Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

© 2020 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

ДИВЕРГЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Предложен метод исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Установлена связь между методом функций Ляпунова и предложенным методом. На базе полученных результатов приведен синтез закона управления с обратной связью по состоянию для стабилизации динамических систем, который сводится к решению дифференциального неравенства относительно искомой функции управления. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие применимость предложенного метода и существующих.

Ключевые слова: динамическая система, устойчивость, поток векторного поля, дивергенция, управление.

DOI: 10.31857/S0005231020020051

1. Введение

Динамическими моделями описывается множество процессов в окружающем макро- и микромире. Одним из важных вопросов эволюции таких систем является исследование сходимости решений данных моделей. Однако найти явное решение дифференциального уравнения не всегда представляется возможным, а численные решения могут значительно отличаться от истинного [1].

Хорошо известно, что метод функций Ляпунова позволяет исследовать устойчивость решений дифференциальных уравнений, не решая их. Впервые это показано А.М. Ляпуновым в конце XIX в. в его докторской диссертации (позже опубликованной в [2]) применительно к задачам астрономии и движения жидкости. Последующее развитие метода функций Ляпунова для исследования устойчивости и неустойчивости различных динамических систем, а также приложения полученных результатов в авиации, технике, механике и т.д. можно найти в следующих классических трудах [3–7]. В зависимости от решаемых задач функция Ляпунова также интерпретируется как потенциальная функция (potential function) [8], функция энергии (energy function) [9] или функция хранения (storage function) [10]. Однако основное ограничение в использовании аппарата функций Ляпунова состоит в поиске данных функций.

[1] Результаты раздела 2 получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01266). Результаты раздела 3 получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104).

Методы исследования устойчивости динамических систем на базе свойств дивергенции вектора фазовой скорости объекта являются альтернативными методу функций Ляпунова. Одними из первых основополагающих работ в направлении получения дивергентных условий устойчивости были труды [11–13]. В [14] получены фундаментальные результаты, посвященные развитию дивергентного метода для многомерных систем. Вопросы исследования устойчивости с использованием свойств индекса Пуанкаре и дивергенции векторных полей многомерных систем рассмотрены в [15, 16].

Результаты, предложенные в настоящей статье, будут тесно связаны с работами В.П. Жукова и А. Рантцера (A. Rantzer). Несмотря на то что в западной литературе нередко первенство в исследовании устойчивости с помощью дивергенции вектора фазовой скорости отдается А. Рантцеру [17, 18], в отечественной литературе подобные идеи были опубликованы ранее А.А. Шестаковым, А.Н. Степановым в [14] и В.П. Жуковым в [19]. В [19] исследуется неустойчивость решения нелинейного дифференциального уравнения с помощью дивергенции векторного поля. Затем в течение примерно 30 лет по исследованию неустойчивости различного вида динамических систем В.Н. Жуковым опубликован цикл работ, с частью которых можно свободно ознакомиться на сайте журнала "Автоматики и телемеханики". В [20] приведено необходимое условие устойчивости нелинейных систем в виде неположительности дивергенции векторного поля фазовой скорости. В [14, 21] для исследования неустойчивости нелинейных динамических систем вводится вспомогательная скалярная функция. Отметим, что введение данной функции для исследования свойств устойчивости и неустойчиовсти по Ляпунову особой точки системы дифференциальных уравнений рассматривалось еще ранее в [22], но без использования дивергентных подходов. Позже в [17] А. Рантцер использовал также вспомогательную скалярную функцию, которую назвал функцией плотности (density function). В [14, 23] получены условия устойчивости для систем второго порядка. Затем А. Рантцер в [17, 18] обсуждает сходимость почти всех решений нелинейных динамических систем произвольного порядка и рассматривает вопросы синтеза закона управления. Подход в [17, 18] отличается от подходов в [14, 23] тем, что для исследования устойчивости в [17, 18] используется функция плотности, которая подобна обратной вспомогательной функции в [14, 23], за исключением их свойств в точке равновесия динамической системы. В настоящее время подход из [17, 18] распространен на различного рода системы [24–27]. В [28] предложен совершенно другой способ исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность и установлена связь дивергентного метода со вторым методом Ляпунова.

Однако результатам [18, 20, 23, 28] присущи следующие особенности:

1) необходимое условие [20] — достаточно усиленное;

2) метод [23] обоснован только для систем второго порядка;

3) основной результат [18, теорема 1] гарантирует сходимость почти всех решений системы. Для того чтобы определить устойчивость системы с ис-

пользованием [18, теорема 1], дополнительно накладывается условие неположительности дивергенции вектора фазовой скорости [18, см. утверждение 2];

4) условия устойчивости в [28] требуют существования преобразования координат, которое приводит исходную систему к диагональному виду. Для нелинейных систем поиск такого преобразования является трудно решаемой задачей.

В настоящей статье предложен новый метод устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Получены необходимые условия устойчивости. Установлена связь метода функций Ляпунова с предложенным методом исследования устойчивости на базе потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Предложены достаточное условие устойчивости и метод синтеза закона управления. Статья сопровождается примерами, иллюстрирующими применимость предложенного метода и результатов статьи [18].

2. Основной результат

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния, $f = [f_1, \ldots, f_n]^{\mathrm{T}} : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно-дифференцируемая функция, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Множество D содержит начало координат и $f(0) = 0$. Для простоты положим, что область притяжения D_A точки $x = 0$ совпадает с областью D. Однако все полученные результаты будут справедливы, если $D_A \subset D$ или $D_A = \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\bar{D}$ границу области D.

В статье будем использовать следующие обозначения: $\mathrm{grad}\{W(x)\} = \left[\frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}$ — градиент скалярной функции $W(x)$, $\mathrm{div}\{h(x)\} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial h_n}{\partial x_n}$ — дивергенция векторного поля $h(x) = [h_1(x), \ldots, h(x)_n]^{\mathrm{T}}$, $|\cdot|$ — евклидова норма соответствующего вектора. Под устойчивостью будем понимать устойчивость нулевого положения равновесия системы по Ляпунову [29].

Сформулируем необходимое условие устойчивости (1).

Теорема 1. *Пусть $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы* (1). *Тогда существует положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция $S(x)$, такая что $S(x) \to \infty$ при $x \to \bar{D}$, $|\mathrm{grad}\{S(x)\}| \neq 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и для которой выполнено одно из следующих условий:*

1) *функция $\mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)\}$ интегрируема в области $V = \{x \in D : S(x) \le C\} \subset D$ и $\int_V \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)\}dV < 0$ для всех $C > 0$;*

2) *функция $\mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)\}$ интегрируема в области $V_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) \ge C\} \subset D$ и $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)\}dV_{inv} > 0$ для всех $C > 0$.*

Рассмотрим геометрическую интерпретацию двух случаев в зависимости от вида функции $S(x)$ или $S^{-1}(x)$ в теореме 1. Обозначим через F_1 поток векторного поля $|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)$ через поверхность $\Gamma = \{x \in D \colon S(x) = C\}$ с еди-

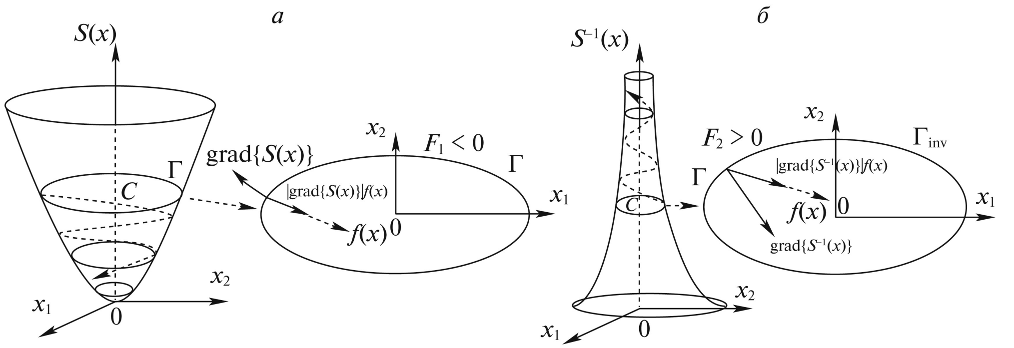

Рис. 1. Геометрическая иллюстрация теоремы 1.

ничным вектором нормали $\frac{1}{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|}\mathrm{grad}\{S(x)\}$ и через F_2 — поток векторного поля $|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)$ через поверхность $\Gamma_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) = C\}$ с единичным вектором нормали $\frac{1}{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|}\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}$. На рис. 1 проиллюстрирована геометрическая интерпретация обоих случаев при $x \in \mathbb{R}^2$, где схематически изображены функции $S(x)$ и $S^{-1}(x)$ (на рис. 1,*а* и 1,*б* слева) и потоки F_1 и F_2 векторных полей $|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)$ и $|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)$ через соответствующие поверхности уровней Γ и Γ_{inv} (на рис. 1,*а* и 1,*б* справа). Если система (1) устойчива, то поток векторного поля F_1 (F_2) через поверхность Γ (Γ_{inv}) принимает отрицательное (положительное) значение.

Доказательство. Согласно [29, теорема 4.17] если $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы (1), то существует непрерывно-дифференцируемая положительно определенная функция $S(x)$, такая что $S(x) \to \infty$ при $x \to \bar{D}$, $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x)\Big|_{x=0} = 0$. Заметим, что если $D = \mathbb{R}^n$, то функция $S(x)$ является радиально неограниченной. Рассмотрим далее два случая по отдельности, которые соответствуют функциям $S(x)$ и $S^{-1}(x)$.

1. Если $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то и

$$\frac{1}{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|}\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x) < 0.$$

Значит, будет справедливо следующее выражение

$$F_1 = \oint_{\Gamma} \frac{1}{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|}\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)d\Gamma < 0.$$

Воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского (в литературе ее также можно найти в виде divergence theorem (теорема о дивергенции) и Gauss theorem (теорема Гаусса)), получим $F_1 = \int_V \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)\}dV < 0$.

2. Если $\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то

$$\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) = -S^{-2}(x)\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) > 0.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) = \frac{1}{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|}\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x).$$

Значит, будет выполнено следующее соотношение

$$F_2 = \oint_{\Gamma_{inv}} \frac{1}{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|}\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)d\Gamma_{inv} > 0.$$

Воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского, получим, что

$$F_2 = \int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)\}dV_{inv} > 0.$$

Теорема 1 доказана.

Подынтегральные выражения в теореме 1 явно зависят от функции $S(x)$, которая связана с поверхностью интегрирования. Сформулируем следствие, которое позволит ослабить данное требование.

Следствие. Пусть $x = 0$ *— асимптотически устойчивая точка равновесия системы* (1). *Тогда существуют положительно определенные непрерывно-дифференцируемые функции* $\phi(x)$ *и* $S(x)$, *такие что* $\phi(x) \to \infty$ *и* $S(x) \to \infty$ *при* $x \to \bar{D}$, $|\mathrm{grad}\{S(x)\}| \neq 0$ *для любых* $x \in D \setminus \{0\}$ *и для которых выполнено одно из следующих условий:*

1) *функция* $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}$ *интегрируема в области* $V = \{x \in D : S(x) \leq C\} \subset D$ *и* $\int_V \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}dV < 0$ *для всех* $C > 0$, *где* $\rho(x) = \phi(x)|\mathrm{grad}\{S(x)\}|$;

2) *функция* $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ *интегрируема в области* $V_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) \geq C\} \subset D$ *и* $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}dV_{inv} > 0$ *для всех* $C > 0$, *где* $\rho^{-1}(x) = \phi^{-1}(x)|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 1, рассмотрим два случая.

1. Если $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то и $\phi(x)\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$. Следовательно, дальнейшее доказательство аналогично доказательству в теореме 1, рассматривая только поток векторного поля $\phi(x)|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)$ через поверхность Γ.

2. Если $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то и $\phi^{-1}(x)\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$. Значит, дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1, но с учетом потока векторного поля $\phi^{-1}(x)|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)$ через поверхность Γ_{inv}. Следствие доказано.

Замечание. Если функция $\rho(x)$ выбрана так, что $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}$ и $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ интегрируемы, а также $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}<0$ и $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}>0$ для любых $x\in D\setminus\{0\}$, то соответствующие условия $\int_V \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}dV < 0$ и $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}dV_{inv} > 0$, представленные в следствии, будут выполнены. В [18] для сходимости почти всех решений (1) требуется интегрируемость $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ и выполнение условия $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$, что является частным требованием в следствии.

Теперь сформулируем достаточное условие устойчивости.

Теорема 2. *Пусть задана положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция $\rho(x)$, определенная в области D. Тогда точка $x = 0$ устойчива (асимптотически устойчива), если выполнено одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\} \quad (\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} < \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\})$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0$;

2) $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \ge 0 \quad (\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0)$
и $\mathrm{div}\{f(x)\} \le 0$ *для любых* $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\lim\limits_{|x|\to 0} \left[\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0$;

3) $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$
$(\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} < \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\})$,
где $\beta(x) > 1$ *и* $\mathrm{div}\{f(x)\} \le 0$ *или только* $\beta(x) = 1$ *для любых* $x \in D \setminus \{0\}$,
а также $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0$ *и* $\lim\limits_{|x|\to 0} \left[\rho(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0$.

Доказательство. Приведем доказательство устойчивости для каждого случая в отдельности. Доказательство асимптотической устойчивости аналогично.

1. Из соотношения $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} = \mathrm{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) + \mathrm{div}\{f(x)\}\rho(x)$ следует, что если $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \mathrm{div}\{f(x)\}\rho(x)$, то и $\mathrm{grad}\{\rho(x)\}f(x) \le 0$ в области $D \setminus \{0\}$. По условию $\rho(0) = 0$. Поэтому если $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0$, то и $\mathrm{grad}\{\rho(x)\}f(x)\big|_{x=0} = 0$. Значит, согласно теореме Ляпунова [29] система (1) устойчива.

2. Из выражения $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = \mathrm{grad}\{\rho^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) + \mathrm{div}\{f(x)\}\rho^{-1}(x)$ следует, что $\mathrm{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) = \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\} - \rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$. Если $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \ge 0$ и $\mathrm{div}\{f(x)\} \le 0$, то $\mathrm{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) \le 0$ в области $D \setminus \{0\}$. Если $\lim_{|x|\to 0} \left[\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0$, то и $\lim_{|x|\to 0} \left[\mathrm{grad}\{\rho(x)\}f(x)\right] = 0$. Значит, система (1) устойчива.

3. Условие 3 состоит в объединении результатов условий 1 и 2. Суммируя $\beta(x)\mathrm{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) = \beta(x)\rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\} - \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ и $\mathrm{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) = \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} - \mathrm{div}\{f(x)\}\rho(x)$, получим

$$(1 + \beta(x))\mathrm{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) =$$
$$= \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} - \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} + (\beta(x) - 1)\rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\}.$$

Если

$$\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$$

при $\beta(x) = 1$ или $\beta(x) > 1$ и $\mathrm{div}\{f(x)\} \le 0$, то

$$\mathrm{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) \le 0 \text{ в области } D \setminus \{0\}.$$

Если

$$\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0 \text{ и } \lim_{|x|\to 0}\left[\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0,$$

то и

$$\lim_{|x|\to 0}\left[\operatorname{grad}\{\rho(x)\}f(x)\right] = 0.$$

Значит, система (1) устойчива. Теорема 2 доказана.

Во введении отмечалось, что результат [23] применим только для систем второго порядка. Далее рассмотрим иллюстрацию полученных результатов для систем третьего порядка и сравним полученные результаты с [18].

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 2x_1x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= -2x_3^3, \end{aligned} \tag{2}$$

которая имеет точку равновесия $(0,0,0)$.

Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$, где α — натуральное число. Проверим сначала условия следствия. Так как $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} = -|x|^{2\alpha}(4\alpha+10)x_3^2 < 0$ для любых α и $x_3 \neq 0$, а также $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = (4\alpha-10)x_3^2|x|^{-2\alpha} > 0$ для $\alpha \geq 3$ и $x_3 \neq 0$, то условия следствия будут выполнены. Поскольку функция $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ интегрируема в области $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$, то будут выполнены условия теоремы 1 [18] о сходимости почти всех решений (2).

Проверим теперь условия теоремы 2. Соотношение $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} - \rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\} = -4\alpha x_3^2|x|^{2\alpha} < 0$ выполнено для любых α и $x_3 \neq 0$. В свою очередь $\operatorname{div}\{f(x)\} = -10x_3^2 < 0$ и функция $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$ для любых $\alpha \geq 3$ и $x_3 \neq 0$ (данный вывод можно также получить при использовании утверждения 2 в [18]). Пусть $\beta(x) = \beta \geq 1$. Тогда $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} - \beta\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = -(4\alpha + 10 + 4\beta\alpha - 10\beta)x_3^2|x|^{2\alpha} < 0$ при $\alpha > \frac{5(\beta-1)}{2(\beta+1)}$ и $x_3 \neq 0$. Все три случая дали одинаковые результаты. Значит, система (2) асимптотически устойчива с любыми начальными условиями, когда $x_3(0) \neq 0$. Если начальные условия содержат $x_3(0) = 0$, то система (2) устойчива. Фазовые траектории системы (2) изображены на рис. 2, где цикл получен для начального условия с $x_3 = 0$, спирали — при $x_3 \neq 0$.

Таким образом, следствие и теорема 2, как и результаты [18], дали положительные ответы об устойчивости (2). Дополнительно условия теоремы 2 позволили установить, когда система (2) устойчива и когда асимптотически устойчива.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 2x_1x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 2x_1x_3, \end{aligned} \tag{3}$$

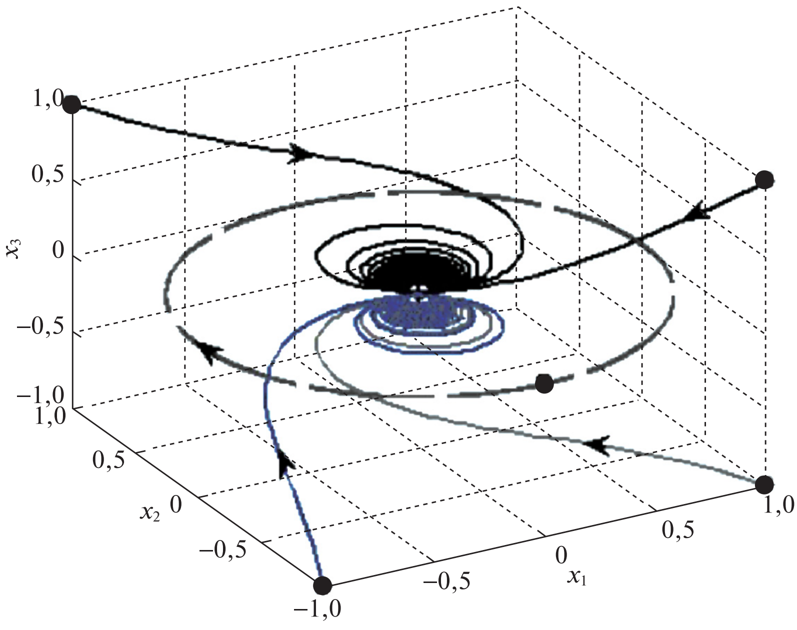

Рис. 2. Фазовые траектории системы (2).

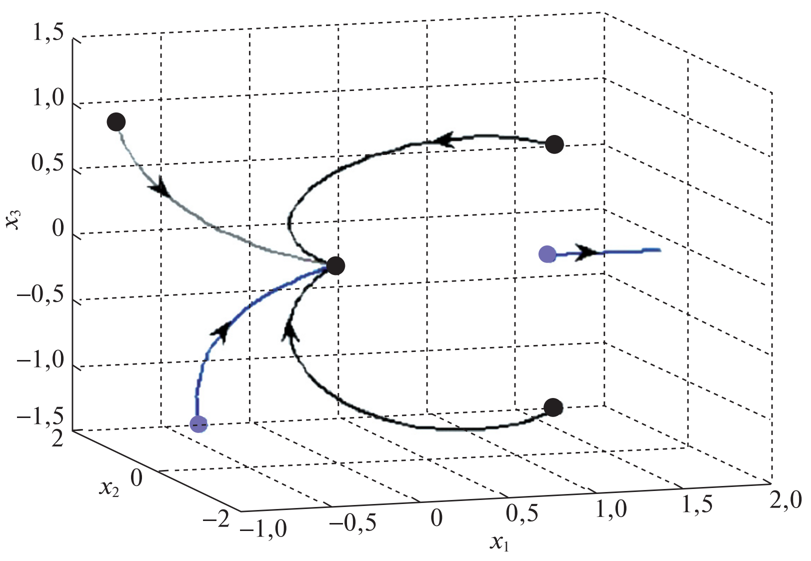

Рис. 3. Фазовые траектории системы (3).

которая имеет две точки равновесия $(0,0,0)$ и $(1,0,0)$. Все траектории системы сходятся к точке $(0,0,0)$, за исключением тех, которые начинаются на полуоси $x_1 \geq 1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ (см. рис. 3). Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$. Тогда $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = |x|^{-2\alpha}[2\alpha - 3 + 2x_1(3-\alpha)] > 0$ при $\alpha = 3$. Функция $\operatorname{div}\{f(x)\} = -3 + 6x_1$ не удовлетворяет условию $\operatorname{div}\{f(x)\} \leq 0$ при $x_1 > 0{,}5$. Соотношения $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq \rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\}$ и $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq$

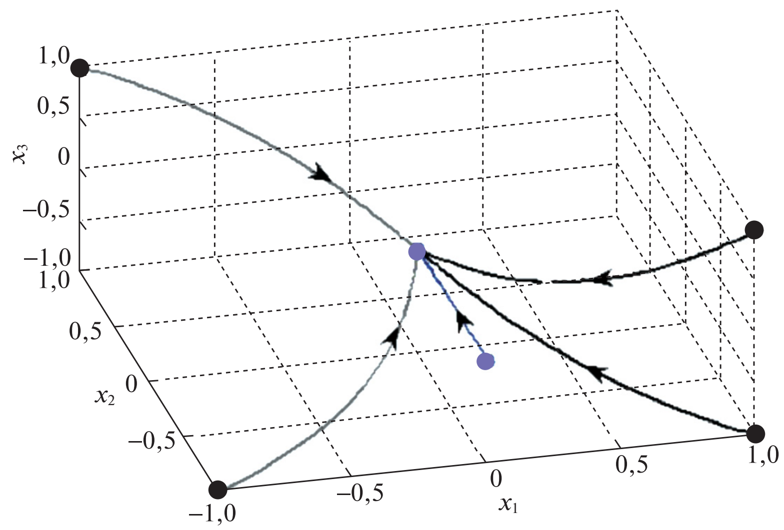

Рис. 4. Фазовый траектории системы (4) с двумя точками равновесия.

$\leq \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ тоже не выполнены. В результате в данном примере выполнены условия следствия (и условия теоремы 1 из [18]), но не выполнены условия теоремы 2 (и условия утверждения 2 из [18]).

Пример 3. Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -4x_1x_2^2 - x_1^3,\\
\dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 - x_2^3 - 8x_2x_3^2,\\
\dot{x}_3 &= -x_3^3 + 8x_2^2x_3
\end{aligned}
\tag{4}
$$

с точкой равновесия $(0, 0, 0)$. Фазовые траектории (4) изображены на рис. 4 для различных начальных условий.

Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$ и проверим сначала условия следствия. Вычислив $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} = |x|^{2\alpha-2}[(-2\alpha+1)x_1^4 + (-2\alpha+1)x_2^4 + (-2\alpha-11)x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 - -10x_1^2x_3^2 - 10x_2^2x_3^2]$, получим, что $\int_V \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}dV < 0$ для любых C и α. Для $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = |x|^{-2\alpha-2}[(2\alpha+1)x_1^4 + (2\alpha+1)x_2^4 + (2\alpha-11)x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 - -10x_1^2x_3^2 - 10x_2^2x_3^2]$ условие $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}dV_{inv} > 0$ выполнено для любых C и $\alpha \geq 3$. Следовательно, условия следствия выполнены (условия теоремы 1 из [18] выполнены только при $\alpha \geq 8$).

Проверим теперь условия теоремы 2. Соотношение $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} - -\rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\} = -2\alpha|x|^{2\alpha-2}(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) < 0$ выполнено для любых α и $x \neq 0$. Функция $\mathrm{div}\{f(x)\} = x_1^2 + x_2^2 - 11x_3^2$ не является знакоопределенной, значит, независимо от выбора $\rho^{-1}(x)$ утверждением 2 в [18] и вторым случаем теоремы 2 здесь воспользоваться нельзя. Условие $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} - -\beta\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} < 0$ в теореме 2 выполнено при $\beta = 1$ и $x \neq 0$.

Таким образом, для системы (4) выполнены условия следствия и теоремы 2, откуда следует, что $(0, 0, 0)$ — асимптотически устойчивая точка равновесия. Согласно [18] можем только заключить, что почти все решения (4) сходятся к $(0,0,0)$ поскольку не выполнены условия утверждения 2 из [18], а выполнены только условия теоремы 1 из [18].

3. Синтез закона управления

Рассмотрим динамическую систему, аффинную по управлению,

$$\dot{x} = \xi(x) + g(x)u(x), \tag{5}$$

где $u(x)$ — сигнал управления, функции $\xi(x)$, $g(x)$ и $u(x)$ — непрерывно-дифференцируемые в области D, $\xi(0) = 0$ и $g(0) = 0$ и система (5) является управляемой в области D. Сформулируем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть задана положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция $\rho(x)$ при $x \in D$. Если закон управления $u(x)$ выбран так, что выполнено одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} \le \rho(x)\mathrm{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\}$
$(\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < \rho(x)\mathrm{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\})$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\big|_{x=0} = 0$;

2) $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} \ge 0 \quad (\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} > 0)$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\lim\limits_{|x|\to 0}\left[\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\right] = 0$;

3) $\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} \le \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}$, $\beta \ge 1$
$(\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\})$,
где $\beta(x) > 1$ *и* $\mathrm{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\} \le 0$ *или только* $\beta(x) = 1$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$, *а также* $\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\big|_{x=0} = 0$ *и*
$\lim\limits_{|x|\to 0}\left[\rho(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\right] = 0$,

то замкнутая система будет устойчивой (асимптотически устойчивой).

Поскольку система (5) является управляемой в области D, то доказательство теоремы 3 непосредственно следует из доказательства теоремы 2 с учетом замены $f(x) = \xi(x) + g(x)u(x)$.

Отметим, что при синтезе закона управления с использованием функции Ляпунова $V(x)$ требуется выбрать u так, чтобы было выполнено алгебраическое неравенство $\mathrm{grad}\{V\}(f + gu) < 0$. Согласно теореме 3 u необходимо выбрать так, чтобы было выполнено дифференциальное неравенство, что дает новое условие поиска закона управления.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= dx_2 - x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \tag{6}$$

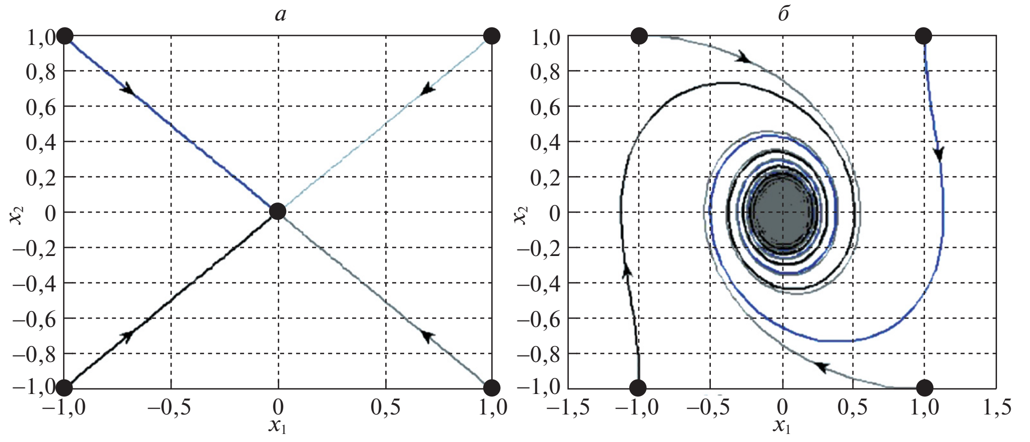

Рис. 5. Фазовые траектории в замкнутой системе при $d = 0$ (a) и при $d = 1$, $\beta = 2$ ($б$).

где d принимает значения 0 и 1. Требуется разработать закон управления u, который бы обеспечил асимптотическую устойчивость (6) в окрестности точки $(0, 0)$. Очевидно, что при $u = 0$ система (6) не является асимптотически устойчивой при любом значении d. Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$, α — натуральное число, и воспользуемся третьим случаем теоремы 3.

1. Пусть $d = 0$. Вычислим

$$\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} =$$
$$= -2\alpha(1+\beta)x_1^2x_2^2 + 2\alpha(1+\beta)ux_2 + (1-\beta)\left(-x_2^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2).$$

Выбрав $u = -x_2^3$, получим, что

$$\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < 0$$

при $\beta \geq 1$, $\alpha > \frac{2(\beta-1)}{\beta+1}$ и $x_2 \neq 0$, а также $\mathrm{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\} \leq 0$. Фазовые траектории замкнутой системы изображены на рис. 5,a.

2. Пусть $d = 1$. Вычислим

$$\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} =$$
$$= 2\alpha(1+\beta)x_1x_2 - 2\alpha(1+\beta)x_1^2x_2^2 +$$
$$+ 2\alpha(1+\beta)ux_2 + (1-\beta)\left(-x_2^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2).$$

Выбрав $u = -x_1 - (\beta - 1)x_2^3$, получим, что

$$\mathrm{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < 0$$

при $\beta \geq 1$ и $\alpha > \max\left\{\frac{(\beta-1)(3\beta-2)}{2(\beta+1)}, \frac{3\beta-2}{2(\beta+1)}\right\}$, а также $\mathrm{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\} \leq 0$. Фазовые траектории замкнутой системы изображены на рис. 5,$б$ при $\beta = 2$.

4. Заключение

Предложен метод исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Для исследования устойчивости требуется существование определенного вида поверхности интегрирования или вспомогательной скалярной функции. Сформулированы отдельно необходимые и достаточные условия устойчивости. Дальнейшие результаты могут быть связаны с распространением полученного метода на другие виды систем, например неавтономные системы, системы с запаздыванием и т.д.

Полученные результаты применены к синтезу закона управления с обратной связью для динамических систем. Показано, что для выбора закона управления требуется разрешить дифференциальное неравенство относительно сигнала управления, в то время как при использовании аппарата функций Ляпунова требуется разрешить алгебраическое неравенство. Продолжением работ по синтезу новых алгоритмов управления с использованием дивергентных методов может являться модификация некоторых эффективных схем управления, разработанных на базе метода функций Ляпунова. К таким методам управления можно отнести метод инвариантных эллипсоидов [30], метод скоростного градиента [31] и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. школа, 2003.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: 1955.
4. *Летов А.М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962.
5. *Малкин И.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
6. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. М.: Высш. шк., 1984.
7. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
8. *Yuan R., Ma Y.-A., Yuan B., Ao P.* Lyapunov Function as Potential Function: A Dynamical Equivalence // Chin. Phys. B. 2014. V. 23. No. 1. P. 010505.
9. *Bikdash M.U., Layton R.A.* An Energy-Based Lyapunov Function for Physical Systems // IFAC Proc. 2000. V. 33. No. 2. P. 81–86.
10. *Willems J.C.* Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory. Part II: Linear Systems with Quadratic Supply Rates // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 45. No. 5. P. 321–393.
11. *Zaremba S.K.* Divergence of Vector Fields and Differential Equations // Amer. J. Math. 1954. V. LXXV. P. 220–234.
12. *Fronteau J.* Le théorèm de Liouville et le problèm général de la stabilité. Genève: CERN, 1965.
13. *Brauchli H.I.* Index, divergenz und Stabilität in Autonomen equations. Zürich: Abhandlung Verlag, 1968.

14. *Шестаков А.А., Степанов А.Н.* Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 4. С. 650–661.

15. *Масина О.Н., Дружинина О.В.* Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.

16. *Дружинина О.В.* Индекс, дивергенция и функции Ляпунова в качественной теории динамических систем. М.: Изд. группа URSS, 2013.

17. *Rantzer A., Parrilo P.A.* On Convexity in Stabilization of Nonlinear Systems // Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney, Australia. 2000. P. 2942–2946.

18. *Rantzer A.* A Dual to Lyapunov's Stability Theorem // Syst. & Control Lett. 2001. V. 42. P. 161–168.

19. *Жуков В.П.* Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1978. № 6. С. 11–15.

    Zhukov V.P. On One Method for Qualitative Study of Nonlinear System Stability // Autom. Remote Control. 1978. V. 39. No. 6. P. 785–788.

20. *Жуков В.П.* К методу источников для исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1979. № 3. С. 12–17.

    Zhukov V.P. On the Method of Sources for Studying the Stability of Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 3. P. 330–335.

21. *Жуков В.П.* Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // АиТ. 1990. № 12. С. 59–65.

    Zhukov V.P. Necessary and Sufficient Conditions for Instability of Nonlinear Autonomous Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 12. P. 1652–1657.

22. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.

23. *Жуков В.П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // АиТ. 1999. № 7. С. 34–43.

    Zhukov V.P. On the Divergence Conditions for the Asymptotic Stability of Second-Order Nonlinear Dynamical Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 934–940.

24. *Monzon P.* On Necessary Conditions for Almost Global Stability // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 4. P. 631–634.

25. *Loizou S.G., Jadbabaie A.* Density Functions for Navigation-Function-Based Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2008. V. 53. No. 2. P. 612–617.

26. *Castañeda Á., Robledo G.* Differentiability of Palmer's Linearization Theorem and Converse Result for Density Functions // J. Diff. Equat. 2015. V. 259. No. 9. P. 4634–4650.

27. *Karabacak Ö., Wisniewski R., Leth J.* On the Almost Global Stability of Invariant Sets // Proc. 2018 Eur. Control Conf. (ECC 2018). Limassol, Cyprus. 2018. P. 1648–1653.

28. *Фуртат И.Б.* Исследование устойчивости динамических систем с использованием свойств потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность // Науч.-техн. вестн. информ. технологий, механики и оптики. 2013. Т. 83. № 1. С. 23–27.

29. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2009.

30. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.

Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.

31. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1979. № 9. С. 90–101.

Fradkov A.L. A Scheme of Speed Gradient and its Application in Problems of Adaptive Control // Autom. Remote Control. 1980. V. 40. No. 9. P. 1333–1342.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 21.05.2019

После доработки 02.07.2019

Принята к публикации 18.07.2019