Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

© 2020 г. **А.Ф. ШОРИКОВ, д-р физ.-мат. наук (afshorikov@mail.ru)**
(Уральский федеральный университет, Екатеринбург),
В.И. КАЛЕВ (butahlecoq@gmail.com)
(АО "НПО автоматики", Екатеринбург)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАКСНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСХОДОМ ТОПЛИВА РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ[1]

Предлагается математическая формализация и способ решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива двигательной установки ракеты-носителя. Исходная нелинейная модель объекта управления линеаризуется вдоль опорной траектории и аппроксимируется линейной дискретной динамической системой. Для аппроксимирующей системы формулируется задача минимаксного программного терминального управления с учетом заданных геометрических ограничений на векторы управления и возмущения. Предлагается новый метод и численный алгоритм решения задачи, которые для построения обобщенных областей достижимости линейной дискретной управляемой системы используют модификацию общего рекуррентного алгебраического метода. Эффективность предлагаемого решения исследуемой задачи демонстрируется на примере компьютерного моделирования.

Ключевые слова: адаптивное управление, минимаксный результат, гарантированное управление, робастное управление, управление расходом топлива, двигательная установка, ракета-носитель.

DOI: 10.31857/S0005231020020063

1. Введение

Задача терминального управления расходом топлива двигательной установки (ДУ) является одной из основных задач управления, решаемых для жидкостных ракет-носителей (РН). Суть этой задачи заключается в рационализации использования рабочих запасов компонентов топлива, требуемых для отработки программной траектории движения РН. Основная идея подобной рационализации может быть сведена к решению задачи синхронного и полного опорожнения топливных баков окислителя и горючего к заданному моменту времени. Другими словами, критерием качества в терминальной постановке рассматриваемой задачи служит величина отклонения фазовых координат объекта управления от их желаемых значений в финальный момент времени.

Известно (см., например, [1–3]), что при моделировании объектов управления ракетно-космической техники информация об априорно неопределенных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00544).

параметрах системы (начальном фазовом состоянии, возможных реализациях возмущения) обычно представляется в виде ограниченных множеств возможных значений этих параметров.

В данной статье рассматривается исходная нелинейная модель объекта управления и ее линейная дискретная аппроксимация относительно заданного опорного режима функционирования, в которой учитывается возмущение, описывающее возникающую в процессе моделирования (аппроксимации) погрешность. Предполагается, что ограничения на априорно неопределенные значения возмущения в рассматриваемом процессе управления являются выпуклыми, замкнутыми и ограниченными многогранниками (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах (далее, для краткости, будем писать просто "многогранник", подразумевая все указанные выше свойства), а множества значений управляющих воздействий являются конечными множествами. Для формализации рассматриваемой задачи оптимизации режимов расхода топлива жидкостной ДУ РН используется минимаксный подход [4–6], предполагающий нахождение такого управляющего воздействия, которое минимизирует наихудшие (максимальные) значения выбранного критерия качества, соответствующие возможным наихудшим реализациям допустимых значений возмущения.

Для решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива жидкостной ДУ РН в статье применяется детерминированный подход, основанный на результатах публикаций [6–12]. В этом подходе предполагается, что априорно неопределенные параметры системы принимают свои значения из некоторых известных множеств, имеющих вид многогранников. В качестве исходной модели рассматривается нелинейная модель функционирования ДУ РН. Сформированная модель динамики ДУ РН линеаризуется относительно заданного опорного режима функционирования, а затем дискретизируется и приводится к линейному рекуррентному виду [6, 11].

Для линейных дискретных управляемых динамических систем с геометрическими ограничениями на векторы состояния и управления в виде многогранников в [6–9] Шориковым А.Ф. был разработан и описан эффективный общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости, который базируется на полугрупповом свойстве выпуклых многогранных областей достижимости [6] и свойствах конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств. В методе используются возможности симплекс-метода для решения задач линейного математического программирования, а также способы преобразования описания многогранников с помощью соответствующих систем линейных алгебраических неравенств в их описание с помощью конечного числа вершин и наоборот.

Предлагаемое решение задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН для сформированной линейной дискретной управляемой динамической системы основывается на результатах публикаций [6, 8, 9] и базируется на общем рекуррентном алгебраическом методе построения областей достижимости для таких динамических систем и на алгебраических операциях над выпуклыми многогранными множествами [6, 13].

Для реализации этих методов Шориковым А.Ф. были разработаны соответствующие численные алгоритмы, которые послужили основой для создания Шориковым А.Ф. и Тюлюкиным В.А. компьютерного программного комплекса, описание и применение которого представлено в [6–10].

Отметим, что общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости применим для линейных дискретных управляемых динамических систем любой конечной размерности, а его компьютерная реализация ограничена только ресурсами памяти и быстродействием используемой компьютерной платформы. Поэтому для задач программного управления, которые решаются, как правило, задолго до непосредственного использования управляемого объекта (т.е. время решения задачи не ограничено), использование данного метода оправдано.

В данной статье для разработки алгоритма решения рассматриваемой задачи в части построения обобщенных областей достижимости используется модификация общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости, описанная в [12]. В заключительной части данной статьи представлены результаты компьютерного моделирования применения предлагаемого метода и численного алгоритма для решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН на конкретном модельном примере. Моделирование осуществлялось с использованием созданного авторами специализированного компьютерного программного комплекса.

2. Формирование модели расхода топлива ДУ РН

На промежутке времени $[\tau_0, \tau_f]$ рассматривается математическая модель [11], описывающая режим работы жидкостной ДУ третьей ступени РН (здесь τ_0 — время выхода на режим и τ_f — время выключения ДУ). Управляющее воздействие (далее — управление) в данной модели в силу конструктивных особенностей тракта управления расходом топлива РН реализуется в заданные дискретные моменты времени $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{T-1}\} \subset [\tau_0, \tau_f]$, где $\tau_T = \tau_f$, в соответствие которым может быть поставлен целочисленный набор $\overline{0, T-1} = \{0, 1, \ldots, T-1\}$ $(T \in \mathbb{N})$ (здесь T — количество заданных моментов времени, в которые планируется осуществлять реализацию управляющего воздействия; здесь и далее $\mathbb{N}$ —- множество всех натуральных чисел). С помощью управления $u(t)$ на целочисленном промежутке времени $\overline{0, T-1}$ регулирование угла поворота дросселя $\alpha_{th}(t)$ может быть описано рекуррентным соотношением

$$\alpha_{th}(t+1) = \alpha_{th}(t) + c_0 u(t), \quad t \in \overline{0, T-1}, \quad \alpha_{th}(0) = 0, \tag{1}$$

где c_0 — известный коэффициент при́вода дросселя. Отметим, что значение угла поворота дросселя $\alpha(t)$ при $t \in [\tau_t, \tau_{t+1}),\ t \in \overline{0, T-1}$, имеет фиксированное значение, т.е. не изменяется.

От угла поворота дросселя $\alpha_{th}(\tau)$ зависит значение коэффициента соотношения расходов окислителя и горючего [14], вычисляемое по формуле

$$K_m(\tau) = K + \Delta K + c_1 \alpha_{th}(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \tag{2}$$

где K — проектное значение коэффициента соотношения расходов компонентов топлива; ΔK — измеряемый в начальный момент времени параметр выставки дросселя в исходное положение; c_1 — известный коэффициент эффективности дросселя.

Выражение для вычисления тяги ДУ третьей ступени РН в пустоте имеет вид

$$P_s(\tau) = P + c_2(K_m(\tau) - K)^2 + c_3(K_m(\tau) - K), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \tag{3}$$

где P — проектное значение пустотной тяги ДУ; c_2, c_3 — известные коэффициенты рабочего режима ДУ.

Удельный импульс тяги ДУ в пустоте вычисляется по формуле

$$I_{sp}(\tau) = I + c_4(K_m(\tau) - K)^2 + c_5(K_m(\tau) - K), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \tag{4}$$

где I — проектное значение удельного импульса тяги ДУ; c_4, c_5 — известные коэффициенты рабочего режима ДУ.

Значения массовых расходов окислителя и горючего из топливных баков определяются соответственно так:

$$\begin{aligned} m_o(\tau) &= \frac{P_s(\tau)K_m(\tau)}{I_{sp}(\tau)(1 + K_m(\tau))}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \\ m_f(\tau) &= \frac{P_s(\tau)}{I_{sp}(\tau)(1 + K_m(\tau))}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f]. \end{aligned} \tag{5}$$

Текущие значения масс окислителя и горючего в топливных баках зависят от значений их массовых расходов (5) и могут быть вычислены посредством формул

$$\begin{aligned} M_o(\tau) &= M_o^{\text{ном}} + \Delta M_o - \int_{\tau_0}^{\tau} m_o(\tau) d\tau, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \\ M_f(\tau) &= M_f^{\text{ном}} + \Delta M_f - \int_{\tau_0}^{\tau} m_f(\tau) d\tau, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \end{aligned} \tag{6}$$

где $M_o^{\text{ном}}, M_f^{\text{ном}}$ — номинальные массы рабочих запасов окислителя и горючего; $\Delta M_o, \Delta M_f$ — измеряемые в начальный момент времени параметры заправки топливных баков.

Уравнения (5), (6) исходной нелинейной модели для массовых расходов окислителя $m_o(\tau)$ и горючего $m_f(\tau)$ и для масс окислителя $M_o(\tau)$ и горючего $M_f(\tau)$, линеаризуются (разложением в ряд Тейлора) относительно опорной траектории:

$$\begin{aligned} m_o^{ref}(\tau) &= \frac{PK}{I + IK}, \qquad M_o^{ref}(\tau) = M_o^{\text{ном}} - \frac{PK}{I + IK}\tau, \\ m_f^{ref}(\tau) &= \frac{P}{I + IK}, \qquad M_f^{ref}(\tau) = M_f^{\text{ном}} - \frac{P}{I + IK}\tau, \end{aligned} \tag{7}$$

после чего линеаризованная модель приводится к дискретному виду, соответствующему дискретным реализациям управления в моменты времени $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{T-1}\}$.

Рассмотрим на целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$ поставленную в соответствие исходной нелинейной непрерывной модели (1)–(6) линейную дискретную динамическую модель.

Значения массовых расходов компонентов топлива из баков вычисляются по рекуррентным дискретным соотношениям

$$
\begin{aligned}
m_o(t+1) &= m_o(t) + \alpha u(t) + \gamma_1 w_1(t), \quad m_o(0) = m_o^{\text{ном}} + \alpha \Delta K,\\
m_f(t+1) &= m_f(t) + \beta u(t) + \gamma_2 w_2(t), \quad m_f(0) = m_f^{\text{ном}} + \beta \Delta K,
\end{aligned} \tag{8}
$$

где $t \in \overline{0, T-1}$; α, β — полученные при линеаризации коэффициенты, равные

$$
\alpha = \frac{c_0 c_1 P}{I(1+K)} + \frac{c_0 c_1 c_3 K}{I(1+K)} - \frac{c_0 c_1 P K}{I(1+K)^2} - \frac{c_0 c_1 c_5 P K}{I^2(1+K)},
$$

$$
\beta = \frac{c_0 c_1 P}{I(1+K)^2} + \frac{c_0 c_1 c_5 P}{I^2(1+K)} - \frac{c_0 c_1 c_3}{1+K};
$$

$u(t)$ — скалярное управление; $m_o^{\text{ном}}, m_f^{\text{ном}}$ — номинальные значения массовых расходов окислителя и горючего; $w_1(t), w_2(t)$ — неконтролируемое возмущение (погрешность формирования модели); γ_1, γ_2 — коэффициенты, оцениваемые путем численного моделирования исходной и аппроксимирующей систем.

Дискретные рекуррентные уравнения, позволяющие определить значения масс окислителя и горючего в топливных баках, имеют вид

$$
\begin{aligned}
M_o(t+1) &= M_o(t) - \Delta T(t) m_o(t), \quad M_o(0) = M_o^{\text{ном}} + \Delta M_o,\\
M_f(t+1) &= M_f(t) - \Delta T(t) m_f(t), \quad M_f(0) = M_f^{\text{ном}} + \Delta M_f, \ t \in \overline{0, T-1},
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $\Delta T(t)$ — расчетное значение времени между двумя соседними управлениями.

Динамические уравнения объекта управления (8), (9) могут быть записаны в рекуррентном векторно-матричном виде

$$
x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)w(t), \quad x(0) = x_0, \tag{10}
$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^4$ — фазовый вектор системы (здесь и далее, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство векторов-столбцов; $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел); $A(t) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ — соответственно матрицы состояния, управления и возмущения системы, имеющие вид

$$
A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta T(t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta T(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(t) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

для $t \in \overline{0, T-1}$; $x(0) = x_0$ — заданное начальное значение фазового вектора, равное

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} m_o^{\text{ном}} + \alpha\Delta K \\ M_o^{\text{ном}} + \Delta M_o \\ m_f^{\text{ном}} + \beta\Delta K \\ M_f^{\text{ном}} + \Delta M_f \end{pmatrix};$$

$u(t) \in \mathbb{R}^1$ — управление, стесненное заданным ограничением

$$u(t) \in \mathbf{U}_1(t) \subset \mathbb{R}^1, \quad t \in \overline{0, T-1}; \tag{11}$$

$w(t) \in \mathbb{R}^2$ — возмущение (погрешность моделирования), значения которого выбираются в зависимости от сформированного на этапе линеаризации ограничения

$$w(t) \in \mathbf{W}_1(t) \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in \overline{0, T-1}. \tag{12}$$

Для ограничений (11) и (12) выполняются следующие условия.

Предположение 1. Множество $\mathbf{U}_1(t)$ $\forall t \in \overline{0, T-1}$ представляет собой конечный набор векторов в $\mathbb{R}^1$, определяющий все возможные значения управления в момент времени t.

Предположение 2. Множество $\mathbf{W}_1(t) \subset \mathbb{R}^2$ $\forall t \in \overline{0, T-1}$, ограничивающее возмущение на шаге t, является многогранником в векторном пространстве $\mathbb{R}^2$.

Для промежутка времени $\overline{0, T}$ и ограничения (11) введем в рассмотрение множество всех допустимых реализаций программных управлений $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$, описываемое соотношением, которое является конечным множеством,

$$\mathbf{U}(\overline{0, T}) = \left\{ u(\cdot) \mid u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbb{R}^{1 \times T} \ \forall t \in \overline{0, T-1}, u(t) \in \mathbf{U}_1(t) \right\}. \tag{13}$$

Аналогично для промежутка времени $\overline{0, T}$ и ограничения (12) введем в рассмотрение множество всех допустимых реализаций вектора возмущений $w(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$:

$$\mathbf{W}(\overline{0, T}) = \left\{ w(\cdot) \mid w(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbb{R}^{2 \times T} \ \forall t \in \overline{0, T-1}, w(t) \in \mathbf{W}_1(t) \right\}. \tag{14}$$

Рассматриваемый процесс управления будем оценивать терминальным функционалом $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbf{U}(\overline{0, T}) \times \mathbf{W}(\overline{0, T}) \to \mathbb{R}^1$, определенным на допустимых в дискретной динамической системе (10)–(14) реализациях наборов $(x_0, u(\cdot), w(\cdot)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbf{U}(\overline{0, T}) \times \mathbf{W}(\overline{0, T})$ и значения которого в финальный момент времени T определяются как

$$\Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot)) = \|x(T) - x_d\|_4 = F(x(T)), \tag{15}$$

где $x(T) = \overline{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot), w(\cdot)) \in \mathbb{R}^4$ — финальное фазовое состояние движения системы (10); $x_d \in \mathbb{R}^4$ — вектор, определяющий расчетное (номинальное) финальное фазовое состояние системы (10); $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ — выпуклый функционал; $\| \cdot \|_4$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^4$.

3. Постановка задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН

Сформулируем содержательно задачу минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН.

Для дискретной динамической системы (10) с ограничениями (11)–(14) требуется найти такое допустимое программное управление $u^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$, которое оптимизирует (минимизирует) гарантированный (наибольший) результат рассматриваемого процесса управления, оцениваемый функционалом (15), по сравнению с результатами, возможными при любых допустимых управлениях $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$ и любых реализациях возмущений $w(\cdot) = \{w(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{W}(\overline{0,T})$, т.е. такое управление, при котором будет выполняться условие

$$\Phi(x_0, u^{(e)}(\cdot), w(\cdot)) \leqslant \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot)). \tag{16}$$

Условие (16) называется условием *минимакса* [4–6].

Тогда для линейной дискретной динамической системы (10) с ограничениями (11)–(14) можно сформулировать задачу минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН.

З а д а ч а. *Для заданного целочисленного промежутка времени* $\overline{0,T}$ *и начального фазового вектора системы* $x(0) = x_0$ *требуется найти множество* $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0)) \subseteq \mathbf{U}(\overline{0,T})$ *программных управлений* $u^{(e)} = \{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$, *удовлетворяющих условию минимакса*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0)) = \Big\{ u^{(e)}(\cdot) \mid u^{(e)}(\cdot) = \Big\{u^{(e)}(t)\Big\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T}), \\ \Phi^{(e)} = \Phi(x_0, u^{(e)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot)) = \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u^{(e)}(\cdot), w(\cdot)) = \\ = \min_{u(\cdot)\in\mathbf{U}(\overline{0,T})} \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot)) \Big\}, \end{aligned} \tag{17}$$

которое будем называть множеством минимаксных программных управлений для данной задачи, а число $\Phi^{(e)}$ *будем называть ее минимаксным результатом.*

Как было показано в [6, 9], из-за конечности множества допустимых программных управлений $\mathbf{U}(\overline{0,T})$ и свойств, используемых общим рекуррентным алгебраическим методом при построении областей достижимости линейных дискретных управляемых систем, решение сформулированной многошаговой задачи существует и сводится к реализации конечной последовательности решения только одношаговых задач: поиска крайних опорных вершин многогранников (путем нахождения решений сформированных задач линейного математического программирования), выполнения алгебраических операций для преобразования их вершинного описания в описание соответствующими конечными системами линейных алгебраических уравнений и неравенств и выпуклого математического программирования.

4. Алгоритм решения задачи

Для решения сформулированной задачи используются результаты из [6–12] и аппарат построения и анализа областей достижимости динамических систем, который нашел широкое применение в теоретических и прикладных задачах [3–6]. Введем в рассмотрение понятие обобщенной области достижимости [4, 6].

Определение 1. *Обобщенной областью достижимости фазовых состояний линейной дискретной управляемой динамической системы* (10) *с ограничениями* (11)–(14) *при фиксированном допустимом программном управлении* $u_*(\cdot) = \{u_*(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$ *на момент времени* T, *соответствующей набору* $(x_0, u_*(\cdot))$, *называется множество, определяемое соотношением*

$$\mathbf{G}(0, x_0, u_*(\cdot); T) = \\ = \Big\{x(T) | x(T) \in \mathbb{R}^4, x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)w(t), \\ t \in \overline{0, T-1}, x(0) = x_0, w(t) \in \mathbf{W}_1(t)\Big\}. \tag{18}$$

В силу принятых предположений о том, что множества в ограничении (12) относятся к классу многогранников, в [6] было показано, что множество, описывающее обобщенную область достижимости такой динамической системы, будет также принадлежать к классу многогранников.

Известно (см., например, [6, 13, 15]), что любой многогранник может быть представлен двумя способами: как выпуклая оболочка конечной системы векторов и как множество решений конечной системы линейных алгебраических равенств и неравенств.

Определение 2. *Множество из* $k \in \mathbb{N}$ *крайних точек, задаваемых набором векторов* $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \overline{1,k}$, *выпуклая оболочка которых является многогранником* $P \in \mathbb{R}^n$, *называется вершинным описанием этого многогранника:*

$$P = \operatorname{convhull}(v_1, v_2, \ldots, v_k), \quad v_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1,k}. \tag{19}$$

Определение 3. *Система из* $m \in \mathbb{N}$ *линейных неравенств и* $l \in \mathbb{N}$ *линейных уравнений, определяющая многогранник* $P \in \mathbb{R}^n$, *называется фасетным описанием этого многогранника:*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leqslant b, A_e x = b_e\}, \ A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ b \in \mathbb{R}^m, \ A_e \in \mathbb{R}^{l\times n}, \ b_e \in \mathbb{R}^l. \tag{20}$$

Приведем описание общего рекуррентного алгебраического метода [6–8] построения обобщенных областей достижимости линейных дискретных управляемых систем вида (18).

Алгоритм (построение обобщенных областей достижимости).

0. Инициализация: $X(0) = \{x_0\}, u_*(\cdot) = \{u_*(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$.

1. Для всех $t \in \overline{0, T-1}$ последовательно выполнить:

$$\overline{X}(t+1) = (A(t)X(t) + B(t)u_*(t)) \oplus D(t)\mathbf{W}_1(t);$$
$$X(t+1) = \text{RemoveRedundancy}(\overline{X}(t+1)).$$

2. Закончить.

В основе общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости [6–9] лежит полугрупповое (эволюционное) свойство областей достижимости $\mathbf{G}(t, X(t), u_*(\cdot); t+1)$ $\forall t \in \overline{1, T-1}$. Операция RemoveRedundancy в алгоритме обозначает решение задачи нахождения крайних точек приведенного внутри скобок множества точек и решается как задача линейного математического программирования способом, предложенным в [7]. Операция суммирования множеств в данном алгоритме понимается как сумма Минковского (геометрическая сумма) этих множеств и обозначена с помощью символа $\oplus$.

Отметим, что согласно [6] в данной статье для линейных преобразований, геометрической суммы множеств и нахождения их крайних точек при построении областей достижимости используется вершинный способ описания многогранников (19), а фасетное описание (20) области достижимости необходимо для формирования задачи поиска экстремума целевого функционала на этом множестве и возможности использования методов математического программирования для ее решения.

Учитывая изложенное и результаты из [6–12], решение задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН может быть сведено к решению подзадач в следующей последовательности:

1. Упорядочение по возрастанию натурального индекса j конечного множества $\mathbf{U}(\overline{0, T})$, состоящего из N допустимых программных управлений $u^{(j)}(\cdot) = \{u^{(j)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$, т.е. формирование множества $\mathbf{U}(\overline{0, T}) = \{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1, N}}$;

2. Построение обобщенных областей достижимости $\mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)$ при фиксированных допустимых управлениях $u^{(j)}(\cdot) = \{u^{(j)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$ для всех $j \in \overline{1, N}$, где $X(0) = x_0$;

3. Формирование двойственного описания многогранников $\mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)$, $j = \overline{1, N}$, т.е. нахождение фасетного описания (20) каждого многогранника по его вершинному описанию (19) (операцию формирования двойного описания множества достижимости предлагается реализовывать, например, с использованием модификации метода двойного описания [6, 13], представленной в статье [16]);

4. Оптимизация функционала (15) на множестве $\mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)$ для всех $j \in \overline{1, N}$ методами выпуклого математического программирования, т.е. нахождение значения функционала:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}^{(e)} &= \Phi(x_0, u^{(j)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot)) = \max_{w(\cdot) \in \mathbf{W}(\overline{0, T})} \Phi(x_0, u^{(j)}(\cdot), w(\cdot)) = \\ &= \max_{x(T) \in \mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)} \|x(T) - x_d\|_4 = \|x^{(e)}(T) - x_d\|_4,\end{aligned} \tag{21}$$

где $x(T) = \overline{x}(T; \overline{0,T}, x_0, u^{(j)}(\cdot), w(\cdot))$; $x^{(e)}(T) = \overline{x}(T; \overline{0,T}, x_0, u^{(j)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot))$ (решается, например, с помощью метода Зойтендейка [17]).

5. Нахождение множества $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$ минимаксных программных управлений и числа $\Phi^{(e)}$ — гарантированного (минимаксного) результата решения рассматриваемой задачи путем решения задачи дискретной оптимизации

$$\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0)) =$$
$$= \left\{ u^{(e)}(\cdot) | u^{(e)}(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0,T}), \min_{u(\cdot)\in\mathbf{U}(\overline{0,T})} \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot)) = \right.$$
$$\left. = \min_{j\in\overline{1,N}} \tilde{\Phi}^{(j)} = \Phi^{(e)} \right\}.$$

Из результатов [6–9] следует, что сформированное множество допустимых программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$ есть множество всех минимаксных программных управлений, являющихся решением рассматриваемой задачи.

5. Численный пример решения задачи

Продемонстрируем эффективность предлагаемого метода решения задачи на численном примере, в котором моделируется решение задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ третьей ступени РН [11, 12].

Исходная нелинейная система описывается на промежутке времени $[\tau_0, \tau_f]$ уравнениями (1)–(6), значения параметров которых приведены в табл. 1.

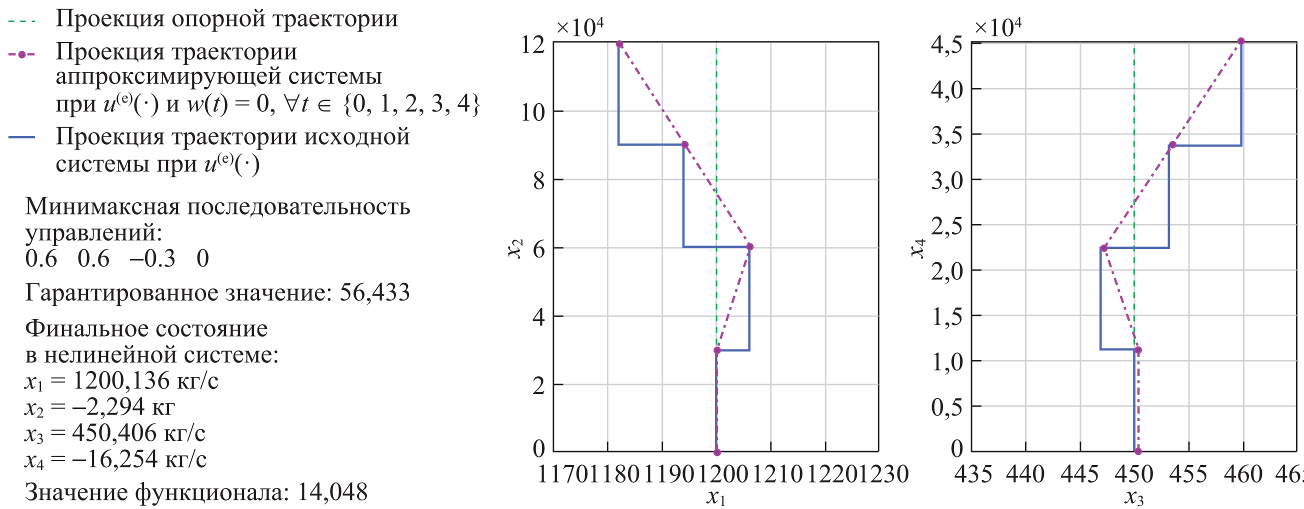
В соответствие исходной нелинейной модели поставлена сформированная линейная система, полученная посредством линеаризации вдоль опорной траектории, описываемой уравнениями (7), и последующей дискретизации. Предполагается, что допустимые моменты выбора (переключения) управляющего воздействия в исходной нелинейной системе (1)–(6) совпадают с целочисленными значениями промежутка $\overline{0, T-1}$. Таким образом, система векторно-матричных линейных рекуррентных соотношений, описывающая динамику системы, соответствует уравнениям (8), (9) и имеет вид

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)w(t),\ t \in \overline{0,3},$$

где $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\} \in \mathbb{R}^4$; $x_1(t)$ — массовый расход окислителя; $x_2(t)$ — масса окислителя в баке; $x_3(t)$ — массовый расход горючего; $x_4(t)$ — масса горючего в баке; $x(0) = x_0 = (1182{,}074;\ 119560;\ 459{,}832;\ 45260)^\top$;

Таблица 1. Значения параметров нелинейной системы

I, с	P, кгс	K	$M_o^{\text{ном}}$, кг	$M_f^{\text{ном}}$, кг	ΔM_o, кг	ΔM_f, кг	ΔK
320	528000	8/3	120000	45000	−440	260	−12/125
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	τ_0, с	τ_f, с
8	1/75	−6700	9000	−15	−12	0	100



Проекции фазовых траекторий для решения задачи: штриховая линия — проекция опорной траектории; штрихпунктирная линия — проекция траектории аппроксимирующей системы; сплошная линия — проекция траектории исходной системы.

$u(t) \in \mathbb{R}^1$ — скалярное управляющее воздействие, принимающее свои значения на конечном множестве $\mathbf{U}_1(t) = \{0{,}6;\ 0{,}3;\ 0;\ -0{,}3;\ -0{,}6\}$ $\forall t \in \overline{0,3}$ и соответствующее дискретным положениям вала привода дросселя; $w(t) \in \mathbf{W}_1(t) \subset \mathbb{R}^2$ — погрешность формирования модели, причем элементы ограничивающего множества $\mathbf{W}_1(t)$ принимают значения согласно неравенствам

$$-0{,}1 - 0{,}1t \leqslant w_1(t) \leqslant 0{,}1 + 0{,}1t,$$
$$-0{,}1 - 0{,}3t \leqslant w_2(t) \leqslant 0{,}1 + 0{,}3t.$$

Матрицы $A(t), B(t)$ и $D(t)$ в аппроксимирующей системе принимают значения:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 1 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 20{,}073 \\ 0 \\ -10{,}473 \\ 0 \end{pmatrix},\ D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \overline{0,3}.$$

Качество процесса управления в данной задаче оценивается значением выпуклого терминального функционала в финальный момент времени $T = 4$:

$$F(x(T)) = \sqrt{(x_1(T) - 1200)^2 + (x_2(T))^2 + (x_3(T) - 450)^2 + (x_4(T))^2},$$

обозначающее расстояние (евклидова норма) от финального состояния $x(T)$ до номинального (желаемого) финального состояния $x_d = (1200;\ 0;\ 450;\ 0)^\top$.

В соответствии с описанным выше методом решения задачи для конечных множеств $\mathbf{U}_1(t)$, описывающих множества всех допустимых значений управляющего воздействия в моменты времени t, было сформировано упорядоченное множество $\mathbf{U}(\overline{0,T}) = \{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1,N}}$, состоящее из $N = 5^T = 625$ допустимых программных управлений. Для каждого допустимого программного управления $\{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1,625}}$ были построены соответствующие обобщенные области достижимости (18) посредством модификации общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости [12] (см. рисунок), и каждая из сформированных областей достижимости после вычисления ее фасетного описания использовалась в качестве линейных ограничений при решении задачи оптимизации (максимизации) вида (21). В результате решения этой задачи максимизации был сформирован конечный набор числовых значений $\tilde{\Phi}^{(j)} = \Phi(x_0, u^{(j)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot))$, $j \in \overline{1,625}$, — наихудших значений функционала качества, соответствующих множеству всех допустимых программных управлений $\{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1,625}}$. В результате проделанных вычислений было найдено итоговое множество программных минимаксных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$, которое состоит из единственного допустимого программного управления $u^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0,3}} = \{0{,}6;\ 0{,}6;\ -0{,}3;\ 0\}$, гарантирующего результат решения задачи не хуже, чем $\Phi^{(e)} = 67{,}12$, т.е. выполнение условия (16).

На рисунке представлены проекции фазовых траекторий исходной системы (1)–(6) и аппроксимирующей линейной дискретной системы (10), порожденные найденным минимаксным программным управлением $u^{(e)}(\cdot)$. При использовании этого управления $u^{(e)}(\cdot)$ в исходной нелинейной системе (1)–(6)

Таблица 2. Результаты решения задачи минимаксного программного управления

	Управление	$x_1(T)$, кг/с	$x_2(T)$, кг	$x_3(T)$, кг/с	$x_4(T)$, кг	$F(x(T))$
Опорная траектория	$u(t) \equiv 0$	1200	0	450	0	**0**
Исходная система	$u^{(e)}(\cdot)$	1200,14	−2,29	450,41	−16,25	**14,05**
Линейная система	$u^{(e)}(\cdot)$	1201,14	−27,29	452,61	−61,25	**67,12**

финальное фазовое состояние приняло значение $x(\tau_1) = (1200{,}139;\ -2{,}294;\ 450{,}406;\ -16{,}254)^\top$, в котором функционал (15), оценивающий качество процесса управления в исходной нелинейной системе, принял значение $F(x(\tau_1)) = 14{,}048$. Отрицательные значения масс окислителя и горючего (вторая и четвертая компоненты вектора $x(\tau_1)$) не противоречат физическому смыслу и могут трактоваться как количества (массы) компонентов топлива, которые потребуется взять из гарантийных запасов, которые всегда резервируются в топливных баках любой РН для компенсации возмущений и помех [1, 14].

В табл. 2 сведены результаты применения найденного управления к нелинейной системе и результаты для наихудшего случая в линейной аппроксимирующей системе.

Численное моделирование решения модельной задачи проводилось в программной среде MATLAB R2014a на персональном компьютере с процессором Intel©Core i7-3770 CPU @ 3,4 GHz, с оперативной памятью 8 Gb и с видеокартой NVIDIA GeForce GT 730. Время решения задачи составило 37 с. Из результатов компьютерного моделирования можно сделать вывод, что сформированное множество минимаксных программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$ при его использовании для управления процессом расхода топлива ДУ третьей ступени жидкостных РН на основе уравнения динамики исходной нелинейной системы обеспечивает гарантированный (минимаксный) результат не хуже, чем результат управления в соответствующей аппроксимирующей линейной дискретной системе при возможных наихудших реализациях возмущений (погрешностей аппроксимации).

6. Заключение

В статье приведено описание нелинейной динамической системы, описывающей динамику расхода топлива жидкостных ДУ РН. Задача оптимизации управления расходом топлива ДУ РН сформулирована как задача минимаксного программного терминального управления линейной дискретной динамической системой с выпуклым функционалом качества, соответствующей исходной нелинейной динамической системе. В статье подробно описан предлагаемый метод решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН.

Сформулированная многошаговая минимаксная задача решается путем реализации конечной последовательности только одношаговых оптимизационных операций. На основе описанного метода решения рассматриваемой задачи был разработан численный алгоритм и получены численные результаты компьютерного моделирования решения задачи для математической модели работы ДУ третьих ступеней РН.

Результаты компьютерного моделирования показывают эффективность общего рекуррентного алгебраического метода [6–9] для решения рассматриваемой задачи и позволяют сделать вывод о применимости алгоритмов минимаксного программного терминального управления в задачах управления реальной ДУ РН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров Б.Н.* Избранные труды. Т. 2. Управление авиационными и космическими аппаратами. М.: Наука, 1983.
2. *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Мартынов А.И.* Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом. М.: Наука, 1968.
3. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
7. *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы / Негладкие задачи оптимизации и управление. 1988. С. 55–61.
8. *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // АиТ. 1993. № 4. С. 115–127.

   Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. Algorithm for Solving Terminal Control Problems for a Linear Discrete System // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 4. Part 2. P. 632–643.
9. *Шориков А.Ф.* Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах / Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы. Сб. научн. тр. Урал. гос. экон. ун-та. 2005. С. 119–138.
10. *Шориков А.Ф., Тюлюкин В.А.* Описание библиотеки компьютерных программ для моделирования решения задачи апостериорного минимаксного оценивания // Изв. Уральск. гос. экон. ун-та. 1999. № 2. С. 36–49.
11. *Шориков А.Ф., Калев В.И.* Формирование линейной дискретной динамической модели для решения задачи оптимального терминального управления расходом топлива ракеты-носителя // Информационные технологии и системы. Тр. 5-й Междунар. науч. конф. 2016. С. 61–66.
12. *Шориков А.Ф., Булаев В.В., Горанов А.Ю., Калев В.И.* Аппроксимация областей достижимости нелинейных дискретных управляемых динамических систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2018. № 1. С. 52–65.
13. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
14. *Челомей В.Н.* Пневмогидравлические системы двигательных установок с жидкостными ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1978.

15. *Бастраков С.И., Золотых Н.Ю.* Использование идей алгоритма Quickhull в методе двойного описания // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 232–237.

16. *Fukuda K., Prodon P.* Double Description Method Revisited // Lect. Notes in Comput. Sci. 1996. V. 1120. P. 91–111.

17. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений. М.: Изд-во ин. лит., 1963.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 07.04.2019

После доработки 10.07.2019

Принята к публикации 18.07.2019