(\|c\|^2 + \|d\|^2), \quad \tilde{L}_i > 0, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Пусть $\operatorname{rank} S = k$, $0 < k < n$. Обозначим через b_i i-й столбец матрицы B. Введем в рассмотрение матрицу

$$S_4 = \left\{b_1, Ab_1, \ldots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{k_2-1}b_2, \ldots, b_r, \ldots, A^{k_r-1}b_r, l_{k+1}, \ldots, l_n\right\}.$$

Здесь k_j, $j = 1, \ldots, r$, – максимальное количество столбцов вида $b_j, \ldots, A^{k_j-1}b_j$ таких, что векторы $b_1, Ab_1, \ldots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{k_2-1}b_2, \ldots, b_r, Ab_r, \ldots$ $\ldots, A^{k_r-1}b_r$ линейно независимы, векторы l_j, $j = k+1, \ldots, n$ выбраны так, чтобы

$$\text{(П.8)} \qquad \operatorname{rank} S_4 = n.$$

Используя (П.8), выполним в системе (П.4) замену переменной c по формуле

$$\text{(П.9)} \qquad c = S_4 y.$$

Согласно [1] в новых переменных система (П.4) и условия (2.7) примут вид

$$\text{(П.10)} \qquad \frac{dy}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_1 & A_3 \end{pmatrix} y + \alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix} B_1 \\ O_2 \end{pmatrix} d + \alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_1 & A_3 \end{pmatrix}\bar{y} +$$
$$+ \alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_1(S_4\bar{y}) + \alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_2(S_4 y, S_4\bar{y}) +$$
$$+ \alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_3(d, S_4\bar{y}) + \alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_4(S_4 y, d, S_4\bar{y}), \quad \bar{y} = S_4^{-1}\bar{x},$$

$$(\text{П}.11)\qquad y(0)=-\bar y,\quad y(\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \tau\to\infty\ \forall\, \bar y:\|S_4\bar y\|<\varepsilon.$$

В правой части (П.10) A_1, A_2, A_3, B_1 — матрицы с постоянными коэффициентами соответственно размерностей $k\times k$, $k\times n-k$, $n-k\times n-k$, $k\times r$. Блоки O_1, O_2 являются матрицами с нулевыми элементами соответственно размерностей $n-k\times k$, $n-k\times r$. Представим векторы $y(\tau)$, $\bar y$ в виде $y(\tau)= =(\tilde y(\tau),\tilde{\tilde y}(\tau))^{\mathrm T}$, $\tilde y(\tau)=(y_1(\tau),\dots,y_k(\tau))^{\mathrm T}$, $\tilde{\tilde y}(\tau)=(y_{k+1}(\tau),\dots,y_n(\tau))^{\mathrm T}$, $\bar y= =(\bar{\tilde y},\bar{\tilde{\tilde y}})^{\mathrm T}$, $\bar{\tilde y}=(\bar y_1,\dots,\bar y_k)^{\mathrm T}$, $\bar{\tilde{\tilde y}}=(\bar y_{k+1},\dots,\bar y_n)^{\mathrm T}$. Введем в рассмотрение систему, состоящую из последних $n-k$ уравнений системы (П.10), предположив дополнительно, что в ее правую часть подставлены известные функции $\tilde y(\tau), d(\tau)$. Не умоляя общности, можно положить

$$\bar y=(0,\dots,0,\bar y_{k+1},\dots,\bar y_{k+1})^{\mathrm T},$$

$$(\text{П}.12)\qquad \begin{gathered}\frac{d\tilde{\tilde y}}{d\tau}=\alpha e^{-\alpha\tau}A_3\tilde{\tilde y}+\alpha e^{-\alpha\tau}A_3\bar{\tilde{\tilde y}}+\\ +\alpha e^{-\alpha\tau}\bar S_4^{-1}\left[\tilde R_1(S_4\bar y)+\tilde R_2(S_4y,S_4\bar y)+\tilde R_3(d,S_4\bar y)+\tilde R_4(S_4y,d,S_4\bar y)\right],\end{gathered}$$

где $\bar S_4^{-1}$ — матрица, состоящая из последних $n-k$ строк матрицы S_4^{-1}. Тогда из (П.11) вытекают условия

$$(\text{П}.13)\qquad \tilde{\tilde y}(0)=-\bar{\tilde{\tilde y}},\quad \tilde{\tilde y}(\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \tau\to\infty.$$

Покажем, что решения системы (П.12), начинающиеся в достаточно малой окрестности начала координат, не удовлетворяют условию (П.13). Очевидно, что $\Phi(\tau)=e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}e^{A_3}$ — фундаментальная матрица системы $\frac{d\tilde{\tilde y}}{d\tau}=\alpha e^{-\alpha\tau}A_3\tilde{\tilde y}$, нормированная в нуле. Решение системы (П.12) с начальными данными (П.13) имеет вид

$$(\text{П}.14)\qquad \begin{gathered}\tilde{\tilde y}(\tau)=-e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}e^{A_3}\bar{\tilde{\tilde y}}+e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}\int\limits_0^\tau e^{e^{-\alpha t}A_3}\alpha e^{-\alpha t}A_3\bar{\tilde{\tilde y}}dt+\\ +e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}\int\limits_0^\tau e^{e^{-\alpha t}A_3}\alpha e^{-\alpha t}\bar S_4^{-1}\Big[\tilde R_1(S_4\bar y)+\\ +\tilde R_2(S_4y,S_4\bar y)+\tilde R_3(d,S_4y)+\tilde R_4(S_4y,S_4\bar y)\Big]dt,\quad \tau\in[0,\infty).\end{gathered}$$

С учетом ограничения (2.5) и условий (2.2), (3.8), (П.9), (П.11) в области $\left\|S_4^{-1}\bar y\right\|\le\varepsilon$ имеем оценки

$$(\text{П}.15)\qquad \|y(\tau,\bar y)\|\le L_1\|\bar y\|,\quad \|d(\tau,y(\tau,\bar y))\|\le L_2\|\bar y\|.$$

После вычисления первого интеграла в правой части равенства (П.14) получаем

$$\tilde{\tilde y}(\tau)=-\bar{\tilde{\tilde y}}+e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}\int\limits_0^\tau e^{e^{-\alpha t}A_3}\alpha e^{-\alpha t}\bar S_4^{-1}\Big[\tilde R_1(S_4\bar y)+\tilde R_2(S_4y,S_4\bar y)+$$

$$+ \tilde{R}_3(d, S_4 y) + \tilde{R}_4(S_4 y, S_4 \bar{y})\Big] \, dt, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Отсюда

$$\left\|\tilde{y}(\tau)\right\| \geq \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| - \left\|e^{-e^{-\alpha\tau} A_3}\right\| \int\limits_0^{\tau} \alpha e^{-\alpha t} \left\|e^{e^{-\alpha t} A_3}\right\| \left\|\bar{S}_4^{-1}\right\| \Big[\left\|\tilde{R}_1(S_4 \bar{y})\right\| +$$

$$+ \left\|\tilde{R}_2(S_4 y, S_4 \bar{y})\right\| + \left\|\tilde{R}_3(d, S_4 y)\right\| + \left\|\tilde{R}_4(S_4 y, S_4 \bar{y})\right\|\Big] \, dt, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Используя (П.7), (П.9), (П.15), из последнего неравенства получаем

$$\text{(П.16)} \qquad \left\|\tilde{y}(\tau)\right\| \geq \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| - L_3 \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\|^2, \quad \tau \in [0, \infty).$$

В (П.16) константа $L_3 > 0$ зависит от области $\|S_4 \bar{y}\| < \varepsilon$. Зафиксируем $\bar{\tilde{\bar{y}}}$ в области $\|S_4 \bar{y}\| < \varepsilon$ так, чтобы

$$\text{(П.17)} \qquad \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| < \frac{1}{L_3}, \quad \|S_4 \bar{y}\| < \varepsilon, \quad \bar{y} = \left(0, \ldots, 0, \bar{\tilde{\bar{y}}}_{k+1}, \ldots, \bar{\tilde{\bar{y}}}_n\right)^{\mathrm{T}}, \quad \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| > 0.$$

Из (П.16) следует, что все траектории системы (П.12), начинающиеся в области (П.17), не удовлетворяют условию (П.13). Указанное обстоятельство противоречит утверждению о существовании $\varepsilon > 0$, которое фигурирует в формулировке теоремы. В случае, когда $k = 0$, доказательство аналогично. Необходимость доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем / Под ред. Э.Л. Напельбаума. М.: Мир, 1971.
2. *Walczak S.* A note on the controllability of nonlinear systems // Math. Syst. Theory 1984. V. 17. No. 4. P. 351–356.
3. *Комаров В.А.* Синтез ограниченных управлений для линейных неавтономных систем // АиТ. 1984. № 10. С. 44–50.

   Komarov V.A. Design of Constrained Control Signals for Nonlinear Non-autonomous Systems // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 10. P. 1280–1286.
4. *Крищенко А.П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // АиТ. 1984. № 6. С. 30–36.

   Krishchenko A.P. Controllability and Attainability sets of Nonlinear Control Systems // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 6. P. 707–713.
5. *Dirk A.* Controllability for polynomial systems // Lect. Notes Contr. Inf. Sci. 1984. No. 63. P. 542–545.
6. *Комаров В.А.* Оценка множества достижимости для линейных систем // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1984. № 1. С. 83–87.
7. *Balachandran K.* Global and local controllability of nonlinear systems // JEEE. Proc. 1985. No. 1. P. 14–17.
8. *Benzaid Z.* Global null controllability of perturbed systems // JEE. Trans. Autom. Control. 1987. No. 7. P. 623–625.

9. *Попова С.Н.* К свойству локальной достижимости линейной управляемой системы // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.
10. *Бердышев Ю.И.* О построении области достижимости в одной нелинейной задаче // Изв. РАН. Теория и системы управл. 2006. № 4. С. 22–26.
11. *Kvitko A., Yakusheva D.* On one boundary problem for nonlinear stationary controlled System // Int. J. Control. 2019. V. 92. No. 4. P. 828–839. DOI: 10.1080/00207179.2017.1370727
12. *Coron J.M.* Control and Nonlinearity // Amer. Math. Soc. Math. Surveys Monographs. 2007. V. 136.
13. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1998.
14. *Balachandran K., Govindaraj V.* Numerical controllability of fractional dynamical systems // Optimization. 2014. V. 63. No. 8. P. 1267–1279.
15. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 16.07.2018

После доработки 23.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019