Управление в технических системах

© 2020 г. **А.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук (a.tikhonov@spbu.ru)**
(Санкт-Петербургский государственный университет;
Санкт-Петербургский горный университет)

МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ[1]

Рассматривается проблема стабилизации электродинамической тросовой системы (ЭДТС) на круговой околоземной орбите в положении, когда трос вытянут вдоль местной вертикали. Для решения этой задачи предложена оригинальная схема построения ЭДТС, включающая отрицательно заряженный коллектор на нижнем конце троса и положительно заряженный коллектор на верхнем конце троса. Величина заряда на отрицательно заряженном коллекторе контролируется электронными эмиттерами. Аналитически и численно показано, что момент сил Лоренца, действующий на ЭДТС благодаря заряженным коллекторам на концах троса, значительно расширяет область устойчивости вертикального положения троса. Кроме того, управление зарядом на отрицательно заряженном коллекторе в соответствии с текущим угловым движением троса позволяет создать такую управляющую составляющую лоренцева момента, которая имеет диссипативный характер. Одновременная работа восстанавливающих и диссипативно-подобных составляющих управляющего лоренцева момента позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость вертикального положения троса без необходимости отключать электрический ток, протекающий вдоль троса. Предложенный метод управления может быть использован для стабилизации ЭДТС с целью повышения эффективности ее работы по удалению космического мусора.

Ключевые слова: электродинамическая тросовая система, стабилизация, геомагнитное поле, лоренцев момент, электродинамическое управление.

DOI: 10.31857/S0005231020020075

1. Введение

Среди разнообразия космических тросовых систем [1, 2] принято выделять в отдельную категорию системы с тросами, проводящими электрический ток. Ток, протекающий по изолированному тросу, следует рассматривать как ток, протекающий по псевдоцепи, включающей околоземную плазму и замыкающейся через ионосферные токи, текущие вдоль силовых линий геомагнитного поля [1]. В результате взаимодействия тока с геомагнитным полем возбуждаются амперовы и лоренцевы силы, оказывающие влияние на динамику проводящего троса [1]. Поэтому космические системы с проводящими тросами

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00672-а).

называют электродинамическими тросовыми системами (ЭДТС). В настоящее время ЭДТС рассматриваются как весьма перспективные для решения ряда задач по освоению космического пространства [3, 4]. В частности, активно исследуются возможности использования ЭДТС для удаления с орбиты отработавших искусственных спутников Земли (ИСЗ) или для уборки космического мусора. В этом случае трос используется как электродинамический тормоз орбитального движения, работающий на основе тормозящего влияния амперовых сил [5–13]. При этом наибольшей эффективностью отличается проводящий трос, функционирующий в режиме проводника с током, ориентированного в околоземном пространстве по местной вертикали [1, 5, 14]. Данная ориентация троса является устойчивой в центральном ньютоновском гравитационном поле [1, 15]. Вместе с тем, установлено, что под действием момента сил Ампера вертикальная ориентация троса разрушается [1, 16]. Проблема неустойчивости ЭДТС известна [10, 14, 17]. Решению этой проблемы посвящен ряд работ [13, 18, 19]. Среди возможных подходов к ее решению наиболее известным является подход, предлагающий использование тех или иных вариантов управления силой тока, протекающего по тросу [14, 18, 20], включая периодическое прерывание тока или изменение его направления. Однако в большинстве случаев ЭДТС должна функционировать в условиях, предполагающих непрерывное протекание тока вдоль троса в одном направлении, например для создания упомянутой выше силы тяги с целью удаления космического мусора или для работы ЭДТС в режиме генератора мощности. Поэтому периодическое выключение тока, протекающего по тросу, или переключение направления тока снижает эффективность ЭДТС и ограничивает возможности их использования.

В данной работе рассматривается принципиально другой способ обеспечения вертикального положения проводящего троса, основанный не на управлении силой тока, протекающего по тросу, а на разделении разноименных зарядов по концам троса и использовании момента лоренцевых сил [21, 22], влияние которого при определенных условиях является ориентирующим [23–30]. В [31] показано, что лоренцев момент может быть использован в качестве восстанавливающей составляющей управляющего момента в системе стабилизации проводящего троса в околоземном пространстве вдоль местной вертикали. При этом усложнение конструкции ЭДТС не является существенным, поскольку не предполагает введения в ее состав принципиально новых устройств по сравнению с теми, которые обычно используются в ЭДТС.

Если же дополнительно ввести в состав ЭДТС блок управления, позволяющий измерять текущее отклонение троса от вертикали и скорость изменения угла отклонения, а также управлять электронным эмиттером, установленным на отрицательно заряженном коллекторе ЭДТС, изменяя заряд этого коллектора в соответствии с данными измерений, то можно, как установлено в данной работе, создать дополнительный момент диссипативного характера [32]. Показано, что несмотря на неполную диссипацию, создаваемую предложенным устройством, одновременное включение восстанавливающего и диссипативного моментов позволяет решить задачу стабилизации ЭДТС в вертикальном положении.

2. Конструкция троса

Конструктивная схема рассматриваемого электродинамического троса показана на рис. 1.

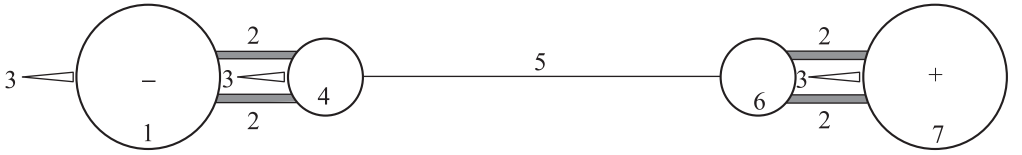


Рис. 1. Конструктивная схема электродинамического троса.

Поверхность 1, находящаяся на нижнем конце троса (ближе к Земле) получает отрицательный заряд, поддерживаемый электронным эмиттером 3 (например, холловским ионным источником) со стороны концевого тела 4. Аналогичные электронные эмиттеры 3, установленные на поверхности 1, позволяют управлять величиной заряда на поверхности 1, сбрасывая часть заряда с поверхности 1 в окружающее пространство. С помощью электроизолирующих креплений 2 поверхность 1 соединена с концевым телом 4 проводящего троса 5. На противоположном конце троса тело 6 аналогичным образом соединено с положительно заряженной поверхностью 7. Положительный заряд на поверхности 7 поддерживается с помощью электронного эмиттера 3, передающего отрицательный заряд на концевое тело 6.

3. Постановка задачи

Рассматривается электроизолированный проводящий трос, вдоль которого течет ток. Трос находится на околоземной круговой орбите в гравитационном и магнитном полях Земли и функционирует в режиме, близком к состоянию обычного тяжелого троса, находящегося в натянутом состоянии вдоль местной вертикали благодаря градиенту гравитационного поля Земли (рис. 2).

Далее будем называть этот режим движения троса номинальным. В номинальном режиме работы ЭДТС, предназначенной для торможения космического объекта, направление силы тока совпадает с направлением оси Cz

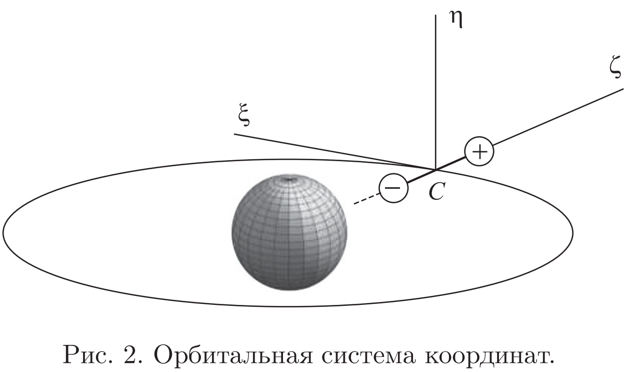


Рис. 2. Орбитальная система координат.

натянутого троса, а ось Cz коллинеарна оси $C\zeta$, направленной вдоль радиуса-вектора $\vec{R} = \overrightarrow{O_E C} = R\vec{\zeta}_0$ центра масс троса относительно центра Земли O_E. В ограниченной спутниковой постановке задачи орбита точки C предполагается круговой и лежащей в плоскости геомагнитного экватора. Оси $C\xi$ и $C\eta$, направленные соответственно по касательной к орбите в сторону движения точки C и по нормали к плоскости орбиты, образуют вместе с осью $C\zeta$ орбитальную систему координат $C\xi\eta\zeta$. В инерциальном пространстве орбитальная система координат поворачивается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{\eta}_0$.

К концам троса присоединены устройства для сбора электрических зарядов. Пренебрегая их размерами по сравнению с длиной троса и считая трос натянутым, будем моделировать систему тонким прямолинейным тросом с массой m_0 и с точечными массами m_1 и m_2 на концах и для краткости называть ее связкой. Координаты масс m_k обозначим через z_k $(k = 1, 2)$. Координаты центров зарядов q_k также будем считать совпадающими с z_k. Поскольку координата центра масс ЭДТС

$$z_C = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} z\, dm = \frac{m_0(z_1 + z_2) + 2m_1 z_1 + 2m_2 z_2}{2(m_0 + m_1 + m_2)}$$

равна нулю в силу выбора начала координат, то с учетом равенства $z_2 - z_1 = l$, где l – длина троса, получаем

$$z_1 = -\frac{l(m_0 + 2m_2)}{2(m_0 + m_1 + m_2)}, \quad z_2 = \frac{l(m_0 + 2m_1)}{2(m_0 + m_1 + m_2)}. \tag{1}$$

Сформулированная постановка задачи является максимально упрощенной с целью выполнения предварительного аналитического исследования, рассчитанного в первую очередь на апробацию нового метода стабилизации ЭДТС, а не на всесторонний учет разнообразных динамических факторов, усложняющих функционирование системы, но не изменяющих принципа ее работы.

4. Силы натяжения троса

Рассматриваемая конструктивная схема ЭДТС предполагает наличие разноименно заряженных коллекторов на концах связки и соответствующих сил кулонова притяжения коллекторов. Поэтому анализ вопроса о реализуемости принятой модели ЭДТС в виде связки, пребывающей в натянутом состоянии, является необходимым пунктом исследования, обсуждаемым в данном разделе.

Отличие рассматриваемого троса от обычного тяжелого троса, находящегося в натянутом состоянии вдоль местной вертикали благодаря градиенту гравитационного поля Земли, заключается в наличии лоренцевых и кулоновых сил, действующих на заряженные коллекторы, а также в наличии амперовых сил, распределенных по всей длине троса. В номинальном режиме движения связки сила Ампера ортогональна к тросу, а силами, определяющими натяжение троса, являются гравитационные, лоренцевы и кулоновы

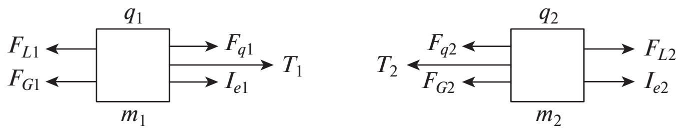


Рис. 3. Силы, действующие на концевые тела тросовой системы.

силы. Рассмотрим вопрос о силе натяжения троса и ее наибольшем значении, предполагая, что трос находится в номинальном движении (ось Cz троса совпадает с осью $C\zeta$ местной вертикали), а геомагнитное поле моделируется прямым магнитным диполем [15] с магнитной индукцией $\vec{B} = -g_1^0(R_E/r)^3\vec{\eta}_0$, где $g_1^0 = -29556{,}8$ нТл — гауссов коэффициент, R_E — средний радиус Земли, r — расстояние от центра Земли до данной точки пространства. В этом случае расстояния от центра Земли до концевых масс m_1 и m_2 соответственно равны

$$R_1 = R + z_1, \quad R_2 = R + z_2. \tag{2}$$

Скорости концевых точек, находящихся на расстояниях R_k от центра Земли и обладающих зарядами q_k, вычисленные в движении относительно геомагнитного поля, равны $\vec{v}_k = R_k(\omega_0 - \omega_E)\,\vec{\xi}_0$. Поскольку эти скорости ортогональны вектору $\vec{B}$, то лоренцевы силы $\vec{F}_{Lk} = q_k\vec{v}_k \times \vec{B}_k$, действующие на коллекторы с зарядами q_k, направлены вдоль троса. Здесь $\vec{B}_k = \vec{B}(\vec{R}_k)$ $(k = 1, 2)$. Также вдоль троса направлены гравитационные силы $F_{Gk} = \frac{\mu m_k}{R_k^2}$, где μ — гравитационная постоянная Земли, кулоновы силы $F_{qk} = \frac{k_0 q_1 q_2}{(R_2 - R_1)^2}$, $k_0 = 9{,}0 \cdot 10^9$ — постоянная закона Кулона, переносные силы инерции I_{ek}, действующие на концевые массы и заряды, и силы натяжения троса T_k $(k = 1, 2)$, приложенные к концевым точкам (рис. 3).

В равновесном положении концевых точек имеют место следующие равенства проекций активных сил и переносных сил инерции на местную вертикаль:

$$T_1 + F_{q1} + m_1\omega_0^2 R_1 - \frac{\mu m_1}{R_1^2} - |q_1|v_1 B_1 = 0,$$
$$-T_2 - F_{q2} - \frac{\mu m_2}{R_2^2} + m_2\omega_0^2 R_2 + q_2 v_2 B_2 = 0.$$

Отсюда находим силы натяжения троса, приложенные к концевым точкам:

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1\left(\frac{\mu}{R_1^2} - \omega_0^2 R_1\right) + |q_1|v_1 B_1 - F_{q1}, \\ T_2 &= m_2\left(\omega_0^2 R_2 - \frac{\mu}{R_2^2}\right) + q_2 v_2 B_2 - F_{q2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для отыскания натяжения троса в произвольной его точке рассмотрим бесконечно малый элемент троса длиной dr и массой dm_0. Силы, действующие на этот элемент, показаны на рис. 4.

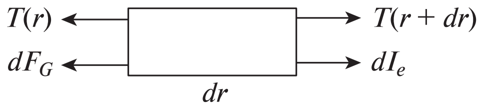


Рис. 4. Силы, действующие на элемент троса.

Здесь $dF_G = \frac{\mu\, dm_0}{r^2}$, $dI_e = \omega_0^2 r\, dm_0$, $dm_0 = \gamma dr$, $\gamma = \frac{m_0}{l}$ — постоянная линейная плотность троса. Из условий равновесия элемента троса получаем уравнение

$$T(r+dr) - T(r) + dI_e - dF_G = 0.$$

Отсюда

$$dT(r) = \left(\frac{\mu}{r^2} - \omega_0^2 r\right)\gamma\, dr.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$T(r) = \gamma\left(-\frac{\mu}{r} - \frac{\omega_0^2 r^2}{2}\right) + \mathrm{const}, \tag{4}$$

причем постоянная интегрирования может быть найдена с помощью любого из равенств (3), задающих натяжение троса на концах. Воспользовавшись первым из равенств (3), получим

$$\begin{aligned} T(r) = \gamma\left(-\frac{\mu}{r} - \frac{\omega_0^2 r^2}{2}\right) + \gamma\left(\frac{\mu}{R_1} + \frac{\omega_0^2 R_1^2}{2}\right) + \\ + m_1\left(\frac{\mu}{R_1^2} - \omega_0^2 R_1\right) + |q_1|\, v_1 B_1 - F_{q1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку $\frac{d^2T(r)}{dr^2} = \gamma\left(-\frac{2\mu}{r^3} - \omega_0^2\right) < 0$, то $T(r)$ достигает максимума при $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3}$. Но $\omega_0 = \mathrm{const}$. Поэтому последнее равенство достигается при некотором конкретном значении $r = R_0$. На основании (5) имеем

$$\begin{aligned} T(r)_{\max} = T(R_0) = \frac{\gamma\mu}{R_0}\left(-\frac{3}{2} + \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right) + \\ + \frac{\mu m_1}{R_0^2}\left(\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 - \frac{R_1}{R_0}\right) + \\ + |q_1|\left(\sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} - \omega_E\right)(-g_1^0)\frac{R_E^3}{R_1^2} - \frac{k_0|q_1|q_2}{(R_2 - R_1)^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для отыскания величины R_0, входящей в (6), составим уравнение равновесия сил, растягивающих трос, в точке $r = R_0$. Поскольку кулоновы силы, приложенные к концевым точкам, равны по величине и противоположны по направлению, то в точке O уравновешиваются гравитационные, лоренцевы силы и силы инерции. Следовательно,

$$\omega_0^2\left(m_1R_1+m_2R_2+\int\limits_{R_1}^{R_2}\gamma r\,dr\right)-\mu\left(\frac{m_1}{R_1^2}+\frac{m_2}{R_2^2}+\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\gamma\,dr}{r^2}\right)+F_{L2}-F_{L1}=0.$$

После интегрирования и подстановки явных выражений для лоренцевых сил получаем следующее квадратное уравнение относительно ω_0:

$$\omega_0^2\left(m_1R_1+m_2R_2+\frac{1}{2}m_0(R_1+R_2)\right)+ \\ +(\omega_0-\omega_E)(q_2R_2B(R_2)-|q_1|R_1B(R_1))-\mu\left(\frac{m_1}{R_1^2}+\frac{m_2}{R_2^2}+\frac{m_0}{R_1R_2}\right)=0. \tag{7}$$

Решив это уравнение, найдем угловую скорость обращения радиуса-вектора $\vec{R}_0$ точки O, которую можно назвать центром, движущимся по орбите, или орбитальным центром [33]. В рассматриваемой постановке задачи $B(R_1)=-g_1^0\frac{R_E^3}{R_1^3}$, $B(R_2)=-g_1^0\frac{R_E^3}{R_2^3}$ и уравнение (7) принимает вид

$$\omega_0^2\left(m_1R_1+m_2R_2+\frac{1}{2}m_0(R_1+R_2)\right)+\omega_0(-g_1^0)R_E^3\left(\frac{q_2}{R_2^2}-\frac{|q_1|}{R_1^2}\right)- \\ -\omega_E(-g_1^0)R_E^3\left(\frac{q_2}{R_2^2}-\frac{|q_1|}{R_1^2}\right)-\mu\left(\frac{m_1}{R_1^2}+\frac{m_2}{R_2^2}+\frac{m_0}{R_1R_2}\right)=0. \tag{8}$$

После отыскания ω_0, вычисляем R_0 и подставляем в (6).

Пример 1. Рассматривается связка с тросом длиной $l=2\cdot10^4$ м и погонной плотностью $\gamma=2\cdot10^{-3}$ кг/м, с концевыми массами $m_1=10^4$ кг, $m_2=1{,}02\cdot10^4$ кг, концевыми зарядами $q_1=-10^{-3}$ Кл, $q_2=10^{-3}$ Кл. Центр масс системы движется по круговой околоземной орбите с радиусом $R=7\cdot10^6$ м. На основании формул (1), (2) находим $R_1=6{,}990098814\cdot10^6$ м, $R_2=7{,}010098814\cdot10^6$ м. Из уравнения (8) находим $\omega_0=1{,}078014368\cdot10^{-3}$ с$^{-1}$ и затем по формуле $R_0=(\mu/\omega_0^2)^{1/3}$ получаем $R_0=6{,}999985732\cdot10^6$ м. Подстановка этого значения в формулу (6) позволяет найти $T_{\max}=352{,}425$ Н. Наконец, по формулам (3) находим натяжения тросов на концах: $T_1=352{,}084$ Н, $T_2=352{,}069$ Н.

С учетом сказанного в начале данного раздела полученные результаты следует рассматривать не только как оценочные сверху для сил натяжения троса, но и свидетельствующие о реализуемости модели натянутой связки при выбранных параметрах ЭДТС.

5. Уравнения вращательного движения связки

Как уже упоминалось выше в разделе 3, ЭДТС в развернутом состоянии моделируется тонкой нитью с точечными массами на концах и для краткости

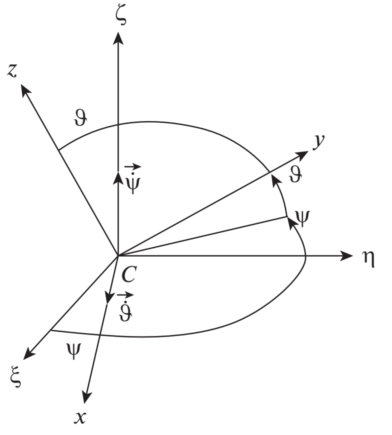


Рис. 5. Сопутствующая система координат.

называется связкой. Нить не оказывает сопротивления деформациям сжатия. В рабочем состоянии нить остается натянутой во все время движения. При этом она сохраняет прямолинейную форму и считается нерастяжимой. В системе главных центральных осей инерции $C\tilde{x}\tilde{y}z$ (орты $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$) тензор инерции связки имеет вид $J = \operatorname{diag}(A, A, C_0)$, где

$$A = \frac{m_0}{3}(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2,$$

а C_0 пренебрежимо мало по сравнению с A.

Поскольку рассматривается симметричная относительно продольной оси конструкция троса, то для устранения неопределенности в выборе осей $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ представляется целесообразным ввести в рассмотрение сопутствующие оси (оси Резаля) $Cxyz$ с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ так, что ось Cz (с ортом $\vec{i}_3 = \vec{k}$), как и ранее, направлена вдоль натянутого троса, а трехгранник $Cxyz$ не участвует в повороте троса вокруг оси Cz на угол φ. Взаимную ориентацию осей систем координат $C\xi\eta\zeta$ и $Cxyz$ зададим с помощью матрицы направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

так, что

$$\vec{\xi}_0 = \alpha_1 \vec{i}_1 + \alpha_2 \vec{i}_2 + \alpha_3 \vec{i}_3, \quad \vec{\eta}_0 = \beta_1 \vec{i}_1 + \beta_2 \vec{i}_2 + \beta_3 \vec{i}_3, \quad \vec{\zeta}_0 = \gamma_1 \vec{i}_1 + \gamma_2 \vec{i}_2 + \gamma_3 \vec{i}_3.$$

Наряду с направляющими косинусами будем также использовать углы ϑ и ψ, однозначно определяющие положение сопутствующего трехгранника относительно орбитальной системы координат (рис. 5).

Зависимость элементов матрицы $\mathbf{A}$ от углов ϑ и ψ определяется равенствами

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \cos\psi, \quad \alpha_2 = -\sin\psi\cos\vartheta, \quad \alpha_3 = \sin\psi\sin\vartheta, \\ &\beta_1 = \sin\psi, \quad \beta_2 = \cos\psi\cos\vartheta, \quad \beta_3 = -\cos\psi\sin\vartheta, \\ &\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \sin\vartheta, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{10}$$

Кинематическими характеристиками вращательного движения связки являются: абсолютная угловая скорость $\vec{\omega}$, угловая скорость сопутствующего трехгранника относительно орбитальной системы координат $\vec{\omega}_1 = p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$, угловая скорость связки относительно сопутствующего трехгранника $\dot{\varphi}\vec{k}$, угловая скорость связки относительно орбитальной системы координат $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_1 + \dot{\varphi}\vec{k}$.

Эти величины связаны соотношением $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0$, которое в проекциях на оси $Cxyz$ имеет вид

$$\omega_x = p + \omega_0\beta_1, \quad \omega_y = q + \omega_0\beta_2, \quad \omega_z = r + \dot{\varphi} + \omega_0\beta_3. \tag{11}$$

Кроме того, справедливы равенства

$$p = \dot{\vartheta}, \quad q = \dot{\psi}\sin\vartheta, \quad r = \dot{\psi}\cos\vartheta. \tag{12}$$

Оси Резаля остаются главными центральными осями инерции ЭДТС во все время движения. Поэтому динамические уравнения вращательного движения ЭДТС в проекциях на оси Резаля получим проектированием на x, y, z векторного уравнения

$$\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{xyz} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_0) \times \vec{K} = \vec{M}, \tag{13}$$

представляющего собой теорему об изменении кинетического момента $\vec{K} = A\omega_x\vec{i}+A\omega_y\vec{j}$ под действием главного момента $\vec{M}$ внешних сил относительно центра масс.

6. Моменты сил, действующих на связку

В центральном ньютоновском гравитационном поле на связку действует гравитационный момент $\vec{M}_G$ [15]. В данной задаче с учетом принятых обозначений проекции гравитационного момента на оси $Cxyz$ имеют вид

$$M_{Gx} = 3\omega_0^2 A(-\gamma_2\gamma_3), \quad M_{Gy} = 3\omega_0^2 A\gamma_1\gamma_3, \quad M_{Gz} = 0. \tag{14}$$

Для вычисления главного момента сил Лоренца, действующих на заряды q_1 и q_2 в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, воспользуемся простейшей аппроксимацией этого момента [22], учитывающей точечный характер зарядов:

$$\vec{M}_L = \vec{P} \times \vec{T}. \tag{15}$$

$\vec{P} = (q_1 z_1 + q_2 z_2)\,\vec{k}$, $\vec{T} = \mathbf{A}^\top(\vec{v}_C \times \vec{B})$, $\vec{v}_C = R(\omega_0 - \omega_E)\,\vec{\xi}_0$, где $\vec{\omega}_E$ — угловая скорость суточного вращения Земли. В условиях моделирования геомагнитного поля прямым магнитным диполем $\vec{B} = -g_1^0(R_E/R)^3\vec{\eta}_0$, где $g_1^0 = -29556{,}8$ нТл — гауссов коэффициент, R_E — средний радиус Земли. Поэтому

$$
\begin{aligned}
&M_{Lx} = R_E^3 R^{-2} g_1^0(\omega_0 - \omega_E)(q_1 z_1 + q_2 z_2)\gamma_2,\\
&M_{Ly} = -R_E^3 R^{-2} g_1^0(\omega_0 - \omega_E)(q_1 z_1 + q_2 z_2)\gamma_1, \quad M_{Lz} = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Главный момент сил Ампера вычислим по формуле [1]

$$
\vec{M}_A = \int\limits_{z_1}^{z_2} \vec{\rho} \times (I\vec{k} \times \vec{B})\,dz,
\tag{17}
$$

где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор, проведенный из точки C в точку троса с текущей координатой z, I — величина силы тока в проводнике. Принимая $I = \mathrm{const}$, в результате интегрирования (17) получаем

$$
\begin{aligned}
&M_{Ax} = \frac{1}{2} I g_1^0 (R_E/R)^3 (z_2^2 - z_1^2)\beta_1,\\
&M_{Ay} = \frac{1}{2} I g_1^0 (R_E/R)^3 (z_2^2 - z_1^2)\beta_2, \quad M_{Az} = 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

7. ЭДТС без системы управления

7.1. Положения равновесия связки

В качестве дифференциальных уравнений вращательного движения связки относительно центра масс будем использовать динамические уравнения Эйлера, вытекающие из (13),

$$
\begin{cases}
A\dot{\omega}_x - A\omega_y\omega_z = M_{Gx} + M_{Lx} + M_{Ax},\\
A\dot{\omega}_y + A\omega_z\omega_x = M_{Gy} + M_{Ly} + M_{Ay},\\
\omega_z = \omega_{z0} = \mathrm{const}
\end{cases}
\tag{19}
$$

и кинематические уравнения Пуассона

$$
\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_1 + \omega_y\alpha_3 - \omega_z\alpha_2 = -\omega_0\gamma_1,\\
&\dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 = 0, \qquad \binom{x\to y\to z}{1\to 2\to 3}\\
&\dot{\gamma}_1 + \omega_y\gamma_3 - \omega_z\gamma_2 = \omega_0\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Для отыскания равновесных положений связки в орбитальной системе координат будем рассматривать направляющие косинусы как неизвестные постоянные величины, а проекции относительной угловой скорости p, q, r будем полагать равными нулю в уравнениях (11), (19), (20). Динамические уравнения примут вид

$$
\tag{21}
\begin{cases}
A\omega_0^2\beta_2\beta_3 = 3\omega_0^2 A\gamma_2\gamma_3 - \dfrac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2)\gamma_2 - \\
\qquad\qquad - \dfrac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\beta_1, \\
A\omega_0^2\beta_1\beta_3 = 3\omega_0^2 A\gamma_1\gamma_3 - \dfrac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2)\gamma_1 + \\
\qquad\qquad + \dfrac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\beta_2.
\end{cases}
$$

Из (20), (21) следует, что номинальный режим движения связки, соответствующий значению $\gamma_3 = 1$, имеет место лишь при условии

$$
\tag{22}
z_1^2 = z_2^2.
$$

В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Ввиду однородности троса условие (22) выполняется при $z_1 = -z_2$, $m_1 = m_2$. В этом случае $A = (m_0/3 + 2m_2)z_2^2$.

Для решения вопроса о существовании других возможных положений равновесия связки в орбитальной системе координат перейдем в уравнениях (21) от направляющих косинусов к углам ϑ и ψ (рис. 5) по формулам (10). Получим систему уравнений

$$
\tag{23}
\begin{aligned}
&A\omega_0^2\sin\vartheta\sin\psi\cos\psi = -\frac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\cos\psi\cos\vartheta, \\
&A\omega_0^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\psi = \frac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\sin\psi - -3A\omega_0^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \\
&\qquad\qquad + \frac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2)\sin\vartheta.
\end{aligned}
$$

Из (23) следует, что кроме номинального режима движения $\vartheta = 0$, теоретически возможны также и другие (“наклонные”) положения равновесия связки в орбитальной системе координат, определяемые из условий:

$$
\tag{24}
1)\,\sin\psi = 0,\ 4A\omega_0^2\cos\vartheta_1 = -L, \quad \text{или} \quad 2)\,\cos\psi = 0,\ 3A\omega_0^2\cos\vartheta_2 = -L,
$$

где

$$
L = -\frac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2).
$$

Поскольку $L > 0$, то возможным “наклонным” положениям равновесия связки могут отвечать лишь значения ϑ_1 и ϑ_2 из промежутка $(\pi/2, \pi)$. Эти положения соответствуют “перевернутому” состоянию троса (если при этом он может пребывать в натянутом состоянии), не обеспечивающему номинального режима функционирования ЭДТС, и поэтому не рассматриваются в рамках данной работы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости номинального режима движения связки. Для этого обратимся к исходным уравнениям Эйлера (19) и, вводя обозначение $a = Ig_1^0(R_E/R)^3(z_2^2 - z_1^2)/2$, перепишем первые два из них в виде

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x - A\omega_y\omega_z = -3A\omega_0^2\gamma_2\gamma_3 - L\gamma_2 + a\beta_1, \\ A\dot{\omega}_y + A\omega_x\omega_z = 3A\omega_0^2\gamma_1\gamma_3 + L\gamma_1 + a\beta_2. \end{cases} \tag{25}$$

Несложно проверить, что имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2 - L\gamma_3 - A\omega_0(\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2)\right] = \\ = a(\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 - \omega_0(\beta_1^2 + \beta_2^2)),$$

где производная в левой части равенства вычисляется в силу (25). Переходя от абсолютных угловых скоростей ω_x, ω_y к относительным угловым скоростям p, q по формулам (11), перепишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(p^2 + q^2) - \frac{A}{2}\omega_0^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) - \frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2 - L\gamma_3\right] = a(p\beta_1 + q\beta_2).$$

Затем, вводя новую переменную $\Delta = 1 - \gamma_3$, представляющую собой отклонение связки от номинального режима движения $\gamma_3 = 1$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\frac{d}{dt}\left[A(p^2 + q^2) + (3A\omega_0^2 + L)\alpha_3^2 + (4A\omega_0^2 + L)\beta_3^2 + L\Delta^2\right] = 2a(p\beta_1 + q\beta_2).$$

Отсюда следует, что если учесть условие (22), то $a = 0$ и получаем первый интеграл

$$V(\alpha_3, \beta_3, \Delta, p, q) = A(p^2 + q^2) + (3A\omega_0^2 + L)\alpha_3^2 + \\ + (4A\omega_0^2 + L)\beta_3^2 + L\Delta^2 = h = \text{const}. \tag{26}$$

Поскольку выбором $q_1z_1 + q_2z_2 > 0$ всегда можно обеспечить выполнение неравенства $L > 0$, то функция $V(\alpha_3, \beta_3, \Delta, p, q)$ будет положительно определенной. Принимая ее в качестве функции Ляпунова, приходим к выводу об устойчивости номинального режима движения связки по отклонениям $\alpha_3, \beta_3, \Delta$ и угловым скоростям p, q на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. Для оценки амплитуды возмущенных колебаний ЭДТС в окрестности устойчивого номинального режима движения имеем неравенства

$$\alpha_3^2 \leqslant h/(3A\omega_0^2 + L), \quad \beta_3^2 \leqslant h/(4A\omega_0^2 + L), \quad \Delta^2 \leqslant h/L, \tag{27}$$

вытекающие из (26). Из (27) следует, что при

$$h < L \tag{28}$$

положительно заряженный конец троса остается выше отрицательно заряженного конца троса, как и должно быть в номинальном режиме движения. Заметим что условие “непереворачиваемости” троса (28) накладывает ограничение $p^2 + q^2 < L/A$ на начальную угловую скорость связки. Заметим также, что увеличение параметра $L > 0$, обусловленного наличием лоренцева момента, расширяет область устойчивости номинального режима движения связки. Тем самым подтверждается стабилизирующий эффект лоренцева момента, возбуждаемого за счет зарядов на концах троса. Соответствующие результаты численного счета, иллюстрирующие этот вывод, приведены в [31].

Однако для решения задачи стабилизации номинального режима движения троса требуется обеспечить не только восстанавливающий, но и диссипативный момент. Рассмотрим возможности использования лоренцева момента для создания управляющего воздействия, имеющего диссипативный характер.

8. ЭДТС с системой управления

8.1. Синтез управляющего момента

Из (15) следует, что формирование управляющего лоренцева момента опирается на возможность создания управляемого вектора $\vec{P}$. Для модели линейного относительного угловой скорости диссипативного момента [34] задача может быть сведена к подбору такой неотрицательной диагональной матрицы $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(D_1, D_2, D_3)$, для которой выполняется равенство $P_1\vec{k} \times \vec{T} = -\mathbf{D}\vec{\omega}_1$, эквивалентное системе

$$\begin{cases} P_1 T_y = D_1\omega_{1x}, \\ P_1 T_x = -D_2\omega_{1y}, \\ \qquad 0 = D_3\omega_{1z}. \end{cases} \tag{29}$$

Поскольку $T_x = 0$ в силу выбора системы координат xyz, то из (29) следует, что $D_2 = 0$ и остается только управление по каналу “x”, которое можно подобрать с помощью подходящего выбора D_1. Например, можно взять $D_1 = d_1|T_y|$, где $d_1 > 0$. Тогда

$$P_1 = d_1\omega_{1x}\mathrm{sign}(T_y) = d_1\omega_{1x}\mathrm{sign}(\sin\vartheta).$$

Принимая во внимание, что $\vec{P}_1$ имеет положительную проекцию на ось z (см. (15)), замечаем, что полученное выражение для P_1 имеет смысл лишь при $\omega_{1x} = \dot{\vartheta} > 0$. Поэтому можно предложить такое управление вектором $\vec{P}_1$:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 = d_1\dot{\vartheta}\mathrm{sign}(\sin\vartheta)\vec{k}, & \dot{\vartheta} > 0, \\ \vec{P}_1 = \mathbf{0}, & \dot{\vartheta} \leqslant 0. \end{cases} \tag{30}$$

Для доказательства работоспособности предложенного управления прежде всего следует решить вопрос о возможности реализации вектора $\vec{P}_1$ в соответствии с формулой (30). Будем рассматривать заряды q_1 и q_2 как содержащие постоянные части q_{10} и q_{20} и переменные (управляемые) $\tilde{q}_1$ и $\tilde{q}_2$.

Тогда

$$\vec{P} = (q_{10}z_1 + q_{20}z_2)\vec{k} + (\tilde{q}_1 z_1 + \tilde{q}_2 z_2)\vec{k}.$$

Пусть $\vec{P}_1 = (\tilde{q}_1 z_1 + \tilde{q}_2 z_2)\vec{k}$. Вводя коэффициент k_q так, что $\tilde{q}_1 = -k_q\tilde{q}_2$, на основании (1) получим

$$\vec{P}_1 = \frac{l\tilde{q}_2(k_q(m_0 + 2m_2) + m_0 + 2m_1)\vec{k}}{2(m_0 + m_1 + m_2)}. \tag{31}$$

Приравнивая (30) и (31), получим следующий закон изменения k_q:

$$\begin{cases} k_q = \dfrac{1}{m_0 + 2m_2}\left[\dfrac{2d_1}{l\tilde{q}_2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{\vartheta}\mathrm{sign}(\sin\vartheta) - m_0 - 2m_1\right], & \dot{\vartheta} > 0, \\ k_q = -\dfrac{m_0 + 2m_1}{m_0 + 2m_2}, & \dot{\vartheta} \leqslant 0 \end{cases} \tag{32}$$

или, что то же,

$$k_q = \frac{1}{m_0 + 2m_2}\left[\frac{d_1}{l\tilde{q}_2}(m_0 + m_1 + m_2)(|\dot{\vartheta}| + \dot{\vartheta})\mathrm{sign}(\sin\vartheta) - m_0 - 2m_1\right] \fallingdotseq \tilde{k}_q. \tag{33}$$

Из (32) следует, что в процессе колебаний ЭДТС коэффициент $k_q = k_q(\vartheta, \dot{\vartheta})$ может принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Поэтому во избежание ситуации, когда заряд нижнего коллектора $q_1 = -k_q\tilde{q}_2 + q_{10}$ должен будет стать положительным, следует потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) > \frac{q_{10}}{\tilde{q}_2} \fallingdotseq k_{q\,\min}.$$

С другой стороны, заряд нижнего коллектора не должен быть слишком большим по модулю, чтобы не возникло риска “схлопывания” тросовой системы под действием сил кулонова притяжения. Поэтому исходя из априорных оценок величин зарядов ЭДТС, основанных на вычислении сил натяжения троса (формулы (3), (7)), следует выбрать некоторое допустимое значение $q_{1\,\min}$, чтобы затем на основании неравенства $q_{1\,\min} < q_1 = -k_q\tilde{q}_2 + q_{10}$ получить верхнюю границу для коэффициента k_q:

$$k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) < \frac{q_{10} - q_{1\,\min}}{\tilde{q}_2} \fallingdotseq k_{q\,\max}.$$

Введем в рассмотрение функцию $S(\tilde{k}_q) = (\tilde{k}_q - k_{q\,\min})(\tilde{k}_q - k_{q\,\max})$. Тогда, если $S(\tilde{k}_q) < 0$, работает управление с функцией $\tilde{k}_q$. Если $S(\tilde{k}_q) > 0$, то нужно выбирать из двух вариантов: если $k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) < k_{q\,\min}$, следует взять

$$k_{q\,\min} = \frac{1}{2}k_{q\,\min}(1 - \mathrm{sign}(\tilde{k}_q - k_{q\,\min})),$$

если $k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) > k_{q\,\max}$, то следует взять

$$k_{q\,\max} = \frac{1}{2} k_{q\,\max}(1 - \mathrm{sign}(k_{q\,\max} - \tilde{k}_q)).$$

В результате получаем, что удовлетворяющее вышеуказанным требованиям выражение коэффициента k_q может быть кратко записано в виде

$$(34) \quad k_q = \frac{1}{2}\tilde{k}_q(1 - \mathrm{sign}(S(\tilde{k}_q))) + \frac{1}{4}(\mathrm{sign}(S(\tilde{k}_q)) + 1) \times \\ \times \left[k_{q\,\max}(1 - \mathrm{sign}(k_{q\,\max} - \tilde{k}_q)) + k_{q\,\min}(1 - \mathrm{sign}(\tilde{k}_q - k_{q\,\min})) \right].$$

Найденный закон изменения k_q позволяет получить управляющий момент

$$\vec{M}_{LD} = d_1 \dot{\vartheta} \mathrm{sign}(\sin\vartheta)\, \vec{k} \times \vec{T},$$

проекция которого на ось x равна

$$M_{LDx} = -d_1 \dot{\vartheta} |\sin\vartheta| R_E^3 R^{-2} (-g_1^0)(\omega_0 - \omega_E), \tag{35}$$

где

$$\begin{cases} d_1 > 0, & \dot{\vartheta} > 0, \\ d_1 = 0, & \dot{\vartheta} \leqslant 0. \end{cases} \tag{36}$$

Если ввести обозначение $D = d_1 R_E^3 R^{-2}(-g_1^0)(\omega_0 - \omega_E)$, то можно переписать (35) кратко в виде

$$M_{LDx} = -\frac{1}{2} D(|p| + p)|\gamma_2|. \tag{37}$$

8.2. Исследование режима стабилизации ЭДТС

С учетом предложенного управления (37) дифференциальные уравнения Эйлера (25) примут вид

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x - A\omega_y\omega_z = -3A\omega_0^2\gamma_2\gamma_3 - L\gamma_2 + a\beta_1 - \dfrac{1}{2}D(|p| + p)|\gamma_2|, \\ A\dot{\omega}_y + A\omega_x\omega_z = 3A\omega_0^2\gamma_1\gamma_3 + L\gamma_1 + a\beta_2. \end{cases} \tag{38}$$

Докажем, что справедлива следующая

Теорема 1. При выполнении условия $a = 0$ *управление* (37) *обеспечивает асимптотическую устойчивость номинального режима движения связки.*

Доказательство теоремы 1. Заметим вначале, что имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(\omega_x^2+\omega_y^2)-\frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2-L\gamma_3-A\omega_0(\omega_x\beta_1+\omega_y\beta_2)\right]=$$
$$=a(\omega_x\beta_1+\omega_y\beta_2-\omega_0(\beta_1^2+\beta_2^2))-\frac{D}{2}p\,(|p|+p)|\gamma_2|,$$

где производная в левой части равенства вычисляется в силу (38). Переходя от абсолютных угловых скоростей ω_x,ω_y к относительным угловым скоростям p,q по формулам (11), перепишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(p^2+q^2)-\frac{A}{2}\omega_0^2(\beta_1^2+\beta_2^2)-\frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2-L\gamma_3\right]=$$
$$=a(p\beta_1+q\beta_2)-\frac{D}{2}p\,(|p|+p)|\gamma_2|.$$

Вводя новую переменную $\Delta=1-\gamma_3$, представляющую собой отклонение связки от номинального режима движения $\gamma_3=1$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\frac{dV(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)}{dt}=2a(p\beta_1+q\beta_2)-Dp\,(|p|+p)|\gamma_2|,$$

где

$$V(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)=A(p^2+q^2)+(3A\omega_0^2+L)\alpha_3^2+(4A\omega_0^2+L)\beta_3^2+L\Delta^2.$$

Отсюда следует, что если учесть условие (22), то $a=0$ и для функции $V(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)$ получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dV(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)}{dt}=-D\omega_0p\,(|p|+p)\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}. \tag{39}$$

Поскольку выбором $q_1z_1+q_2z_2>0$ всегда можно обеспечить выполнение неравенства $L>0$, то функция $V(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)$ является положительно определенной. Ее производная в силу (38) является знакопостоянной отрицательной. Из (39) следует, что указанная производная может обратиться в ноль в следующих двух случаях:

$$1)\ p=0,\qquad 2)\ \alpha_3=\beta_3=0.$$

Рассмотрим каждый из них и докажем от противного отсутствие соответствующих им ненулевых решений системы (38).

1. Случай $p=0$.

Из (12) следует, что в этом случае $\vartheta=\mathrm{const}=\vartheta_0$, $q=\dot\psi\,\sin\vartheta_0$, $r=\dot\psi\cos\vartheta_0$ и (38) принимает вид

$$\begin{cases}\omega_0\dot\beta_1-(q+\omega_0\beta_2)(r+\omega_0\beta_3)=-3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3-LA^{-1}\gamma_2,\\ \quad\dot q+\omega_0\dot\beta_2+\omega_0\beta_1(r+\omega_0\beta_3)=0.\end{cases}$$

На основании (10) перепишем эту систему в углах ψ и $\vartheta = \vartheta_0$:

$$
\begin{cases}
\sin\vartheta_0(2\omega_0\dot\psi\cos\psi\sin\vartheta_0 - \dot\psi^2\cos\vartheta_0 + \\
\qquad\qquad + \omega_0^2\cos^2\psi\cos\vartheta_0 + 3\omega_0^2\cos\vartheta_0 + LA^{-1}) = 0, \\
\sin\vartheta_0(\ddot\psi - \omega_0^2\sin\psi\cos\psi) = 0.
\end{cases}
\tag{40}
$$

В силу предположения (от противного) о существовании ненулевого решения поделим первое из уравнений (40) на $\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0$, второе уравнение — на $\sin\vartheta_0$, а затем заменим второе уравнение этой системы на соответствующий ему первый интеграл:

$$
\begin{cases}
\dot\psi^2 - 2\omega_0\dot\psi\cos\psi\tan\vartheta_0 - \omega_0^2\cos^2\psi - 3\omega_0^2 - \dfrac{L}{A\cos\vartheta_0} = 0, \\
\dot\psi^2 + \omega_0^2\cos^2\psi = C_2 = \mathrm{const} \geqslant 0.
\end{cases}
\tag{41}
$$

Разрешив полученные уравнения относительно $\dot\psi$, приходим к системе

$$
\begin{cases}
\dot\psi = \omega_0\cos\psi\tan\vartheta_0 \pm \sqrt{\omega_0^2\dfrac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta_0} + 3\omega_0^2 + \dfrac{L}{A\cos\vartheta_0}}, \\
\dot\psi = \pm\sqrt{C_2 - \omega_0^2\cos^2\psi}.
\end{cases}
\tag{42}
$$

Несложно проверить, что она является совместной тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$
\omega_0^4\frac{\cos^4\psi}{\cos^2\vartheta_0} + g_0\omega_0^2\cos^2\psi + \frac{1}{4}(g_0 - C_2)^2 = 0,
$$

все три слагаемых в котором неотрицательны. Следовательно, данное равенство эквивалентно системе уравнений

$$
\cos\psi = 0, \quad g_0 = C_2. \tag{43}
$$

Проверим, является ли (43) решением системы (41). Предположив, что (43) является решением, приходим к равенству $C_2 = 0$, откуда следует, что $g_0 = 0$. Последнее равносильно равенству $3A\omega_0^2\cos\vartheta_0 + L = 0$, которое совпадает со вторым вариантом из (24) и соответствует нереализуемому наклонному положению равновесия связки. Полученное противоречие доказывает отсутствие ненулевых решений в первом случае. Перейдем к рассмотрению второго возможного случая.

2. Случай $\alpha_3 = \beta_3 = 0$.

Этот случай, очевидно, равносилен $\gamma_3 = 1$. С физической точки зрения это означает, что $\vartheta = 0$ и, следовательно, $p = 0$. Проверим, реализуются ли равенства

$$
p = 0, \quad \gamma_3 = 1 \tag{44}
$$

на нетривиальных решениях системы (41). Предположив, что равенства (44) могут реализоваться на нетривиальных решениях, приходим к системе уравнений $\dot{\beta}_1 = \beta_2 r$, $\dot{\beta}_2 = -\beta_1 r$, откуда следует, что $\beta_1\dot{\beta}_1 + \beta_2\dot{\beta}_2 = 0$. Проинтегрировав последнее равенство, получаем $\beta_1^2 + \beta_2^2 = \mathrm{const}$. Поскольку $\beta_3 = 0$, то может реализоваться только случай $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$. Отсутствие других решений завершает рассмотрение случая 2. Таким образом, выполняются условия теоремы Барбашина – Красовского [35] и положение равновесия $\vartheta = 0$ является асимптотически устойчивым. Теорема 1 доказана. Тем самым подтверждается возможность стабилизации номинального режима движения связки с помощью предложенного управления.

Аналогичная гантелеобразная система двух заряженных ИСЗ рассматривалась в [36]. Однако, в [36] отсутствовал ток и вызванный им амперов момент, а идея изменения величин зарядов ИСЗ использовалась не для генерации диссипативного момента, а лишь для изменения восстанавливающего момента в рамках консервативной механической системы, допускающей интеграл энергии. Рассмотрение задачи велось в плоской постановке для изучения колебаний в плоскости орбиты.

9. Результаты компьютерного моделирования

В процессе работы было предпринято компьютерное моделирование и выполнена серия численных экспериментов. В данном разделе приводится пример связки с “плохими” с точки зрения процесса стабилизации значениями параметров, значительно отличающимися от тех, которые использовались в примере 1.

Пример 2. Рассматривается связка с тросом длиной $l = 200$ м и погонной плотностью $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м, с концевыми массами $m_1 = 29{,}4$ кг, $m_2 = 30$ кг, имеющими значения z-координаты $-100{,}5$ м и $99{,}5$ м соответственно. Центр связки движется по орбите с радиусом $R = 7 \cdot 10^6$ м. По тросу протекает ток силой 1А. В работе системы стабилизации троса принимают участие следующие заряды: постоянная часть положительного заряда на верхнем коллекторе $q_{20} = 5 \cdot 10^{-5}$ Кл, постоянная часть отрицательного заряда на нижнем коллекторе $q_{10} = -5 \cdot 10^{-5}$ Кл. В процессе работы системы стабилизации троса заряд на нижнем коллекторе может возрастать по абсолютной величине. Для предотвращения возможных нежелательных динамических эффектов такого возрастания значение указанного заряда ограничивается в соответствии с вышеописанным алгоритмом управления величиной $q_{1\,\min} = -9 \cdot 10^{-5}$ Кл. При таком значении $q_{1\,\min}$ минимальное значение натяжения троса, как показывает проверка по формулам (3), остается положительным. Оно достигается на нижнем конце троса и равно $T_1 = 0{,}01$ Н. Коэффициент d_1 принимается равным 0,01. В начальный момент времени трос был отклонен от местной вертикали на угол 60° в плоскости (η, ζ) и отпущен без относительной угловой скорости.

Результаты численного интегрирования представлены на рис. 6–9, где по оси абсцисс на всех рисунках отложен безразмерный угол — аргумент широты $u = \omega_0 t$. Основным параметром ориентации троса является направляю-

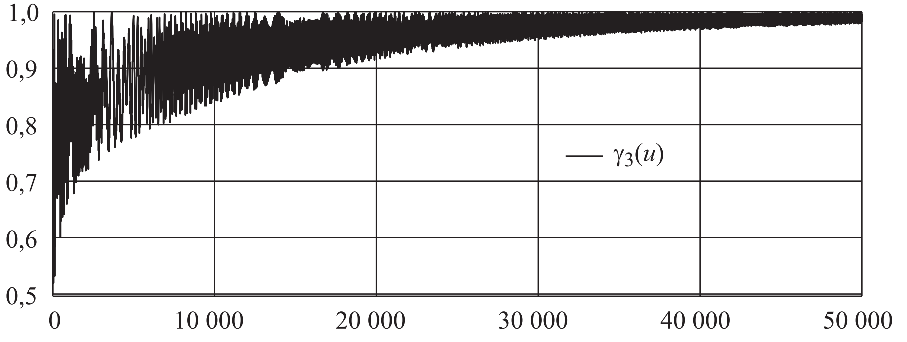


Рис. 6. Процесс стабилизации троса.

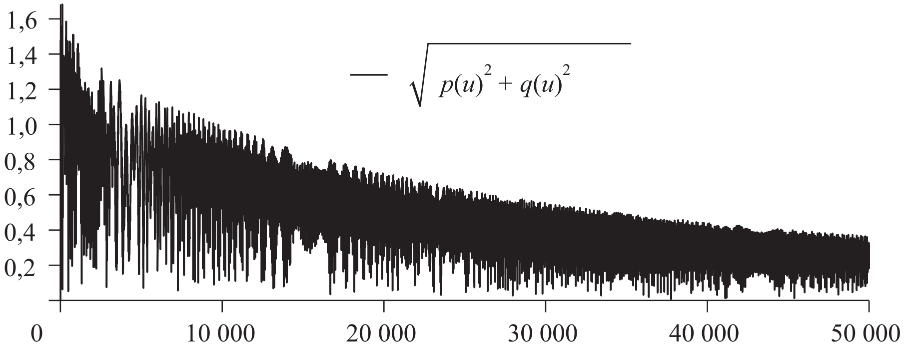


Рис. 7. Затухание угловой скорости (рад/с) троса.

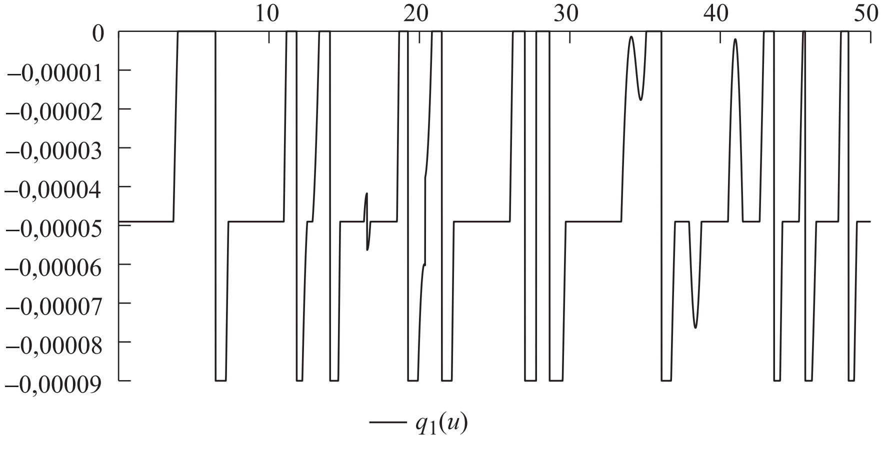
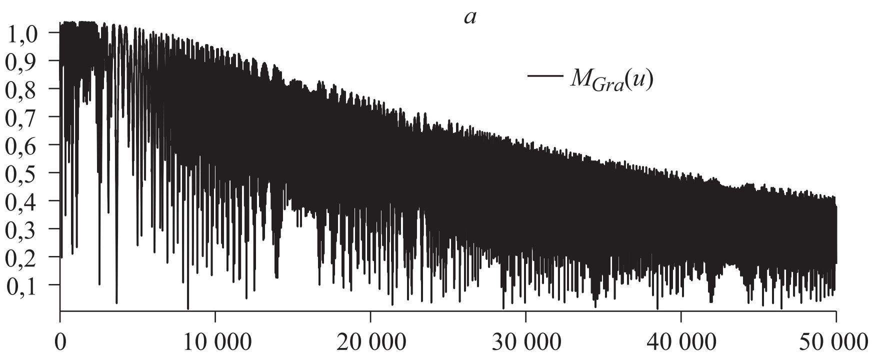
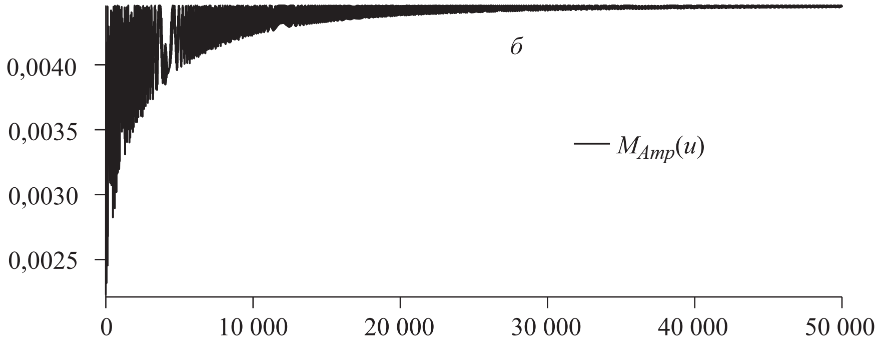
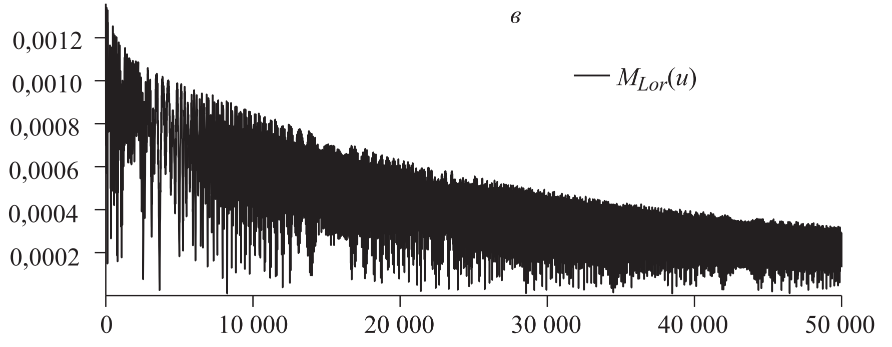


Рис. 8. Изменение заряда (Кл) на нижнем коллекторе.

щий косинус γ_3, стремящийся к целевому значению $\gamma_3 = 1$ (рис. 6). Из рис. 6 видно, что если выберем допустимое отклонение 0,2 для γ_3, то с момента времени $u = 7000$ амплитуда колебаний связки будет находиться в допустимых пределах и будет продолжать уменьшаться.







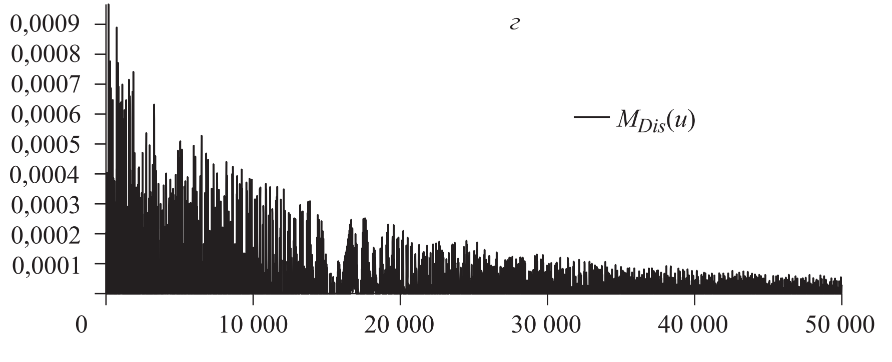


Рис. 9. *а* – Гравитационный момент (Нм), *б* –амперов момент (Нм), *в* – лоренцев момент (Нм), *г* – активный демпфирующий момент (Нм).

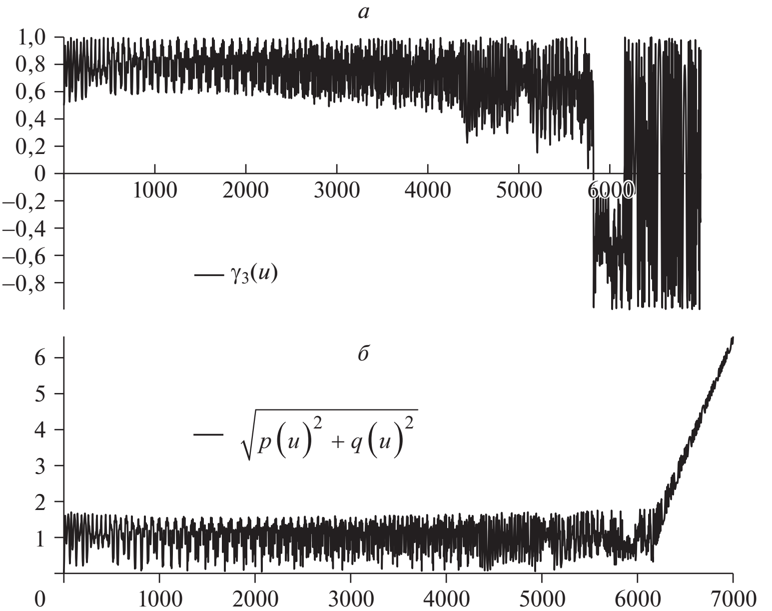


Рис. 10. *а* – Неуправляемая дестабилизация вертикального положения троса, *б* – неуправляемая дестабилизация угловой скорости (рад/с) троса.

Относительная угловая скорость (в рад/с) троса стремится к нулю (рис. 7).

Величины зарядов коллекторов варьируются в соответствии с законом управления и уравнением (34). Изменение заряда $q_1 = -k_q\tilde{q}_2 + q_{10}$ на отрицательно заряженном коллекторе показано на рис. 8. Для ясности рисунка график построен для небольшого диапазона изменения времени.

На рис. 9,*а*–9,*г* показаны графики изменения моментов, действующих на ЭДТС.

Замечание 1. В данном примере с целью приближения к реальным условиям значения масс m_1 и m_2 выбраны разными. Это приводит к тому, что условие (22) не выполняется, строго вертикальное положение равновесия троса отсутствует, а система стабилизации работает в условиях, когда дестабилизирующий амперов момент можно рассматривать как постоянно действующее возмущение.

Выполнено также моделирование динамики обычного тяжелого троса с массами m_1 и m_2 на концах, но не несущего зарядов на коллекторах и, соответственно, не управляемого. Значения прочих параметров и начальные условия движения ЭДТС совпадают с теми, которые были выбраны в примере 2. Дестабилизация такого троса показана на рис. 10.

10. Заключение

Рассмотрена задача угловой стабилизации ЭДТС в вертикальном положении троса. Аналитические исследования и компьютерное моделирование показали, что лоренцев момент, действующий на ЭДТС благодаря заряженным коллекторам на концах троса, существенно расширяет область устойчивости вертикального положения троса. Кроме того, показана возможность генерировать управляющий момент диссипативного характера путем активного управления величиной заряда на нижнем коллекторе в соответствии с условиями, определяемыми текущей ориентацией троса. Если при этом параметры троса выбраны в соответствии с условиями, учитывающими влияние возмущающих моментов, то достигается асимптотическая устойчивость ориентации троса вдоль местной вертикали без необходимости выключения тока, протекающего по тросу. Таким образом, предложенное устройство и метод управления могут быть использованы для стабилизации космической тросовой системы в околоземном пространстве с целью повышения эффективности ее функционирования в процессе уборки космического мусора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990.
2. *Муницына М.А.* Относительные равновесия системы "гантель–груз" с односторонними связями на круговой кеплеровой орбите // АиТ. 2007. № 9. С. 9–15.

   Munitsina M.A. Relative Equilibrium on the Circular Keplerian Orbit of the "Dumbbells–Load" System with Unilateral Connections // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 9. P. 1476–1482.
3. *Кульков В.М., Егоров Ю.Г., Тузиков С.А.* Исследование конфигурации и формирование проектного облика развернутой электродинамической тросовой системы в составе орбитальных космических аппаратов // Изв. РАН. Энергетика. 2018. № 3. С. 119–130.
4. *Воеводин П.С., Заболотнов Ю.М.* Моделирование и анализ колебаний электродинамической тросовой системы на орбите спутника Земли // Мат. моделирование. 2017. № 6. С. 21–34.
5. *Forward R.L.* Electrodynamic drag terminator tether, Appendix K of high strength-to-weight tapered Hoytether for LEO to GEO payload transport // Final Report on NASA SBIR Phase I Contract NAS8-40690. 10 July 1996.
6. *Forward R.L., Hoyt R.P., Uphoff C.* Application of the Terminator Tether electrodynamic drag technology to the deorbit of constellation spacecraft // 34 Joint Propulsion Conf. Exhibit. Paper AIAA 98-3491. Cleveland, OH. 1998.
7. *Forward R.L., Hoyt R.P.* Terminator Tether: a spacecraft deorbit device // J. Spacecraft Rockets. 2000. V. 37. P. 187–196.
8. *Cosmo M.L., Lorenzini E.C.* Tethers in Space Handbook, 3-rd ed. Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, MA, USA, 1997.
9. *Vannaroni G., Dobrowolny M., De Venuto F.* Deorbiting with electrodynamic tethers: comparison between different tether configurations // Space Debris. 2001. V. 1. P. 159–172.
10. *Iess L., Bruno C., Ulivieri C., et al.* Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part I: general concepts and requirements // Acta Astronautica. 2002. V. 50. No. 7. P. 399–406.
11. *Iess L., Bruno C., Ulivieri C., Vannaroni G.* Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part II: System configuration and performance // Acta Astronautica. 2002. V. 50. No. 7. P. 407–416.

12. *Ishige Y., Kawamoto S., Kibe S.* Study on electrodynamic tether system for space debris removal // Acta Astronautica. 2004. V. 55. No. 11. P. 917–929.

13. *Yamaigiwa Y., Hiragi E., Kishimoto T.* Dynamic behavior of electrodynamic tether deorbit system on elliptical orbit and its control by Lorentz force // Aerospace Sci. Technol. 2005. V. 9. P. 366–373.

14. *Zhong R., Zhu Z.H.* Libration dynamics and stability of electrodynamic tethers in satellite deorbit // Celestial Mechan. Dynam. Astronom. 2013. V. 116. No. 3. P. 279–298.

15. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.

16. *Levin E.M.* Dynamic Analysis of Space Tether Missions – Advances in the Astronautical Sciences / San Diego, California, American Astronautical Society. V. 126. 2007.

17. *Pelaez J., Lorenzini E.C., Lopez-Rebollal O., Ruiz M.* A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers / AAS 00-190, AAS/AIAA Space Flight Meeting. 2000.

18. *Corsi J., Iess L.* Stability and control of electrodynamic tether for de-orbiting applications // Acta Astronautica. 2001. V. 48. No. 5–12. P. 491–501.

19. *Larsen M.B., Blanke M.* Passivity-based control of a rigid electrodynamic tether // J. Guidance, Control, Dynam. 2011. V. 34. P. 118–127.

20. *Yang Y., Cai H.* Extended time-delay autosynchronization method for libration control of electrodynamic tether using Lorentz force // Acta Astronautica. 2019. V. 159. P. 179–188.

21. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.1: Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат // Вестн. СПб. ун-та. Сер.1. 1999. Вып. 1. No. 1. С. 92–100.

22. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестн. СПб. ун-та. Сер.1. 1999. Вып. 3. No. 15. С. 81–91.

23. *Тихонов А.А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исслед. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.

24. *Тихонов А.А.* О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите // Космические исслед. 2005. Т. 43. № 2. С. 111–125.

25. *Антипов К.А., Тихонов А.А.* Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // АиТ. 2007. № 8. С. 44–56.

    Antipov K.A., Tikhonov A.A. Parametric Control in the Problem of Spacecraft Stabilization in the Geomagnetic Field // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 8. P. 1333–1345.

26. *Тихонов А.А., Спасич Д.Т., Антипов К.А., Саблина М.В.* Оптимизация электродинамического метода стабилизации ИСЗ // АиТ. 2011. № 9. С. 112–121.

27. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Одноосная электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в орбитальной системе координат // АиТ. 2013. № 8. С. 22–31.

    Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Monoaxial electrodynamic stabilization of Earth satellite in the orbital coordinate system // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 1249–1256. DOI: 10.1134/S000511791308002X

28. *Антипов К.А., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исслед. 2014. Т. 52. № 6. С. 512–520.
29. *Antipov K.A., Tikhonov A.A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization // Aerospace Sci. Technology. 2014. V. 33. P. 92–99.
30. *Aleksandrov A.Yu., Antipov K.A., Platonov A.V., Tikhonov A.A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame // Nonlinear Dynam. 2015. V. 82. P. 1493–1505.
31. *Tikhonov A.A., Shcherbakova L.F.* On Equilibrium Positions and Stabilization of Electrodynamic Tether System in the Orbital Frame // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. No. 040023.
32. *Шамолин М.В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. № 6. С. 1003–1010.
33. *Woo P., Misra A.K.* Mechanics of very long tethered systems // Acta Astronautica. 2013. V. 87. P. 153–162.
34. *Shamolin M.V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. 2002. V. 110. No. 2. P. 2528–2557.
35. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
36. *Yamakawa H., Hachiyama S., Bando M.* Attitude dynamics of a pendulum-shaped charged satellite // Acta Astronautica. 2012. V. 70. P. 77–84.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глумовым.

Поступила в редакцию 01.06.2019

После доработки 29.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019